Lycée Thiers Année 2016/17	Informatique MPSI-PCSI

Feuille d'Exercices - TD n° 20

Résolution numérique de systèmes d'équations différentielles du 1er ordre.

Exercice 1. Cinétique chimique.

Une solution composée de réactifs A, B, C, où deux réactions chimiques $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow C$ d'ordre 1 rentrent en jeu selon les lois.

$$\begin{cases} \dfrac{d[A]}{dt} & = -[A] \\ \dfrac{d[B]}{dt} & = \quad 2[A] - [B] \\ \dfrac{d[C]}{dt} & = \quad [B]/2 \end{cases}$$

(1) Tracer l'évolution des concentrations des 3 réactifs A , B, C entre 0 et 8s par pas de 0.01s, en partant des concentrations initiales $[A] = 1$, $[B] = [C] = 0$.
(2) Au bout de 8s quelle est la concentration de chacun des réactifs ?
(3) A quel moment, à 0.01s près, les concentrations en produits A et C sont-elles égales ?

Exercice 2. Equations de Lotka-Volterra pour un modèle proie-prédateur.

Les équations différentielles de Lotka-Volterra dites "modèle proie-prédateur" permettent de modéliser l'évolution d'une population constituée de proies et de prédateurs.
– $x(t)$, $y(t)$ représentent respectivement l'effectif des populations de proies et de prédateurs en fonction du temps t.
– La constante a est le taux de reproduction des proies.
– La constante b est le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs.
– La constante c est le taux de mortalité des prédateurs.
– La constante d est le taux de reproduction des prédateurs en fonction du nombre de proie.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = x(t)(a - b \cdot y(t)) \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = -y(t)(c - d \cdot x(t)) \end{cases}$$

On prendra pour valeurs numériques : $a = 1,15$, $b = 0,015$, $c = 1,25$ et $d = 0,005$

(1) Tracer sur un même graphique l'évolution des effectifs des proies et des prédateurs sur 30 unités de temps, pour les conditions initiales $x(0) = 300$, $y(0) = 150$.
(2) Tracer sur un même graphe les courbes paramétriques $(x(t), y(t))$ des effectifs des populations à l'instant t avec comme condition initiales : $(x(0), y(0)) \in \{(300, 150), (150, 150), (150, 300), (300, 300)\}$. Tracer également la droite d'équation $x + y = 150$.
(3) On constitue un bassin de pêche avec deux espèces de poissons, l'une proie, l'autre prédateur, dont l'évolution suit un modèle de Lotka-Volterra avec pour valeurs numériques a, b, c, d celles figurant ci-dessus. Parmi les 4 possibilités $(300, 150)$, $(150, 150)$, $(150, 300)$ et $(300, 300)$ de populations initiales, laquelle conseilleriez-vous, sachant que :
   - La population totale du bassin doit rester relativement stable, et ne pas descendre trop sous la barre de 150 individus.
   - Le remplissage initial du bassin a un coût financier important qu'il s'agit de modérer.