Lycée Thiers Année 2016/17	Informatique MPSI-PCSI

Feuille d'Exercices - TD n° 19

Résolution numérique d'équations différentielles du 1er ordre.

Exercice 1.

(1) Ecrire une fonction `Euler(phi,y0,a,b,n)` qui implémente la méthode d'Euler pour la résolution d'un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = \phi(y,x) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

sur l'intervalle $[a,b]$, où $y : x \mapsto y(x)$ est une application dérivable sur $[a,b]$.

`Euler()` prend en paramètre : la fonction `phi`$=\phi$ second membre, la valeur initiale `y0`$=y_0$ prise par y en a, les bornes `a` et `b` de l'intervalle de résolution $[a,b]$, un entier positif `n`. Elle retourne le tableau `Y` des `n` valeurs prises par la solution y au dessus d'une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$.

(2) Donner le code permettant de l'appliquer pour résoudre numériquement sur $[0,1]$:

$$\begin{cases} y' - y \times \sin(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

et de tracer la courbe représentative de la solution obtenue.

Exercice 2.

(1) Résoudre de deux façons par la méthode d'Euler-Cauchy ainsi que grâce à la fonction `odeint()`, le problème de Cauchy :

$$y'(t) = y(t) \ , \qquad y(0) = 1$$

sur l'intervalle $[0,10]$; on prendra dans les deux cas le même pas de subdivision.

(2) Tracer dans une même fenêtre deux graphiques. Dans le premier on tracera la solution obtenue par la méthode d'Euler et dans le deuxième la solution obtenue par `odeint`. Dans chaque graphique on tracera aussi la courbe de la solution exacte exp. Effectuer deux tracés en prenant une subdivision en 1000 segments, 100 segments. Quelle méthode donne le meilleur résultat ?

(3) Par une méthode au choix, tracer les courbes représentatives de plusieurs solutions au problème de Cauchy :

$$y'(t) = a.y(t) \ , \qquad y(0) = 1$$

sur l'intervalle $[0, 1]$ obtenus en faisant varier le paramètre a, par pas constants entre -2 et 2. Même question en fixant $a = 1$ et en faisant varier la condition initiale entre 0 et 2.

Exercice 3. *Etude d'un circuit RC*

L'équation-différentielle qui régit l'évolution de la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RC en régime libre s'écrit sous la forme :

$$\frac{dU_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} U_c(t) = 0$$

(1) On suppose qu'initialement $U_c(0) = 1\,\mathrm{V}, R = 1\,\mathrm{k}\Omega, C = 1\,\mathrm{nF}$. Réaliser l'intégration de l'équation-différentielle précédente par la méthode d'Euler-Cauchy entre t=0 et 0.01 ms, avec une subdivision de 100 segments.

(2) Tracer la courbe représentative de $U_c(t)$ pour t variant de 0 à 0.01 ms.