ENCPB **PC 2023/24**

DM de Mathématiques n° 1

Pour le Jeudi 21 septembre

Exercice 1 *Étude d'une fonction.*

Étude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ sinon

(a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

(b) f est-elle dérivable en 0 ?

(c) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.

(d) Dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

Exercice 2 *Étude d'une suite.*

Étude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant e$.

(b) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.

(c) Montrer que $\forall x \geqslant e, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}$.

(d) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

(e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leqslant \frac{1}{4^n}$

(f) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

(g) Ecrire une fonction Python premierrang(eps) qui renvoie le plus petit entier n telle que v_n est une valeur approchée de e à une erreur eps près.

(On supposera qu'une importation telle que from numpy import e, log a été effectuée et donc que la constante e est accessible par e, et la fonction ln par log.)

Exercice 3 *Étude d'une fonction.*

Étude de la fonction g telle que $g(x) = \frac{x^2-1}{x\ln(x)}$

(a) On admet que, sur $D\backslash\{0\}, g'(x) = \frac{1+x^2}{x^2\ln^2(x)}h(x)$ où $h(x) = \ln(x) + \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Étudier les variations de g.

(b) Déterminer la limite de g en 1 .

(c) Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f.

Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les courbes représentatives de f et de g ainsi que par les droites d'équation $x = 2$ et $x = e$.

Exercice 4 *Solutions d'une équation différentielle.*

On note (E_1) l'équation différentielle $-x^2z'(x) + xz(x) = z^2(x)$.

On recherche les fonctions z solutions de (E_1) sur $K =]1, +\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur K.

(a) Soit z une fonction continue sur K ne s'annulant pas sur K. Montrer que z est solution de (E_1) sur K si et seulement si $y = \frac{1}{z}$ est une solution, ne s'annulant pas, de l'équation $(E_2) : x^2y'(x) + xy(x) = 1$.

(b) Résoudre (E_2) sur K.

(c) Montrer que toute solution de (E_2) sur K peut se mettre sous la forme $g_a : x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x}$, où a est un réel strictement positif.

(d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que g_a ne s'annule pas sur K

(e) En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).

Exercice 5 *Étude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale.*

On pose $H(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition J de H.

(b) Justifier que f admet des primitives sur $[0,1[$. On note F une telle primitive. Exprimer $H(x)$ en fonction de F.

(c) Etudier la limite de H en 0 .