

Chapitre 1 :

Nombres réels - Suites numériques

PC - ENCPB

Jean-Philippe Préaux

<http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux>

Rappels préliminaires sur les réels

Valeur absolue

Partie entière

Bornes supérieures et inférieures d'une partie de $\mathbb{R}$

Suites numériques

Définitions

Partie dense de $\mathbb{R}$

Limites et ordre

Opérations sur les limites

Cas réel : suite monotone ; théorèmes de convergence

Relations de comparaison

Etude pratique de certaines suites

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites arithmético-géométriques

Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

Suites réelles du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Valeur absolue

Définition

La valeur absolue d'un nombre réel x est le nombre réel :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Principales propriétés :

Propriété

- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0, \quad |-x| = |x| \quad \text{et} \quad (|x| = 0 \iff x = 0).$
- *La valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues :*

$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

- *Inégalité triangulaire* : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

- $\forall r \geq 0, \forall (x, a) \in \mathbb{R}^2$,

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r$$

Remarque. Dans l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue, une des deux inégalités est en fait une égalité :

- celle de droite lorsque x et y sont de même signe.
- celle de gauche lorsque x et y sont de signes opposés.

De l'inégalité de droite (la plus couramment utilisée) découle facilement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

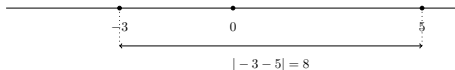
Avec égalité si et seulement si tous les x_k ont même signe.

Distance sur la droite réelle

Définition

La distance entre 2 réels x et y est le réel positif $|x - y|$.

Exemple.



Propriété

La distance entre deux réels satisfait les propriétés suivantes :

- $|x - y| = 0 \iff x = y$
- $|x - y| = |y - x|$
- $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ (inégalité triangulaire).

Partie entière d'un réel

Proposition-Définition

Soit x un réel. La partie entière de x , notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Autrement dit, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Démonstration. (Esquisse) L'existence de la partie entière découle de l'existence d'une borne supérieure pour une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée (voir plus loin). La partie entière $\lfloor x \rfloor$ de x est la borne supérieure de $\mathbb{Z} \cap]-\infty; x]$. Et il s'avère que pour une partie de $\mathbb{Z}$ une borne supérieure est toujours un maximum. ■

Exemples.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$ alors $\{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor = n\} = [n, n + 1[$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ (c'est la partie fractionnaire de x , notée souvent $\{x\}$).

Exercice. Montrer que tous réels x, y , on a :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Résolution. Puisque $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$ et que $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x + y$, on a la première inégalité $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

D'autre part par définition : $\lfloor x + y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Et donc $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Mais puisque les deux membres de cette inégalité sont des entiers, on en déduit la deuxième inégalité $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice. Notons $\tau(k)$ le nombre de diviseurs positifs de l'entier k .
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

Résolution. Indication : Remarquer que :

- pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le nombre de diviseurs de k est : $\tau(k) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d|k}} 1$, et
- $\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ d|k}} 1$ est le nombre de multiples de d dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ au nombre de $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$.

Notons pour deux entiers d, k : $D(d, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \mid k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \tau(k) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d|k}} 1 = \sum_{k=1}^n \sum_{d=1}^n D(d, k) = \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^n D(d, k) \\ &= \sum_{d=1}^n \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ d|k}} 1 = \sum_{d=1}^n \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Partie majorée, minorée, bornée, maximum, minimum

Définition

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- $\mathcal{A}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{A}, x \leq M$. Un tel réel M est appelé un majorant de $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{A}, x \geq m$. Un tel réel m est appelé un minorant de $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée. Cela équivaut à :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{A}, |x| \leq M$$
- Un majorant de $\mathcal{A}$ qui est aussi élément de $\mathcal{A}$ est maximum de $\mathcal{A}$.
- Un minorant de $\mathcal{A}$ qui est aussi élément de $\mathcal{A}$ est minimum de $\mathcal{A}$.

Lorsqu'il existe, un minimum/maximum est unique

Remarque. Lorsqu'il existe un minimum est unique :

En effet soient m_1, m_2 deux minimums de $\mathcal{A}$:

$(m_2 \in \mathcal{A} \implies m_1 \leq m_2)$ et $(m_1 \in \mathcal{A} \implies m_2 \leq m_1)$; donc $m_1 = m_2$.

Ainsi on parle du minimum ou *plus petit élément*.

De même le maximum lorsqu'il existe est unique, et on parle du maximum ou *plus grand élément*.

Axiome de la borne supérieure/inférieure

Proposition-Définition

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de $\mathcal{A}$, notée $\sup \mathcal{A}$, est le plus petit majorant de $\mathcal{A}$.

L'existence d'une borne supérieure pour une partie majorée est une caractéristique fondamentale du corps des réels (que nous admettons avec sa construction) : l'ensemble des majorants de A admet un minimum.

On définit de manière semblable la borne inférieure d'un ensemble non vide minoré :

Proposition-Définition

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. La borne inférieure de $\mathcal{A}$, notée $\inf \mathcal{A}$, est le plus grand minorant de $\mathcal{A}$.

Remarque. Si $\mathcal{A}$ admet un plus grand élément alors $\sup \mathcal{A} = \max \mathcal{A} =$ **le plus grand élément**.

Exemple. Où il n'y a pas de plus grand élément : $[0, 1[$; $\left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Remarque. Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

• $\mathcal{A}$ est majoré ?

- Si NON : $\mathcal{A}$ n'est pas majoré ; $\mathcal{A}$ n'a ni maximum, ni borne supérieure.
- Si OUI : $\mathcal{A}$ est majoré ; $\mathcal{A}$ admet une infinité de majorants et une unique borne supérieure notée $\sup \mathcal{A}$. Dans ce cas :
 - $\sup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$?
 - Si OUI : $\mathcal{A}$ admet aussi un maximum et $\max \mathcal{A} = \sup \mathcal{A}$.
 - Si NON : $\mathcal{A}$ n'admet pas de maximum.

• $\mathcal{A}$ est minoré ?

- Si NON : $\mathcal{A}$ n'est pas minoré ; $\mathcal{A}$ n'a ni minimum, ni borne inférieure.
- Si OUI : $\mathcal{A}$ est minoré ; $\mathcal{A}$ admet une infinité de minorants et une unique borne inférieure notée $\inf \mathcal{A}$. Dans ce cas :
 - $\inf \mathcal{A} \in \mathcal{A}$?
 - Si OUI : $\mathcal{A}$ admet aussi un minimum et $\min \mathcal{A} = \inf \mathcal{A}$.
 - Si NON : $\mathcal{A}$ n'admet pas de minimum.

Puisque la borne supérieure de $\mathcal{A}$ est le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$, majorer la borne supérieure revient à majorer tous les éléments de $\mathcal{A}$; c'est la propriété utile suivante :

Propriété

Soit $s \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{A}$ est majorée alors :

$$\sup \mathcal{A} \leq s \iff \forall a \in \mathcal{A}, a \leq s.$$

On a la caractérisation suivante de la borne supérieure/inférieure ; c'est une simple reformulation "en epsilon" de la définition, mais elle permet d'établir un lien avec la convergence de suite.

Théorème

Caractérisation de la borne supérieure/inférieure

$$a = \sup \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathcal{A}, & x \leq a \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in \mathcal{A}, \quad x > a - \varepsilon \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(i.e. } a \text{ est majorant de } \mathcal{A}) \\ \text{(i.e. } a - \varepsilon \text{ n'est pas majorant de } \mathcal{A}) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathcal{A}, & x \leq a \\ \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, & a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \end{cases}$$

$$b = \inf \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathcal{A}, & x \geq b \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in \mathcal{A}, \quad x < b + \varepsilon \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(i.e. } b \text{ est minorant de } \mathcal{A}) \\ \text{(i.e. } b + \varepsilon \text{ n'est pas minorant de } \mathcal{A}) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathcal{A}, & x \geq b \\ \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, & b = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \end{cases}$$

Cette caractérisation est très utile pour déterminer la borne sup/ inf.

Exercice. Soit $\mathcal{A} = \left\{ \frac{n}{2n+1} ; n \in \mathbb{N} \right\}$; déterminer, s'ils existent, $\sup \mathcal{A}$, $\inf \mathcal{A}$, $\max \mathcal{A}$ et $\min \mathcal{A}$.

Résolution. On a $\forall x \in \mathcal{A}, x \geq 0$ et $0 \in \mathcal{A}$. Donc $\min \mathcal{A} = \inf \mathcal{A} = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}$ et la suite $u_n = \frac{n}{2n+1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ a pour limite $\frac{1}{2}$. Donc $\sup \mathcal{A} = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{A}$ n'a pas de plus grand élément.

Exercice. Montrer que toute partie de $\mathbb{R}$ majorée et incluse dans $\mathbb{Z}$ admet un maximum.

En déduire une preuve de l'existence de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ pour chaque réel x .

Résolution. Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ une partie de $\mathbb{R}$ majorée; d'après l'axiome de la borne supérieure, elle admet une borne supérieure M . Il existe donc une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ qui converge vers M ; mais une suite d'entiers (a_n) qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang : donc $M \in \mathcal{A}$, ou autrement dit $M = \max(\mathcal{A})$.

Pour l'existence d'une borne supérieure de $x \in \mathbb{R}$ quelconque, il s'agit de montrer l'existence de $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. Soit $\mathcal{A} =]-\infty, x] \cap \mathbb{Z}$; c'est une partie majorée de $\mathbb{R}$, incluse dans $\mathbb{Z}$, et non vide (car $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré) elle admet donc un maximum : un entier n tel que $n \leq x$. De plus $x < n+1$, car $n+1 \notin \mathcal{A}$; d'où l'existence. Pour l'unicité, si $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n_1 \leq x < n_1+1$ et $n_2 \leq x < n_2+1$, par soustraction, $n_1 - n_2 - 1 < 0 < n_1 - n_2 + 1$ et donc $n_2 - n_1$ est un entier dans $] -1, 1[$; ainsi $n_2 - n_1 = 0 \implies n_1 = n_2$. CQFD.

Suites numériques - Définitions

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition

- Une suite de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$ est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{K}$; on peut la noter $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_n$ ou plus simplement (u_n) ; u_n désigne le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite, c'est un élément de $\mathbb{K}$.
- L'ensemble des suites sur $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on définit les lois de compositions internes et externes suivantes :

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$$

$$(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$$

$$\lambda \cdot (u_n) = (\lambda \cdot u_n)$$

Remarque. On peut définir aussi une suite indexée par n'importe quelle partie infinie de $\mathbb{N}$; le plus souvent $\mathbb{N}^*$. Tous les résultats seront énoncés pour des suites indexées par $\mathbb{N}$ mais restent valables en toute généralité.

Définition

(Suites extraites)

Soit (u_n) une suite pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, la suite $(u_{\varphi(n)})$ est appelée suite extraite de (u_n) .

Suite convergente

Définition

Une suite (u_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit alors que la suite est convergente et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$.

Remarques.

- En langage courant : pour tout voisinage V de ℓ , il existe un rang à partir duquel $u_n \in V$.
- L'utilisation dans la définition d'inégalité large ou stricte est équivalente sauf pour $\forall \varepsilon > 0$ qui ne peut pas être changé en $\forall \varepsilon \geq 0$ (autrement on ne considérerait que les suites stationnaires à partir d'un certain rang).
- Lorsque $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, en posant $a_n = \operatorname{Re}(u_n)$ et $b_n = \operatorname{Im}(u_n)$, $u_n = a_n + ib_n$ et (u_n) converge vers $\ell = a + ib$ ssi (a_n) converge vers $a = \operatorname{Re}(\ell)$ et (b_n) converge vers $b = \operatorname{Im}(\ell)$.

Suite divergente

Définition

Une suite est dite divergente lorsqu'elle n'est pas convergente.
Avec des quantificateurs la divergence d'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Cette écriture est équivalente à l'existence d'une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ telle que $\forall n, |u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon$.

Remarque. On retiendra qu'une écriture de la forme « $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \mathcal{P}(n)$ » permet de construire une suite $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\varphi(n))$ est vraie.

Suite réelle divergeant vers $\pm\infty$

Dans le cas d'une suite réelle ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), on définit aussi la divergence vers $+\infty$ et $-\infty$:

Définition

Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq A$$

et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.

Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \leq -A$$

et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$.

Remarque. Rappelons qu'une limite est unique !

Et que toute suite convergente est bornée !

Si une suite admet une limite ℓ , il en est de même de toutes ses suites extraites :

Propriété

Si (u_n) a pour limite ℓ (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites ont aussi pour limite ℓ .

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition ; si à partir d'un certain rang N_0 , $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ (resp. $u_n \geq A$, $u_n \leq -A$), alors à partir du rang $N_1 = \min(\varphi^{-1}([N_0, +\infty[))$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$ (resp. $u_{\varphi(n)} \geq A$, $u_{\varphi(n)} \leq -A$). ■

La réciproque partielle suivante est très souvent utile, que ce soit pour montrer la convergence ou la divergence de la suite.

Propriété

La suite (u_n) a pour limite ℓ si et seulement si ses suites extraites des termes de rangs pairs (u_{2n}) et impairs (u_{2n+1}) ont toutes deux pour limite ℓ (fini ou infini).

Démonstration. Le sens direct découle de la propriété précédente. Pour la réciproque on applique aussi la définition ; si :

$$\forall n \geq N_0, |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \quad (\text{resp. } u_{2n} \geq A, u_{2n} \leq -A)$$

$$\forall n \geq N_1, |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon \quad (\text{resp. } u_{2n+1} \geq A, u_{2n+1} \leq -A)$$

alors en posant $N = \max(2N_0, 2N_1 + 1)$:

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon \quad (\text{resp. } u_n \geq A, u_n \leq -A)$$



Exemples.

- La suite $u_n = (-1)^n$ n'a aucune limite ; en effet $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.
- La suite $v_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a pour limite $\frac{1}{2}$; en effet : $v_{2n} = \frac{n}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ et $v_{2n+1} = \frac{n}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Exercice. Vrai ou Faux ?

1. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \forall n, u_n > \ell) \implies (u_n \text{ décroissante à partir d'un certain rang})$
2. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \ell > 1) \implies (u_n > 1 \text{ à partir d'un certain rang})$
3. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \forall n, u_n \neq \ell) \implies (u_n \text{ prend un nombre infini de valeurs distinctes})$
4. $u_n \in \mathbb{Z} \text{ et } (u_n) \text{ converge} \implies (u_n) \text{ est stationnaire à partir d'un certain rang.}$

Résolution.

(1) Faux ; par exemple :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

tend vers 0 en restant strictement positive et :

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)^2} < 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - n - 2}{n^2(n+2)} > 0 & \text{si } n \text{ impair et } n > 2 \end{cases}$$

Exercice. Vrai ou Faux ?

1. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \forall n, u_n > \ell) \implies (u_n \text{ décroissante à partir d'un certain rang})$
2. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \ell > 1) \implies (u_n > 1 \text{ à partir d'un certain rang})$
3. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \forall n, u_n \neq \ell) \implies (u_n \text{ prend un nombre infini de valeurs distinctes})$
4. $u_n \in \mathbb{Z} \text{ et } (u_n) \text{ converge} \implies (u_n) \text{ est stationnaire à partir d'un certain rang.}$

(2) Vrai : $(u_n - 1)_n$ tend vers $\ell - 1 > 0$ donc à partir d'un certain rang, $u_n - 1 > 0$. En effet en prenant $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$, il existe un rang N , pour lequel :

$$n \geq N \implies |u_n - 1 - \ell + 1| \leq \frac{\ell - 1}{2} \implies u_n - 1 \geq \frac{\ell - 1}{2} \implies u_n \geq 1 + \frac{\ell - 1}{2} > 1$$

Exercice. Vrai ou Faux ?

1. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \forall n, u_n > \ell) \implies (u_n \text{ décroissante à partir d'un certain rang})$
2. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \ell > 1) \implies (u_n > 1 \text{ à partir d'un certain rang})$
3. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \forall n, u_n \neq \ell) \implies (u_n \text{ prend un nombre infini de valeurs distinctes})$
4. $u_n \in \mathbb{Z} \text{ et } (u_n) \text{ converge} \implies (u_n) \text{ est stationnaire à partir d'un certain rang.}$

(3) Vrai : supposons que (u_n) ne prenne qu'un nombre fini de valeurs $v_1, v_2, \dots, v_p$ et converge vers $\ell \neq v_i$. Posons $\varepsilon = \frac{\min_i |\ell - v_i|}{2} > 0$; à partir d'un certains rang $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n \geq N &\implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon \implies \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |u_n - \ell| \leq \frac{|\ell - v_i|}{2} \\ &\implies \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_n \neq v_i \end{aligned}$$

Exercice. Vrai ou Faux ?

1. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \forall n, u_n > \ell) \implies (u_n \text{ décroissante à partir d'un certain rang})$
2. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \ell > 1) \implies (u_n > 1 \text{ à partir d'un certain rang})$
3. $(u_n \rightarrow \ell \text{ et } \forall n, u_n \neq \ell) \implies (u_n \text{ prend un nombre infini de valeurs distinctes})$
4. $u_n \in \mathbb{Z} \text{ et } (u_n) \text{ converge} \implies (u_n) \text{ est stationnaire à partir d'un certain rang.}$

(4) Vrai : Soit $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$;

à partir d'un certain $N \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\ell - \frac{1}{3}; \ell + \frac{1}{3}]$ qui est un intervalle d'amplitude $\frac{2}{3} < 1$;

un tel intervalle ne peut contenir qu'au plus un entier ; (u_n) sera donc à partir du rang N stationnaire égale à cet entier

(et par unicité de la limite cet entier est nécessairement ℓ).

Partie dense de $\mathbb{R}$

Définition

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Théorème

$\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathcal{A}, |x - a| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow$ pour tous $x < y$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $x < a < y$.

Démonstration. La première équivalence découle de la définition ; la deuxième se déduit de la première : soit $x' = \frac{x+y}{2} \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \frac{y-x}{3} > 0$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $|x' - a| \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $x < \frac{5x+y}{6} = \frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{3} \leq a \leq \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{3} = \frac{x+5y}{6} < y$. ■

Exercice. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Résolution. Soit $x \in \mathbb{R}$; la suite $\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n \geq 1}$ est une suite de rationnels qui tend vers x . En effet :

$$\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \implies nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx \xrightarrow{x \cdot \frac{1}{n} > 0} x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

et on conclut avec le théorème des gendarmes (cf. plus loin.)

Limites et ordre

Dans cette partie toutes les suites sont réelles.

Propriété

Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}_+^ \cup \{+\infty\}$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$.*

Démonstration. (Esquisse) Si $\ell = +\infty$, le résultat découle immédiatement de la définition ; sinon, il en découle aussi mais en prenant $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$. ■

Ce résultat admet une réciproque :

Propriété

Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si à partir d'un certain rang $u_n \geq 0$, alors $\ell \geq 0$.

Démonstration. (Esquisse) Par l'absurde : si $\ell < 0$ en appliquant la définition avec $\varepsilon = -\frac{\ell}{2} > 0$ on contredira le fait qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$. ■

Remarque. Attention le résultat devient faux avec des inégalités strictes : $u_n > 0$ n'implique pas $\ell > 0$ (mais $\ell \geq 0$ bien sur) ; contre-exemple : $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Corollaire

Si (u_n) et (v_n) convergent, et si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété précédente à la suite $(v_n - u_n)$ en admettant (pour l'instant) que $\lim v_n - u_n = \lim v_n - \lim u_n$. ■

On dispose aussi du très utile théorème des gendarmes et de sa variante pour les limites infinies.

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ alors :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$

Démonstration. Découle immédiatement de la définition. ■

Théorème

(Théorème des gendarmes)

Soient $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles qu'à partir d'un certain rang :
 $u_n \leq v_n \leq w_n.$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge aussi vers ℓ .

Démonstration. Soit N_0 tel que $\forall n \geq N_0, u_n \leq v_n \leq w_n$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leq u_n \\ n \geq N_2 &\implies |w_n - \ell| \leq \varepsilon \implies w_n \leq \ell + \varepsilon \end{aligned}$$

En posant $N = \min(N_0, N_1, N_2)$,

$$n \geq N \implies \ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

■

Souvent il est suffisant de faire appel au cas particulier suivant :

Théorème

Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 est une suite qui tend vers 0.

Opérations sur les limites

Les opérations usuelles sur les suites : somme, produit, quotient, puissance, se comportent assez bien avec leurs limites : en étendant naturellement ces opérations sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (pour les suites réelles), les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ou d'une puissance de suites sont (respectivement) les somme, produit, quotient ou puissance de leurs limites (s'il en est), à l'exception notable des formes indéterminées suivantes :

Formes indéterminées :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{somme} & & \text{produit} & & \text{quotient} & & \text{puissance} \\ \underbrace{\infty - \infty} & ; & \underbrace{0 \times \infty} & ; & \underbrace{\frac{\infty}{\infty} ; \frac{0}{0} ; \frac{\ell}{0}} & ; & \underbrace{1^{\infty} ; 0^0 ; \infty^0} \end{array}$$

Pour le calcul de limite on utilise aussi le **théorème de composition des limites** :

Théorème

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = L \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$$

Démonstration. Découle des définitions des limites d'une suite ou fonction. Dans le cas de suites ou fonctions réelles, plusieurs cas sont à considérer selon que la limite soit finie ou non.

On utilise aussi les limites de références :

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \end{array}$$

et la croissance comparée de $\exp$, $\ln$ et puissances :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0^+ & ; & & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= 0^- \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} &= +\infty & ; & & \lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp x &= 0^- . \end{aligned}$$

Plus généralement, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} &= 0^+ & ; & & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha &= 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} &= +\infty & ; & & \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} &= 0^+ . \end{aligned}$$

Croissance comparée des suites factorielles, géométrique et puissance :

Croissance comparée de $n!$, q^n et n^α .

- Pour tout $q > 0$:

$$\lim \frac{n!}{q^n} = +\infty$$

- Pour tout $q > 1$:

$$\lim \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$$

Exercice. Déterminer la limite des suites suivantes :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; \quad v_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} ; \quad w_n = 2^n \left(n^{\frac{1}{n!}} - 1\right)$$

Résolution.

$$u_n = \exp \left(\underbrace{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}_{\rightarrow 1} \right) \rightarrow \exp(1) = e$$

$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt{n^2 - n + 1} \times \left(\sqrt{\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}} - 1 \right) = \sqrt{n^2 - n + 1} \times \left(\sqrt{1 - \frac{2n}{n^2 - n + 1}} - 1 \right) \\ &= \underbrace{\frac{2n}{\sqrt{n^2 - n + 1}}}_{\rightarrow 2} \times \underbrace{\left(\sqrt{1 - \frac{2n}{n^2 - n + 1}} - 1 \right) \times \frac{n^2 - n + 1}{2n}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

ou à l'aide du radical conjugué :

$$v_n = \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2n}{n \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned}w_n &= 2^n \times \left(\exp\left(\frac{\ln(n)}{n!}\right) - 1 \right) = \frac{2^n \ln(n)}{n!} \times \left(\exp\left(\frac{\ln(n)}{n!}\right) - 1 \right) \times \frac{n!}{\ln(n)} \\&= 2 \times \underbrace{\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\left(\exp\left(\frac{\ln(n)}{n!}\right) - 1 \right) \times \frac{n!}{\ln(n)}}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0\end{aligned}$$

Cas réel : suite monotone ; théorèmes de convergence

Etant donnée une suite, on ne sait pas toujours si sa limite existe mais quand la suite est monotone, on a le résultat important suivant :

Théorème

(Théorème de la limite monotone)

Soit (u_n) une suite réelle croissante

Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers $\sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Si (u_n) n'est pas majorée, alors $u_n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. (Esquisse) Lorsque (u_n) est majorée, la caractérisation de la borne supérieure et la croissance de (u_n) montrent que (u_n) converge vers $\sup u_n$; lorsque (u_n) n'est pas majorée, la croissance de (u_n) montre à l'aide de la définition que $\lim u_n = +\infty$. ■

Remarque. Le théorème se décline aussi pour une suite décroissante : (u_n) est décroissante ssi $(-u_n)$ est croissante, (u_n) est minorée ssi $(-u_n)$ est majorée et $\inf u_n = -\sup(-u_n)$.

Exercice.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ notée u_n .
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Résolution.

(1) Si $n = 0$, l'équation devient $x^2 + 2x = 0$ qui a 0 pour unique solution dans $\mathbb{R}^+$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x) = x^n + x^2 + 2x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et a pour dérivée $f'_n(x) = nx^{n-1} + 2x + 2 > 0$ sur $\mathbb{R}_+$; puisque $f_n(0) = -1 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et par stricte monotonie de f_n sur $\mathbb{R}_+$, l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ notée u_n .

(2) $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} + 1 - 1 > 0$; ainsi par le même argument $u_n < \frac{1}{2}$.

On a $f_n(u_n) = 0$ et :

$$f_n(u_{n+1}) = \underbrace{f_{n+1}(u_{n+1}) - u_{n+1}^{n+1}}_{=0} + u_{n+1}^n = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} \geq 0$$

puisque $u_{n+1} \in [0; 1[$. Ainsi :

$$f_n(u_{n+1}) \geq f_n(u_n) \xrightarrow{f_n \nearrow} u_{n+1} \geq u_n$$

La suite (u_n) est croissante, et majorée par $\frac{1}{2}$.

(3) Elle converge donc vers ℓ ; par passage à la limite dans :

$$u_n^n + u_n^2 + 2u_n - 1 = 0$$

puisque $0 \leq u_n < \frac{1}{2}$, d'après le théorème des gendarmes : $\lim u_n^n = 0$, et donc :

$$\ell^2 + 2\ell - 1 = 0 \implies \ell = 1 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{\ell \geq 0} \ell = 1 + \sqrt{2}.$$

Ainsi la suite (u_n) converge vers $1 + \sqrt{2}$.

Suites adjacentes

Définition

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{array} \right.$$

Le résultat fondamental des suites adjacentes est le suivant :

Théorème

Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Démonstration. En effet, $(v_n - u_n)$ est décroissante et tend vers 0, donc $v_n - u_n \geq 0 \implies v_n \geq u_n$; on en déduit que (u_n) est (croissante et) majorée par v_0 , et que (v_n) est (décroissante et) minorée par u_0 ; elles sont donc toutes deux convergentes ; or par différence des limites, $\lim v_n - \lim u_n = 0$; elles ont donc même limite.

Exercice.

Étudier $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ et prouver que $\lim u_n \notin \mathbb{Q}$.

Résolution. La suite (u_n) est strictement croissante ; la suite (v_n) est strictement décroissante, en effet :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

et $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \rightarrow 0$; les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes ; elles convergent donc vers la même limite, que nous noterons e . Montrons par l'absurde que $e \notin \mathbb{Q}$: autrement, $e = \frac{p}{q}$, on aurait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 < \frac{p}{q} - u_n < \frac{1}{n \cdot n!}$$

donc en particulier pour $n = q$: $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{q \cdot q!} \implies 0 < p \cdot q! - q \cdot q! \cdot u_q < 1$

Mais c'est absurde puisque $p \cdot q! - q \cdot q! \cdot u_q$ est un entier.

Relations de comparaison

Définition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- (u_n) est *négligeable devant* (v_n) si il existe $\varepsilon_n \rightarrow 0$ telle que $u_n = v_n \times \varepsilon_n$ pour n assez grand ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

on note : $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ ou $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ ou plus simplement $u_n = o(v_n)$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$, alors $u_n = o(v_n) \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Définition

- (u_n) est dominée devant (v_n) si il existe (M_n) bornée telle que $u_n = v_n \times M_n$ pour n assez grand ou encore :

$$\exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq M \times |v_n|$$

on note : $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ ou $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ ou plus simplement $u_n = O(v_n)$.

Définition

1. (u_n) et (v_n) sont équivalentes si

$$u_n - v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)$$

(ou encore $= o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$) on note : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

C'est équivalent à : il existe $\varepsilon_n \rightarrow 0$ telle que $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ pour n assez grand, soit $u_n = v_n + o(v_n)$.

Si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$, alors $u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Remarques.

- Être négligeable est une relation :
 - transitive : si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.

La croissance comparée s'écrit :

- Soient $q > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$:

$$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \quad n^\beta = o(q^n), \quad q^n = o(n!)$$

- Être dominée est une relation :
 - transitive : si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$,
 - réflexive : $u_n = O(u_n)$.
- Être équivalent est une relation :
 - transitive : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$,
 - réflexive : $u_n \sim u_n$.
 - symétrique : $u_n \sim v_n$ ssi $v_n \sim u_n$.

C'est ce qu'on appelle une relation d'équivalence.

Le résultat fondamental est :

Théorème

$$\left. \begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ \text{et} \\ \lim v_n = L \end{array} \right\} \implies \lim u_n = L$$

Démonstration. (Esquisse) Découle immédiatement par produit des limites, avec $u_n = v_n (1 + \varepsilon_n)$ et $\varepsilon_n \rightarrow 0$. ■

Pour le calcul d'équivalents on peut appliquer les propriétés suivantes :

Propriété

- Si (u_n) converge vers $\ell \neq 0$ alors :

$$u_n \sim \ell$$

- Multiplication par $\lambda \neq 0$:

$$\forall \lambda \neq 0, u_n \sim v_n \implies (\lambda \cdot u_n) \sim (\lambda \cdot v_n)$$

- Inverse :

$$u_n \sim v_n \implies \left(\frac{1}{u_n}\right) \sim \left(\frac{1}{v_n}\right)$$

- Puissance :

$$u_n \sim v_n \implies \forall p \in \mathbb{Z}, u_n^p \sim v_n^p$$

Si de plus (u_n) et (v_n) sont strictement positives à partir d'un certain rang :

$$u_n \sim v_n \implies \forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

- *Valeur absolue (ou module) :*

$$u_n \sim v_n \implies |u_n| \sim |v_n|$$

- *Produit :*

$$\left. \begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array} \right\} \implies u_n u'_n \sim v_n v'_n$$

- *Quotient : si (u'_n) et (v'_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.*

$$\left. \begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array} \right\} \implies \left(\frac{u_n}{u'_n} \right) \sim \left(\frac{v_n}{v'_n} \right)$$

Démonstration. (Esquisse) Découlent facilement de la définition par composition, produit et quotient des limites. ■

Remarques.

- Rappelons que si $u_n = f(n)$ admet un développement limité (généralisé) au voisinage de $+\infty$, alors le première terme non-nul du DL donne un équivalent simple de u_n .
- Attention :
 - On ne peut pas additionner des équivalents :

$$\left. \begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array} \right\} \text{ n'entraîne pas en général que } (u_n + u'_n) \sim (v_n + v'_n)$$

Contre-exemple :

$$u_n = (n + \sqrt{n}) \sim n \quad v_n = (1 - n) \sim (1 - n) \quad u_n + v_n = (1 + \sqrt{n}) \not\sim 1$$

- On ne peut pas composer des équivalents par une fonction :
- Si (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans le domaine de définition d'une fonction f ,

$$u_n \sim v_n \text{ n'entraîne pas en général que } f(u_n) \sim f(v_n)$$

Contre-exemple :

$$(n+1) \sim n \quad \exp(n+1) \not\sim \exp(n) \quad \text{car } \frac{e^{n+1}}{e^n} = e \longrightarrow e \neq 1$$

On a cependant les résultats partiels quant à la composition par exp ou ln, qu'il est bon de connaître :

- $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff \lim u_n - v_n = 0$.
- si $u_n \sim v_n$ et sont > 0 alors $v_n \longrightarrow \ell \neq 1 \implies \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Démonstration. $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \longrightarrow 1 \iff e^{u_n - v_n} \longrightarrow 1 \iff_{\ln \circ} u_n - v_n \longrightarrow 0$.

$u_n \sim v_n \implies \ln(u_n) = \ln(v_n + o(v_n)) = \ln(v_n) + \ln(1 + \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \longrightarrow 0$; or $\ln(1 + \varepsilon_n) \longrightarrow 0$
donc si $v_n \longrightarrow \ell \neq 1$ alors $\ln(v_n) \longrightarrow L \neq 0$ et donc $\ln(1 + \varepsilon_n) = o(\ln(v_n))$; ainsi
 $\ln(u_n) = \ln(v_n) + o(\ln(v_n))$, c'est à dire $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$. ■

On utilise aussi beaucoup les équivalents usuels suivants :

Propriété

Soit (u_n) une suite convergeant vers 0 :

$$\begin{array}{lll} \sin(u_n) \sim u_n & \tan(u_n) \sim u_n & 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2} \\ \ln(1 + u_n) \sim u_n & e^{u_n} - 1 \sim u_n & \\ \sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2} & \forall \alpha > 0, & (1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \end{array}$$

Démonstration. (Esquisse) Tous découlent de la définition et des limites usuelles (cf. page 9). ■

Exercice. Calculer un équivalent simple de :

$$u_n = n^2 \sqrt{n} - n^3 \sqrt[3]{n} + \frac{1}{n^2} ; v_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \times \left(\sqrt{n^2 - 1} - n\right) ; w_n = \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{\tan \frac{(-1)^n}{n^2}}$$

Résolution.

$$u_n = n^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{10}{3}} + n^{-2} = -n^{\frac{10}{3}} \times \underbrace{\left(1 - n^{-\frac{5}{6}} - n^{-\frac{16}{3}}\right)}_{\rightarrow 1} \sim -n^{\frac{10}{3}} \sim -n^3 \sqrt[3]{n}$$

$$v_n \sim \frac{1}{n} \times \left(n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - n\right) \sim \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$$

$$w_n = \frac{\sqrt{1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{\tan \frac{(-1)^n}{n^2}} \sim \frac{1}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{(-1)^n}{n^2}} \sim \frac{1}{2} \times \frac{-\frac{1}{2n^2}}{\frac{(-1)^n}{n^2}} \sim -\frac{(-1)^n}{4}$$

Concernant la relation "être dominé", le résultat suivant est utile pour les séries :

Propriété

Si à partir d'un certain rang u_n et v_n sont > 0 et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors $u_n = O(v_n)$.

Démonstration. Supposons les hypothèses vérifiées à partir du rang n_0 ; alors pour tout $n > n_0$, par télescopage :

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_n}{v_{n_0}}$$

ainsi pour tout $n \geq n_0 + 1$, $|u_n| = u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \cdot v_n = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \cdot |v_n|$. ■

Étudions une suite définie implicitement :

Exercice. (CCP 2018).

On pose $P_n(x) = -4 + \sum_{k=1}^n x^k$.

1. Montrer que P_n admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera x_n .
2. Calculer x_1, x_2 et montrer que $x_5 < 1$.
Étudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire la monotonie de $(x_n)_{n \geq 1}$.
Montrer que la suite converge, on note ℓ sa limite.
3. Montrer que $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$ puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{n+1} = 0$. En déduire ℓ .
4. On pose $\delta_n = x_n - \ell$. Exprimer δ_n et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\delta_n = 0$.
5. Trouver un équivalent en $+\infty$ de δ_n .

Résolution.

(1) P_n est dérivable de dérivée $P'_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ qui reste > 0 sur $\mathbb{R}_+^*$; de plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} P_n(x) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$; d'après le T.V.I. et par injectivité, P_n admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) x_1 vérifie $-4 + x_1 = 0 \implies x_1 = 4$; x_2 vérifie $x_2 > 0$ et $-4 + x_2 + x_2^2 = 0 \implies x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. Quant à x_5 , $P_5(1) = -4 + 5 = 1 > 0$, ainsi $x_5 < 1$.

On a $P_n(x_n) = 0$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1} > P_n(x)$; ainsi $P_{n+1}(x_n) > 0$.

Puisque P_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, on en déduit que $x_{n+1} < x_n$ et donc que la suite (x_n) est strictement décroissante. Puisque la suite est minorée (par 0), elle converge vers une limite que l'on notera $\ell \in \mathbb{R}_+$.

(3) On a $P_n(x_n) = 0 = -4 + \sum_{k=1}^n x_n^k = -4 + x_n \times \frac{1 - x_n^n}{1 - x_n}$ (à partir du rang $n = 5$, puisque $x_5 < 1$ et (x_n) décroissante). On en déduit $x_n - x_n^{n+1} - 4 + 4x_n = 0$, soit $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$.

Puisque pour $n > 5$: $0 < x_n < x_5 < 1$ on a $0 < x_n^{n+1} < x_5^{n+1}$ et d'après le théorème des gendarmes $\lim x_n^{n+1} = 0$.

Par passage à la limite dans la relation $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$, on obtient $-5\ell + 4 = 0$ et donc $\ell = \frac{4}{5}$.

(4) Soit $\delta_n = x_n - \ell \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$; ainsi $(\delta_n + \ell)^{n+1} - 5(\delta_n + \ell) + 4 = (\delta_n + \ell)^{n+1} - 5\delta_n = 0$.
Ainsi $\delta_n = \frac{1}{5}(\delta_n + \ell) \times (\delta_n + \ell)^n$. Soit $q \in]\ell; 1[$; puisque $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$, pour n suffisamment grand, $\ell < \delta_n + \ell \leq q < 1$, donc $\delta_n = O(q^n)$. Par croissance comparée $n\delta_n = O(nq^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(5) On a :

$$\begin{aligned} 5\delta_n &= (\delta_n + \ell)^{n+1} = \ell^{n+1} \times \left(1 + \frac{\delta_n}{\ell}\right)^{n+1} \\ &= \ell^{n+1} \times \exp\left((n+1) \ln\left(1 + \frac{\delta_n}{\ell}\right)\right) \end{aligned}$$

or $(n+1) \ln\left(1 + \frac{\delta_n}{\ell}\right) \sim n \times \frac{\delta_n}{\ell} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après (4), donc

$$\begin{aligned} 5\delta_n &\sim \ell^{n+1} \\ \implies \delta_n &\sim \frac{1}{5} \ell^{n+1} \sim \frac{4^{n+1}}{5^{n+2}} \end{aligned}$$

Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé la raison de (u_n) .

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$

Propriété

- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$
- *Plus généralement : soit*
 $a, b \in \mathbb{N}, a \leq b, \sum_{k=a}^b u_k = (b-a+1) \times \frac{u_a + u_b}{2}$
(= Nombre de termes $\times$ moyenne des premier et dernier termes.)

Démonstration. (Esquisse) Tous ces points s'obtiennent facilement par récurrence ; pour le 2ème et 3ème, une preuve plus astucieuse est : soit $S = \sum_{k=a}^b u_k$:

$$\begin{aligned}
 2S &= (u_0 + ar) + (u_0 + (a+1)r) + \dots + (u_0 + (b-1)r) + (u_0 + br) \\
 &\quad + \underbrace{(u_0 + br) + (u_0 + (b-1)r) + \dots + (u_0 + (a+1)r) + (u_0 + ar)}_{(b-a+1) \text{ termes sur chaque ligne, somme constante sur chaque colonne}} \\
 &= (u_0 + ar + u_0 + br) \times (b-a+1) \\
 \implies S &= (b-a+1) \times \frac{u_a + u_b}{2}
 \end{aligned}$$

Exercice. Calculer de deux façons $\sum_{k=11}^{30} (3k + 1)$

Résolution.

Première méthode : par linéarité de la somme

$$\sum_{k=11}^{30} (3k + 1) = 3 \sum_{k=11}^{30} k + \sum_{k=11}^{30} 1 = 3 \times 20 \times \frac{11 + 30}{2} + 20 = 1250$$

Deuxième méthode : somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

$$\sum_{k=11}^{30} (3k + 1) = 20 \times \frac{34 + 91}{2} = 1250$$

Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$; q est appelé la raison de (u_n) .

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q , alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \cdot q^n$
- (u_n) converge ssi $|q| < 1$ ou $q = 1$ ou $u_0 = 0$.
 - si $|q| < 1$, $\lim u_n = 0$,
 - si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, (u_n) est stationnaire.

Propriété

- Si $q \neq 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et plus généralement :

$$\text{si } a, b \in \mathbb{N} \text{ avec } a \leq b, \quad \sum_{k=a}^b u_k = u_a \times \frac{1 - q^{b-a+1}}{1 - q}$$

$$\text{Si } q = 1, \quad \sum_{k=a}^b u_k = u_a \times (b - a + 1).$$

Démonstration. (Esquisse) L'expression de u_n en fonction de n s'établit facilement par récurrence.

La convergence s'établit en étudiant la convergence de $|q|^n$ lorsque $|q| \neq 1$, à l'aide du théorème de la limite monotone (avec $(u_n \rightarrow \ell \implies |u_n| \rightarrow |\ell|)$ et $(\lim u_n = 0 \iff \lim |u_n| = 0)$) ; dans le cas $|q| = 1$, soit $q^n = 1$ soit $q^n = e^{in\theta}$ avec $\theta \notin 0[2\pi]$, et dans ce cas soit $\operatorname{Re}(q^n)$ soit $\operatorname{Im}(q^n)$ diverge.

La somme des termes consécutifs peut s'obtenir soit par récurrence sur n , soit à l'aide de l'identité remarquable $1^{n+1} - q^{n+1} = (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k$. ■

Exercice. Calculer $\sum_{j=1}^n \frac{5 \times 2^j}{3^{2j+1}}$

Résolution. C'est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique $\frac{5 \times 2^j}{3^{2j+1}} = \frac{5}{3} \times \left(\frac{2}{9}\right)^j$ de raison $\frac{2}{9}$ et 1^{er} terme $\frac{5}{3}$, soit : $\sum_{j=1}^n \frac{5 \times 2^j}{3^{2j+1}} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{9} \times$

$$\frac{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^n}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{10}{21} \times \left(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$$

Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe $(a, b) \in (\mathbb{C} \setminus \{1\}) \times \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Pour obtenir l'expression de u_n en fonction de n on applique :

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique, $u_{n+1} = au_n + b$, et soit L le point fixe de la fonction de récurrence (i.e. $aL + b = L$) ; alors en posant $v_n = u_n - L$, la suite (v_n) est géométrique de raison a .

Démonstration. (Esquisse) Une suite stationnaire satisfaisant la même relation de récurrence, sera constante égale à L , point fixe de la fonction de récurrence ; l'existence et l'unicité de L découle de $a \neq 1$. Alors, $v_{n+1} = u_{n+1} - L = au_n + b - (aL + b) = a(u_n - L) = av_n$. ■

Exercice. Déterminer l'expression en fonction de n , nature et limite éventuelle, de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n + 2$.

Résolution. Soit $L \in \mathbb{R}$ tel que $L = 5L + 2 \iff L = -\frac{1}{2}$; $v_n = u_n + \frac{1}{2} = 5^n \times \frac{1}{2} \implies u_n = \frac{5^n - 1}{2}$; la suite diverge vers $+\infty$.

Exercice. Soit $V \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide et borné, vérifiant $\forall x \in V, 3x + 2 \in V$. Montrer que V est un singleton que l'on précisera.

Résolution. Soit $x \in V$ quelconque; considérons la suite définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$; c'est une suite arithmético-géométrique à valeur dans V . Soit L tel que $L = 3L + 2 \iff L = -1$; alors $v_n = u_n + 1$ est géométrique de raison 3, $v_n = (x + 1)3^n \implies u_n = (x + 1)3^n - 1$. Soit $x = -1$ soit (u_n) diverge vers $\pm\infty$; puisque V est borné, nécessairement $x = -1$. Ainsi $V = \{-1\}$.

Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

Définition

Une suite réelle (u_n) est dite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Remarque. Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est uniquement déterminée par la donnée de la relation de récurrence et par deux termes de la suite ; le plus souvent les deux premiers, u_0, u_1 .

Pour obtenir l'expression de u_n en fonction de n on applique :

Théorème

Soient $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On considère l'équation caractéristique associée :

$$r^2 - ar - b = 0 \quad (*)$$

et son discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.

• Si $\Delta > 0$; soient r_1, r_2 les deux solutions réelles distinctes de (EC). Il existe un unique couple de réels (α, β) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \alpha \times r_1^n + \beta \times r_2^n$$

- Si $\Delta < 0$; soient r_1, r_2 les deux solutions complexes conjuguées de (EC). Il existe un unique couple de réels (α, β) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \rho^n \times (\alpha \times \cos(n\theta) + \beta \times \sin(n\theta))$$

où $\rho = |r_1|$ et $\theta \equiv \arg(r_1) [2\pi]$.

- Si $\Delta = 0$; soit r_0 l'unique solution de (EC). Il existe un unique couple de réels (α, β) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (\alpha + \beta \times n) \times r_0^n$$

Démonstration. (Esquisse) On remarque d'abord que par linéarité de la relation de récurrence, si (a_n) et (b_n) sont deux suites satisfaisant la relation de récurrence, toutes leurs combinaisons linéaires $(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$ satisfont aussi la relation de récurrence.

On recherche les suites géométriques (r^n) satisfaisant la relation de récurrence ; il est facile de voir que c'est équivalent à ce que la raison r soit solution de l'équation caractéristique (*).

Si $\Delta > 0$: (*) a deux racines réelles distinctes r_1, r_2 et donc toutes les suites d'expression de la forme $(\alpha \cdot r_1^n + \beta \cdot r_2^n)$ satisfont la même relation de récurrence que (u_n)

il suffit de trouver α et β pour lesquels les deux premiers termes de la suite soient u_0 et u_1 pour avoir l'expression de u_n en fonction de n : cela revient à résoudre un système linéaire de déterminant $r_1 - r_2 \neq 0$; d'où l'existence et l'unicité de α et β .

Si $\Delta = 0$: (*) a une seule racine réelle r_0 . On vérifie que sous cette hypothèse, la suite (nr_0^n) satisfait aussi la relation de récurrence ; toutes les suites d'expression de la forme $(\alpha \cdot r_0^n + \beta \cdot nr_0^n)$ satisfont la même relation de récurrence, et on cherche comme précédemment les α et β qui conviennent ; c'est fois-ci on aboutit à un système linéaire de déterminant $r_0 \neq 0$ puisque $(a, b) \neq 0$.

Si $\Delta < 0$: (*) a deux racines complexes conjuguées r_1, r_2 ; comme dans le cas $\Delta > 0$ on obtient d'uniques α, β tels que $u_n = \alpha \cdot r_1^n + \beta \cdot r_2^n$; seulement α, β, r_1 et r_2 sont des complexes, et on souhaiterait obtenir une expression de u_n avec des coefficients réels.

Puisque u_n est réel et r_1, r_2 sont conjugués, on remarque que α et β sont nécessairement conjugués :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \overline{u_n} = \overline{\alpha \cdot r_1^n + \beta \cdot r_2^n} = \overline{\beta} \cdot \overline{r_2}^n + \overline{\alpha} \cdot \overline{r_1}^n = \overline{\beta} \cdot r_1^n + \overline{\alpha} \cdot r_2^n = \alpha \cdot r_1^n + \beta \cdot r_2^n \implies \beta = \overline{\alpha}$$

Ainsi en posant $\rho = |r_1|$ et $\theta \equiv \arg(r_1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha r_1^n + \beta r_2^n = \alpha \rho^n \times e^{in\theta} + \beta \rho^n \times e^{-in\theta} \\ &= \rho^n (\alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}) = \rho^n \left(\underbrace{\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right)}_{=\alpha} e^{in\theta} + \underbrace{\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)}_{=\beta} e^{-in\theta} \right) \\ &= \rho^n \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \times (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) + \frac{\alpha - \beta}{2} \times (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) \right) \end{aligned}$$

$$= \rho^n \left(\underbrace{\frac{\alpha + \beta}{2}}_{= \operatorname{Re}(\alpha) \in \mathbb{R}} \times 2 \times \cos(n\theta) + \underbrace{\frac{\alpha - \beta}{2}}_{= i \operatorname{Im}(\alpha) \in i\mathbb{R}} \times 2i \times \sin(n\theta) \right)$$

Ainsi en posant : $A = \alpha + \beta \in \mathbb{R}$; $B = (\alpha - \beta) \times i \in \mathbb{R}$; $\rho = |r_1|$ et $\theta \equiv \arg(r_1) [2\pi]$
il existe deux réels A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \rho^n \times (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$. ■

Exercice. Calculer u_n en fonction de n : $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$; puis déterminer sa nature et limite éventuelle.

Résolution. (1) C'est une SRL2 d'équation caractéristique $r^2 = 6r - 9$ ayant pour discriminant $\Delta = 0$ et pour solution $r_0 = 3$. Ainsi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + n\beta)3^n$. Déterminons α et β :

$$\begin{cases} \alpha & = u_0 = 1 \\ 3\alpha + 3\beta & = u_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1 - n)3^n \longrightarrow -\infty$.

Exercice. (CENTRALE 2009)

1. Étudier la suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et
 $\forall n \in \mathbb{N}, 6u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.
2. Que peut-on dire d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
 $\forall (x, y), f(x, y) = f(y, \frac{x+y}{6})$?

Résolution.

(1) C'est une SRL2 ; l'équation caractéristique a pour discriminant $\Delta = 25 > 0$ et pour solutions $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$. Ainsi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \frac{\alpha}{2^n} + (-1)^n \frac{\beta}{3^n}$; dans tous les cas, quels que soient α, β , $\lim u_n = 0$.

(2) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. En posant $u_0 = x$ et $u_1 = y$, on a $f(u_0, u_1) = f(u_1, u_2)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(u_n, u_{n+1}) = f(u_{n+1}, u_{n+2})$$

par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x, y) = f(u_n, u_{n+1})$$

où (u_n) est comme définie en (1). Or d'après (1), $\lim u_n = \lim u_{n+1} = 0$, donc par continuité de f (en $(0,0)$ suffirait), par passage à la limite :

$$f(x, y) = f(0, 0)$$

Et ce quelque soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi f est une fonction constante.

Suites réelles du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$. On s'intéresse aux suites « définies » par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Précisément, cette suite n'est pas toujours bien définie si les termes « sortent » du domaine de définition $\mathcal{D}$ de f . Notons cependant que si a est dans une sous-partie $I \subset \mathcal{D}$ stable par f (i.e. $f(I) \subset I$), alors la suite est bien définie.

Supposons désormais (u_n) bien définie.

Si f est continue et si $u_n \rightarrow \ell \in \mathcal{D}$ alors $f(\ell) = \ell$: une limite $\ell \in \mathcal{D}$ est nécessairement un point fixe de f .

Démonstration. En effet : par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$:
 $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\lim u_n) \implies \ell = f(\ell).$ ■

Théorème

On suppose qu'un certain terme $u_{n_0} \in I$ avec I stable par f (i.e. $f(I) \subset I$), alors $\forall n \geq n_0, u_n \in I$ et :

- Si $\forall x \in I, f(x) \geq x$ alors (u_n) est croissante.
- Si $\forall x \in I, f(x) \leq x$ alors (u_n) est décroissante.
- Si f est croissante alors (u_n) est monotone à partir de n_0 ; le sens dépend de u_{n_0} et u_{n_0+1} .
- Si f est décroissante alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire.

Démonstration. (Esquisse) Les 3 premiers points s'obtiennent facilement en considérant le signe de $u_{n+1} - u_n$. Pour le dernier point, on passe par $g = f \circ f$ et on remarque que si f est décroissante, alors g est croissante ; de plus (u_{2n}) et (u_{2n+1}) auront des monotonies contraires, puisque par décroissance de f , $u_{2(n+1)} - u_{2n}$ et $u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = f(u_{2(n+1)}) - f(u_{2n})$ sont de signes opposés. ■

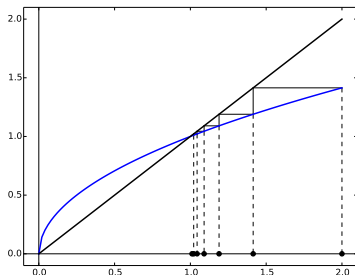
Exemples.

- $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$; $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

L'intervalle $I = [1; +\infty[$ est stable par f . La suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans I .

La fonction f est croissante, donc (u_n) est monotone; puisque $u_0 = 2 > u_1 = \sqrt{2}$, elle est décroissante. (On pourrait aussi remarquer que sur $[1; +\infty[$, $\sqrt{x} \leq x$).

Minorée par 1, (u_n) est convergente, vers un point fixe de f ; or $f(x) = x \iff x = 0$ ou $x = 1$. Ainsi (u_n) converge vers 1.



- $u_0 = 4, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}; f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$

L'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ est stable par f ; (u_n) est bien définie et à valeurs strictement positives.

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire;

$u_0 = 4, u_1 = \frac{5}{4}, u_2 = \frac{9}{5}, u_3 = \frac{14}{9}$: (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.

La fonction $g = f \circ f : x \mapsto 1 + \frac{x}{x+1}$; elle admet un unique point fixe $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et les intervalles $]0; \phi]$ et $[\phi; +\infty[$ sont stables par g .

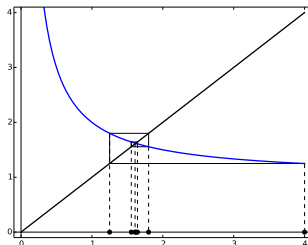
En effet :

$$g(x) = x \iff x(x+1) = x+1+x \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

et : g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$. Donc g est strictement croissante. Sa limite en $+\infty$ est 2, et on en déduit ses variations :

x	0	ϕ	$+\infty$
g'		+	
$g(x)$	1	ϕ	2

Or $u_1 < \phi < u_0$ ainsi, (u_{2n}) est décroissante et minorée (par ϕ), et (u_{2n+1}) est croissante et majorée (par ϕ) ; elles convergent donc toutes deux vers ϕ (le nombre d'or).



Exercice. Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}}$$

(il y a n radicaux).

Résolution. Il s'agit de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

$$u_0 = 0 \quad u_1 = \sqrt{2} \quad u_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} > 0$$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2 - x}$; f est définie sur $] -\infty; 2]$ et strictement décroissante comme composée d'une fonction strictement décroissante par une fonction strictement croissante. L'intervalle $I = [0; \sqrt{2}]$ est stable par f puisque $f(0) = \sqrt{2}$ et $f(\sqrt{2}) > 0$.

La suite (u_n) est donc bien définie; ses suites extraites de rangs pairs et impairs sont donc monotones de monotonie contraire : (u_{2n}) est croissante, (u_{2n+1}) décroissante. La fonction f a pour point fixe :

$$f(x) = x \iff \sqrt{2-x} = x \iff \begin{cases} 2-x = x^2 \\ \text{et } x \leq 2 \end{cases} \iff x = 1 \text{ ou } x = -2$$

x	0	1	$\sqrt{2}$
f(x)	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Donc $f([0; 1]) \subset [1; \sqrt{2}]$ et $f([1, \sqrt{2}]) \subset [0; 1]$ donc les deux intervalles $[0; 1]$ et $[1; \sqrt{2}]$ sont stables par $f \circ f$, et donc (u_{2n}) est à valeur dans $[0; 1]$ et (u_{2n+1}) à valeurs dans $[1; \sqrt{2}]$.

La suite extraite (u_{2n}) est croissante et majorée par 1, donc convergente vers un point fixe de $f \circ f$; et (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 1, donc convergente vers un point fixe de $f \circ f$.

Cherchons les points fixes de $f \circ f$ dans $[0; \sqrt{2}]$:

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x &\iff \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} = x \\ &\iff x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0 \quad \text{après 2 élévations au carré} \end{aligned}$$

Or $x^4 - 4x^2 + x + 2$ a pour racines évidentes 1 et -2 donc :

$$x^4 - 4x^2 + x + 2 = (x - 1)(x + 2)(x^2 + ax - 1) \text{ avec } a - 1 + 2 = 0 \implies a = -1$$

Ainsi :

$$f \circ f(x) = x \iff (x - 1)(x + 2)(x^2 - x - 1) = 0$$

ce qui a pour solutions : 1, 2, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dont seul 1 est dans $[0, \sqrt{2}]$.

Ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 1 et donc $\lim u_n = 1$.

Code Python pour l'obtention des graphiques

Ces deux derniers graphiques ont été obtenues à l'aide du code :

```
# Trace de suites récurrentes
```

```
import matplotlib.pyplot as plt  
import numpy as np
```

```
def traceSuiteRec(f, x0, N):  
    x = x0  
    xmin = xmax = x0      # fenetre de trace  
    # Trace des points de la suite  
    y = f(x)  
    plt.plot([x,x], [0,y], '--k')  
    plt.plot([x,y], [y,y], 'k')  
    plt.plot([x], [0], 'ok')  
    plt.plot([y], [0], 'ok')
```

```
x = y
for n in range(N):
    y = f(x)
    plt.plot([x,x], [x,y], 'k')
    plt.plot([x,x], [y,0], '--k')
    plt.plot([x,y], [y,y], 'k')
    plt.plot([y], [0], 'ok')
    x = y
    xmin = min(xmin, x) # Maj fenetre
    xmax = max(xmax, x)
# Trace fenetre et axe
plt.axhline(color='black')
plt.axvline(color='black')
xmin = min(0, xmin)
plt.xlim(xmin-0.1, xmax+0.1)
plt.ylim(xmin-0.1, xmax+0.1)
```

```
# Trace des courbes
X = np.linspace(xmin,xmax,100)
Y = f(X)
plt.plot(X,Y, 'b', linewidth=2) # y = f(x)
plt.plot(X,X, 'k', linewidth=2) # y = x
plt.show()
```

puis pour le premier par :

```
>>> traceSuiteRec(lambda x: x**0.5, 2, 5)
```

pour le second par :

```
>>> traceSuiteRec(lambda x: 1+1/x, 2, 5)
```
