

**Feuille d'Exercices n° 22**

Résolution numérique d'équations différentielles du second ordre.

**Exercice 1.** On souhaite résoudre le problème de Cauchy suivant sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$\begin{cases} \ddot{y} = \sin^2(x) \\ \dot{y}(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On se donne un entier  $N=100$  et la subdivision régulière de  $(x_n)_{0 \leq n \leq 100}$  de  $[0, 1]$  qu'on se donne en `python` par `X = np.linspace(0,1,101)`. On souhaite résoudre ce problème en constituant le tableau `Y` contenant les valeurs  $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_N)$ .

(1) *Première méthode.*

- (a) Ecrire l'équation différentielle à l'ordre 2 :  $\ddot{y} = \sin^2(x)$  comme un système de deux équations différentielles à l'ordre 1.
- (b) Résoudre le problème de Cauchy en donnant le code qui permet d'obtenir le tableau `Y`. (On pourra utiliser la fonction `odeint()` de `scipy.integrate`).

2. *Deuxième méthode*

- (a) On part d'un tableau vide : `Y=np.empty(N+1)`. Quelle valeur devra prendre `Y[0]` dans la solution apportée ?
- (b) Quelle valeur devra prendre `Y[1]` ?
- (c) En appliquant le schéma d'Euler explicite à l'ordre 2 :

$$\ddot{y}(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1}))}{(1/N)^2}$$

exprimer pour tout  $k \in [[1, N-1]]$ , une valeur approchée obtenue par cette approximation de `Y[k+1]` en fonction de  $N$ , `Y[k]`, `Y[k-1]` et de `np.sin(X[k])`.

- (d) Donner le code permettant de constituer le tableau `Y` des valeurs prises par  $y$  aux points de la subdivision régulière  $(x_n)_{0 \leq n \leq 100}$  de  $[0, 1]$ .
- (3) Tracer dans une même fenêtre les deux graphiques obtenus par les deux méthodes.