Exercice 1

(a) f est définie en 0 par l'énoncé. De plus, la fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule uniquement en 1. On en déduit $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

(b) Les théorèmes généraux ne nous permettent pas de conclure. On repasse par la définition en utilisant le taux d'accroissement. de f en 0.

Soit $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(c) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D \setminus \{0\}$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On a vu que f était dérivable en 0. Il reste à montrer que f' est continue en 0.

$f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$. Donc $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $f'(0) = 0$. Donc f' est continue en 0 puis f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .

(d) Soit $x \in D \setminus \{0\}$. On a $f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$

Le signe de $f'(x)$ est donné par le signe de $\ln x - 1$. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(e) = 1$ donc $\ln x - 1 < 0$ sur $]0, 1[\cup]1, e[$ et $\ln x - 1 > 0$ sur $]e, +\infty[$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$. Par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Puis $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

De même $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

Enfin, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On a $f(e) = e$. (on dit que e est un point fixe de f)

On résume tous ces résultats sur le tableau de variations suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	- 0 +	
$f(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Exercice 2

(a) On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : v_n \geq e$.

Initialisation. $v_0 = 3 \geq e$. D'où $P(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$, i.e. $v_n \geq e$. D'après l'étude de la fonction f de la question 1, $f([e, +\infty[) = [e, +\infty[$. Donc $f(v_n) \geq e$. Or $v_{n+1} = f(v_n)$ d'où $P(n+1)$.

Conclusion. Par récurrence, on a donc montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq e$.

(b) On étudie la monotonie de v . D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq e$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\ln(v_n)} \leq 1$ car $v_n \geq e$. Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Or, elle est minorée par e d'après la question précédente.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite v converge.

Soit ℓ la limite de v . $\ell \geq e$, par stabilité des inégalités larges par passage à la limite. f est continue sur $[e, +\infty[$ donc $f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$. Or $f(v_n) = v_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Donc $\ell = f(\ell)$, i.e. $\frac{\ell}{\ln \ell} = \ell$ puis $\ln(\ell) = 1$ d'où $\ell = e$. Donc v converge vers e .

(c) On a montré à la question 1 que f' était positive sur $[e, +\infty[$.

Soit $x \in [e, +\infty[$, $\frac{1}{4} - f'(x) = \frac{(\ln x)^2 + 4 \ln(x) - 4}{4(\ln x)^2} = \frac{(\ln x - 2)^2}{4(\ln x)^2} \geq 0$.

On a donc bien $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

(d) cf cours.

(e) On procède encore par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q(n) : |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$. Initialisation. $|3 - e| \leq 1$ d'où $Q(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $Q(n)$, i.e. $|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$. f est dérivable sur $[e, +\infty[$. D'après la question 2c $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{4}$ sur $[e, +\infty[$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $|v_{n+1} - e| = |f(v_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4} |v_n - e|$. Or $|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ par hypothèse de récurrence. D'où $|v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$, i.e. $Q(n+1)$.

Conclusion. Par récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

(f) $4^5 > 10^3$ donc $4^{20} > 10^{12}$. D'après la question précédente, $\forall n \geq 20, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^{20}} < \frac{1}{10^{12}}$. (g) On peut donc choisir $n_1 = 20$.

```
def premierrang(eps):
    n=0
    vn=3
    while abs(vn-e)>eps:
        vn=vn/log(vn)
        n=n+1
    return n
```

Exercice 3

(a) h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{x(1+x^2)^2}$$

Ainsi h est croissante sur $]0, +\infty[$ et $h(1) = 0$. Donc h est négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$. Or h et g' sont de même signe.

Donc g est décroissante sur $]0, 1[$ et croissante sur $]1, +\infty[$.

(b) On pose $x = 1 + h \cdot g(x) = g(1 + h) = \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h)\ln(1+h)} = \frac{2h+h^2}{(1+h)\ln(1+h)} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{2h}{1 \times h} = 2$.

Ainsi, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 2$.

(c) La position relative des deux courbes est donnée par le signe de $g - f$.

Soit $x \in D \setminus \{0\}$. On a $g(x) - f(x) = \frac{x^2 - 1 - x^2}{x \ln x} = -\frac{1}{x \ln x}$. Comme $x > 0$ sur D , le signe de $g(x) - f(x)$ dépend du signe de $\ln x$. Donc

la courbe représentative de g est au dessus de celle de f sur $]0, 1[$ et en dessous sur $]1, +\infty[$.

L'aire recherchée est donc égale à $\int_2^e (f(x) - g(x))dx$ car f est au dessus de g sur $[2, e]$.

Or $\int_2^e (f(x) - g(x))dx = \int_2^e \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln(x))]_2^e = \ln(\ln(e)) - \ln(\ln(2)) = -\ln(\ln(2))$.

Donc l'aire demandée est égale à $-\ln(\ln(2))$.

(Pour ceux qui seraient sceptiques à cause du signe moins : on a $1 < 2 < e$ donc $\ln(1) < \ln(2) < \ln(e)$, i.e. $0 < \ln(2) < 1$. On a donc $\ln(\ln(2)) < 0$ et $-\ln(\ln(2)) > 0$.)

Exercice 4

(a) Soit z une fonction continue sur K ne s'annulant pas sur K . On note $y = \frac{1}{z}$. (y ne s'annule donc pas non plus sur K).

z est une solution de (E_1) si et seulement si $-x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x)$, i.e. si et seulement si $-x^2 \frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{x}{z(x)} = 1$

On a $y' = -\frac{z'}{z^2}$ donc $\frac{z'}{z^2} = -y'$

Donc z est solution de (E_1) si et seulement si $x^2 y'(x) + xy(x) = 1$.

z est solution de (E_1) si et seulement si $y = \frac{1}{z}$ est solution de (E_2) .

(b) (E_2) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On note (H) : $x^2 y'(x) + xy(x) = 0$ l'équation homogène associée.

On commence par résoudre (H) .

Sur K , $(H) \Leftrightarrow y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\ln$.

Or $\forall x \in K, e^{-\ln(x)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$.

D'après les théorèmes du cours, l'ensemble des solutions de (H) est

$$\left\{ y : \begin{cases} K \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda}{x} \end{cases} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche maintenant une solution particulière de (E_2) à l'aide la méthode de variation de la constante.

On cherche donc une solution particulière y telle que $\forall x \in K, y(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$, où λ est une fonction dérivable sur K que nous allons déterminer.

y est solution de E donc $x^2 y'(x) + xy(x) = 1$, i.e. $x^2 \left(\frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2} \right) + x \frac{\lambda(x)}{x} = 1$, i.e.

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x}.$$

La fonction $\lambda = \ln$ convient.

La fonction $y : \begin{cases} K \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln x}{x} \end{cases}$ est donc une solution particulière de (E_2) .

L'ensemble des solutions de (E_2) est donc : $\left\{ \begin{array}{l} y : K \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda + \ln(x)}{x} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) Soit g une solution de (E_2) . Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in K, g(x) = \frac{\lambda + \ln(x)}{x}$.

On fixe un tel λ . On pose $a = e^\lambda$. On a bien $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in K$, on a $g(x) = \frac{\ln(e^\lambda) + \ln(x)}{x} = \frac{\ln(a) + \ln(x)}{x} = \frac{\ln(ax)}{x}$. Donc

toute solution de (E_2) sur K peut se mettre sous la forme $g_a : \begin{cases} K \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x} \end{cases}$, où a est un réel strictement positif.

(d) Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \cdot g_a$ ne s'annule pas sur K si et seulement si $\forall x \in K, g_a(x) \neq 0$, i.e. si et seulement si $\forall x \in]1, +\infty[, \ln(ax) \neq 0$ ou encore ssi $\forall x \in]1, +\infty[, a \neq \frac{1}{x}$.

Donc g_a ne s'annule pas sur K si et seulement si $a \in [1, +\infty[$.

(e) D'après tout ce qui précède, l'ensemble des solutions de (E_2) ne s'annulant pas sur

$$K \text{ est } \left\{ y : \begin{cases} K \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x} \mid a \in [1, +\infty[\end{cases} \right\}.$$

D'après la question 2 b,

l'ensemble des solutions de (E_1) ne s'annulant pas sur K est donc

$$\left\{ z : \begin{cases} K \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{\ln(ax)} \mid a \in [1, +\infty[\end{cases} \right\}.$$

Exercice 5

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $H(x)$ est défini si et seulement si $x \neq 0$ et $[0, x] \subset D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.
Donc $J =]0, 1[$.

(b) f est continue sur $[0, 1[$ donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet des primitives sur $[0, 1[$.

Soit $x \in [0, 1[$. On a alors $H(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x}$.

(c) On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0)$.
D'où $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0$.