Lycée Thiers Année 2016/17	Informatique MPSI-PCSI

Feuille d'Exercices n° 17

Calcul approché d'intégrales (Méthodes de Newton-Cotes).

Exercice 1.

(1) Tracer à l'aide de `pyplot`, dans la portion du plan $\mathscr{P} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ constitué des points :

$$\{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2 \; ; \; -2 \leqslant y \leqslant 2\}$$

(utiliser la commande : `plt.axis([-2,2,-2,2])`) :
– l'axe des abscisse (commande `plt.axhline()`),
– l'axe des ordonnées (commande `plt.axvline()`), et
– le "cercle unitaire" centré en l'origine et de rayon 1.

$$\mathscr{S} = \left\{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

(commande `plt.plot(X,Y)` pour deux tableaux `X` et `Y` à construire).

Le cercle $\mathscr{S}$ délimite le disque $\mathscr{D}$.
(on peut colorer le disque par `plt.fill(X,Y,color='lightblue')`).

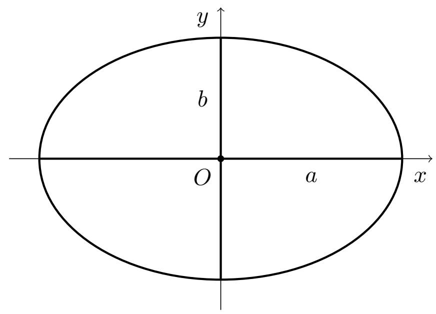
(2) Appliquer la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée de l'aire du disque $\mathscr{D}$.
(3) Même question en appliquant la méthode des trapèzes.
(4) En déduire un calcul approché du nombre π.

Exercice 2.

(1) Appliquer la méthode des trapèzes pour calculer une valeur approchée de l'aire de l'ellipse d'équation

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

(2) Même question en appliquant la méthode des rectangles.
(3) Comparer avec la valeur exacte.
L'aire de l'ellipse :



est $\pi \times a \times b$.

Exercice 3. La **méthode de Simpson** calcule une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a,b]$, en utilisant une subdivision régulière en $N+1$ points $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ de $[a,b]$ et en approximant le graphe de la fonction sur chaque segment $[\alpha_k,\alpha_{k+1}]$ par un arc de parabole de fonction f_k qui coïncide avec le graphe de f aux points d'abscisses α_k, α_{k+1} et $m_k = \frac{\alpha_k+\alpha_{k+1}}{2}$.

Le calcul montre que l'aire sous la parabole ainsi construite est :

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f_k(t)dt = \frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{6}\left(f(\alpha_k)+4f(m_k)+f(\alpha_{k+1})\right)$$

Après sommation on obtient , après avoir changé la subdivision $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ en $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant 2N} = (\alpha_0, m_0, \alpha_1, \ldots, m_{N-1}, \alpha_N$ et posé $n=2N$, l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{1}{6}.\frac{(b-a)}{n}\left(f(a)+f(b)+2.\sum_{0<k\text{ pair}<n} f(a_k)+4.\sum_{0<k\text{ impair}<n} f(a_k)\right)$$

On obtient alors une très bonne méthode d'approximation d'une intégrale, dont l'erreur pour f de classe C^4 est majorée par $\dfrac{k\times\sup_{[a,b]}|f^{[4]}|}{n^4}$ (et en particulier donne des résultats exacts pour tout polynôme de degré au plus 3).

(1) En déduire une fonction `simpson(f,a,b,N)` sous `python` qui applique la méthode de Simpson pour le calcul approché de $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide d'une subdivision régulière de $N+1$ points.
(2) L'appliquer pour retrouver une valeur approchée de π comme dans l'exercice 1.