PC ENCPB 2023/24

Devoir surveillé de Mathématiques n° 1
Samedi 16 septembre
Durée 4 heures

****

Le soin apporté à la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe et la présentation seront pris en compte dans la notation.
Il est vivement recommandé d'encadrer les résultats et de signaler toute question admise.
Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Documents et calculatrices sont interdits.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1 *Fonction définie par une intégrale*

Rappels et notations : Si a et b sont des réels avec $a > 0, a^b$ désigne $\exp(b(\ln(a)))$.
Par convention, on pose $0^b = 0$ si $b > 0$ et $0^0 = 1$. Avec ces conventions, l'application $t \mapsto t^b$ est continue sur $[0,1]$ si $b \geqslant 0$.

Dans cet exercice, on pose, pour $x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2)$.
2. Sans utiliser de dérivée, montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que si x et y sont dans $\mathbb{R}_+$, avec $x \leqslant y$:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \int_0^1 (t^x - t^y)\,\mathrm{d}t \leqslant y - x$$

4. En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que pour $x \geqslant 0$, on a $1 - \varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$.
6. Montrer que, pour $x \geqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$ est majorée par $\dfrac{1}{x+1}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.
7. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour $x \geqslant 0$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + x\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2}\,\mathrm{d}t$$

8. (a) Montrer que, pour tout réel $u > -1, \ln(1+u) \leqslant u$.

(b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x+1}$.
(c) En utilisant l'expression de la question 5 et une intégration par parties, trouver un équivalent de $\varphi(x) - 1$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 *Dérivées successives de la fonction tangente*

Dans tout le problème, on note tan la fonction tangente.
Etant donnés un entier naturel $n \geqslant 1$ et une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I. La notation $f^{(0)}$ désigne f.

1. Quelle est la période de la fonction tan ?
2. Représenter la fonction tan sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   — $T_0(X) = X$,
   — et pour tout entier naturel n, $\tan^{(n)}$, dérivée n-ième de la fonction tan, vérifie :
   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)).$$
   On explicitera une relation de récurrence vérifiée par les polynômes T_n et T_{n+1}.
4. Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme T_n ?
6. Justifier qu'il existe une unique suite de nombres entiers naturels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t_j}{(2j+1)!}x^{2j+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}T_{2n+2}(\tan(t))dt.$$

On pourra pour cela appliquer la formule de Taylor-Laplace : si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant a, alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 3

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on définit :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

Partie A - Généralités

1. Prouver que f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*, t f'(t) = g(t)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement (encore noté g) est dérivable en 0 .
3. Faire un tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$, en faire un graphe sachant que $e^{-1} \approx 0,36$ à 10^{-2} près.
4. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto g(1/t)$ s'annulant en 1 .
   (a) Justifier l'existence de H, l'exprimer à l'aide d'une intégrale puis la calculer.
   (b) En former un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1.
5. Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel. On introduit l'équation $\boxed{(E_n) : f(t) = t/n}$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) En utilisant la question 3 , montrer que (E_n) a une unique solution dans $]0,1$, que l'on notera α_n. On montrerait identiquement (mais ce n'est pas à faire) que (E_n) admet une unique solution dans $]1,+\infty[$, que l'on notera β_n.
   (b) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ sont monotones. (Indication : On pourra comparer $g(\alpha_n)$ et $g(\alpha_{n+1})$.)
   (c) Est-ce possible que l'une des suites converge vers une limite $l > 0$? En déduire leurs limites.

Partie B - Fonctions définies par des intégrales

On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$.

6. Montrer que l'application f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$; préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité de la question 1 reste valable pour $t = 0$.
7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note :
   $$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$
   (a) Justifier l'existence de ces intégrales que l'on ne cherchera surtout pas à calculer puis montrer que $F(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x)$.
   (b) En séparant l'intégrale $G(x)$ en deux, montrer qu'il existe une constante C réelle telle que pour tout $x \geqslant 1$,
   $$0 \leqslant G(x) \leqslant C + \ln(x).$$
   (c) En déduire que $G(x)$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$ ainsi qu'un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.
8. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : x^2 y' + y = x^2$, l'expression générale de la solution fera apparaître la fonction F.

Partie C - Étude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de $(E) : x^2 y' + y = x^2$ cette fois sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons, sans aucun calcul explicite de y, déterminer entièrement la suite des $u_n = y^{(n)}(0)$ à partir de l'équation (E).

9. Que vaut $u_0 = y(0)$?
10. En dérivant (E), calculer $u_1 = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.
11. Peut-on avoir y de la forme : $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$?
12. Soit n un entier naturel.
   (a) On suppose ici $n \geqslant 3$. Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
   $$x^2 y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx) y^{(n)}(x) + n(n-1) y^{(n-1)}(x) = 0.$$
   En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.
   (b) Donner une expression de u_n utilisant une factorielle, valable pour tout $n \geqslant 2$; en déduire les développements limités (dont on justifiera l'existence) de y à tout ordre au voisinage de 0 .