Exercice 1. *Fonction définie par une intégrale (Mines Albi, Alès, ..., 2010)*

1. $\varphi(0)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$, donc $\varphi(0)=\frac{1}{2}$.
$$\varphi(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=[\ln(1+t)]_0^1,\ \text{puis } \varphi(1)=\ln(2)$$
$$\varphi(2)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=[\operatorname{Arctan} t]_0^1 \text{ puis } \varphi(2)=\frac{\pi}{4}.$$
2. Soit $x, y\in\mathbb{R}_+, x\leqslant y$, soit $t\in]0,1]$.
$\ln(t)\leqslant 0$ donc $x\ln t\geqslant y\ln t$
Par croissance de exp sur $\mathbb{R}, e^{x\ln t}=t^x\geqslant e^{y\ln t}=t^y$
puis $1+t^x\geqslant 1+t^y>0$. Par passage à l'inverse :
$\frac{1}{1+t^x}\leqslant\frac{1}{1+t^y}$.
Enfin, par croissance de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\frac{1}{1+t^y}\,\mathrm{d}t$
Donc $\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$.
La fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$, avec $x\leqslant y$. D'après la proposition précédente,
$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=\varphi(y)-\varphi(x)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^y}-\frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1 \frac{1+t^x-1-t^y}{(1+t^x)(1+t^y)}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^x-t^y}{(1+t^x)(1+t^y)}\mathrm{d}t \text{ (par linéarité)}$$
$$\leqslant\int_0^1 (t^x-t^y)\,\mathrm{d}t \text{ (par croissance de l'intégrale car } \frac{1}{(1+t^x)(1+t^y)}\leqslant 1 \text{ sur } [0,1])$$
$$\text{puis } \int_0^1(t^x-t^y)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}-\frac{t^{y+1}}{y+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}=\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}$$
$$\leqslant y-x(\text{car}(1+x)(1+y)\geqslant 1)$$
Il vient bien $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\displaystyle\int_0^1(t^x-t^y)\,\mathrm{d}t\leqslant y-x$
4. Soit $x\in\mathbb{R}_+$
D'après la question précédente, $\forall y\in\mathbb{R}, 0\leqslant|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant|y-x|$.
Puisque $\lim_{y\to x}|y-x|=0$, on obtient, par le théorème d'encadrement :
$|\varphi(x)-\varphi(y)|\underset{y\to x}{\longrightarrow}0$. Donc φ est continue en x.
Puis φ est continue sur $\mathbb{R}_+$. 5. Soit $x\geqslant 0$,
$1-\varphi(x)=1-\int_0^1\frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\,\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 1-\frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t.$
puis $1-\varphi(x)=\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t.$
5. Soit $x\geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale $\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1=\frac{1}{x+1}$.
On obtient bien la majoration $\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x+1}$.
Or, par positivité de l'intégrale : $0\leqslant\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x+1}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$.
Ainsi, par le théorème d'encadrement, $\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$
Puis, d'après la question précédente, $\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$
6. Les fonctions $u:t\mapsto t$ et $v:t\mapsto\frac{1}{1+t^x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall t\in[0,1], u'(t)=1$ et $v'(t)=-\frac{xt^{x-1}}{(1+t^x)^2}$. Par intégration par parties, on a donc :
$\varphi(x)=\left[\frac{t}{1+t^x}\right]_0^1-\int_0^1-\frac{xtt^{x-1}}{(1+t^x)^2}\,\mathrm{d}t$
puis $\varphi(x)=\frac{1}{2}+x\int_0^1\frac{t^x}{(1+t^x)^2}\,\mathrm{d}t$
7. (a) Soit $g:u\mapsto u-\ln(1+u)$. Par somme de fonctions dérivables, g est dérivable sur $]-1,+\infty[$, et $\forall u>-1, g'(u)=1-\frac{1}{1+u}=\frac{u}{1+u}$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

u	-1		0		$+\infty$
$g'(u)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(u)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que $\forall u>-1, g(u)\geqslant 0$ donc pour tout réel $u>-1, \ln(1+u)\leqslant u$.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}_+, t\in[0,1]$.
D'après ce qui précède, on a $0\leqslant\ln(1+t^x)\leqslant t^x$.
Par positivité et croissance de l'intégrale, $0\leqslant\int_0^1\ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+1}$.

(c) Soit $x>0$. On a obtenu à la question 5 : $1-\varphi(x)=\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$.

Les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{x}\ln(1+t^x)$ et $v : t \mapsto t$ dont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec $\forall t \in [0,1], u'(t) = \frac{t^{x-1}}{1+t^x}$ et $v'(t) = 1$. Par intégration par parties, on a donc
$1-\varphi(x) = \left[\frac{1}{x}\ln(1+t^x)\,t\right]_0^1 - \frac{1}{x}\int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t$.
On a donc $x(1-\varphi(x)) = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t$
D'après la question précédente et le théorème d'encadrement,

$$\int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $x(1-\varphi(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

On en déduit $1-\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{x}$.

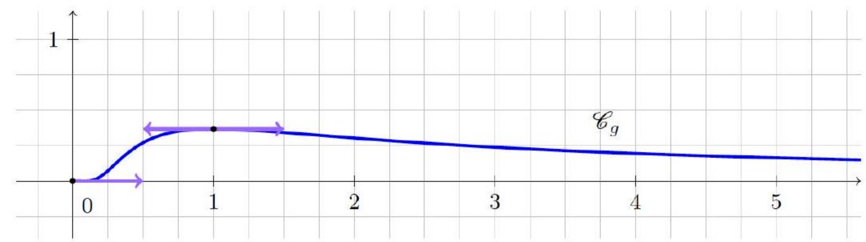
Exercice 2. *Dérivées successives de la fonction tangente (E3A PC 2015)*

1. La fonction tan est π-périodique.
2. cf. cours
3. Soit $\mathcal{P}(n)$: il existe un polynôme T_n tel que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$.
   On a $\tan^{(0)} = \tan$. En posant $T_0 = X$, on a bien $\mathcal{P}(0)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$.
   On a donc $\tan^{(n+1)} = \left(\tan^{(n)}\right)' = [T_n(\tan)]' = \tan' \times T_n'(\tan) = \left(1+\tan^2\right) \times T_n'(\tan)$
   En posant $T_{n+1} = \left(1+X^2\right) \times T_n'$, on a bien $\mathcal{P}(n+1)$.
   Par récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.
4. $T_1 = 1+X^2, T_2 = \left(1+X^2\right) \times (2X) = 2X + 2X^3$,
   $T_3 = \left(1+X^2\right)\left(2+6X^2\right) = 2 + 8X^2 + 6X^4$.
5. T_0 est à coefficient entiers naturels et de degré 1 .
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que T_n est à coefficients entiers naturels et de degré $n+1$.
   Puisque $T_{n+1} = \left(1+X^2\right) T_n'$, il est bien à coefficients entiers et on a
   $\deg(T_{n+1}) = 2 + \deg(T_n') = 2 + \deg(T_n) - 1 = 1 + \deg(T_n) = n+2$.
   On a bien montré par récurrence que :
   pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de T_n sont des entiers naturels et $\deg(T_n) = n+1$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2n+1$, on a pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$,
   $\tan(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\tan^{(2n+2)}(t)\right)dt$.
   tan est une fonction impaire donc toutes ses dérivées d'ordre pair sont également impaires.
   Tous les t_k avec k pair sont donc nuls.
   On pose $t_j = \tan^{(2j+1)}(0) = T_{2j+1}(0)$. C'est donc le coefficient constant de T_{2j+1} qui est un entier naturel d'après la question précédente.
   Puisque $\tan^{(2n+2)} = T_{2n+2}(\tan)$, on obtient bien la formule demandée.

Exercice 3. *(Mines Albi, Alès,.., 2007)*
Partie A - Généralités

1. $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Par composition, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis, par produit, g l'est également.
   Soit $t > 0. tf'(t) = t \times \frac{1}{t^2}\exp(-1/t) = g(t)$
2. Par croissances comparées, $g(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Puisque g admet une limite finie en 0 , elle est prolongeable par continuité en 0 .
   On a ensuite $\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \frac{1}{t^2}\exp(-1/t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi, g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$.
3. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall t > 0, g'(t) = \exp(-1/t)\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2}\right) = \exp(-1/t)\frac{1}{t^3}(1-t)$, d'où le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0



4. (a) $t \mapsto g(1/t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition.
D'après le théorème fondamental de l'analyse, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ et, en particulier, $\forall t>0, H(t)=\int_1^t g(1/u) \mathrm{d}u=\int_1^t u e^{-u}$ du.
Les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto -e^{-u}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, t]$. Par intégration par parties,
$H(t)=\left[-u e^{-u}\right]_1^t-\int_1^t -e^{-u}$ du $=-t e^{-t}+e^{-1}-\left[e^{-u}\right]_1^t$ donc $H(t)=-(t+1) e^{-t}+2 e^{-1}$.

(b) On pose $t=1+h \cdot H(t)=H(1+h)=-(2+h) e^{-1-h}+2 e^{-1} \underset{h \rightarrow 0}{=} -(2+h) e^{-1}\left(1-h+h^2/2-h^3/6+o\left(h^3\right)\right)+2 e^{-1}$
$H(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} e^{-1}\left(-2+2 h-h^2+h^3/3-h+h^2-h^3/2+2+o\left(h^3\right)\right)=e^{-1}\left(h-h^3/6+o\left(h^3\right)\right)$
donc $H(t) \underset{t \rightarrow 1}{=} e^{-1}(t-1)-\frac{e^{-1}}{6}\left((t-1)^3\right)+o\left((t-1)^3\right)$.

5. Soit $n \geqslant 3$.
(a) $\left(E_n\right) \Leftrightarrow g(t)=\frac{1}{n}$.
Puisque g est continue et strictement croissante sur $]0,1[$, elle réalise une bijection de $] 0,1[$ dans $] 0, e^{-1}[$.
Or $n \geqslant 3$ donc $0<\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{3}<\frac{1}{e}$. Donc $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent α_n par g dans]0,1[.
Ainsi, $\left(E_n\right)$ a une unique solution α_n dans $]0,1[$.

(b) On a $g\left(\alpha_n\right)=\frac{1}{n}>g\left(\alpha_{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$. La fonction g étant strictement croissante, on a nécessairement $\alpha_n>\alpha_{n+1}$. Donc $\left(\alpha_n\right)_{n \geqslant 3}$ est (strictement) décroissante.
Par les mêmes arguments, avec la stricte décroissance de g sur $]1,+\infty[$, $\left(\beta_n\right)_{n \geqslant 3}$ est (strictement) croissante.

(c) On suppose $\alpha_n \underset{n \rightarrow+\infty}{\longrightarrow} l \geqslant 0$ (même raisonnement pour β_n). Par continuité de g sur $\mathbb{R}_+, g\left(\alpha_n\right)=\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow+\infty}{\longrightarrow} g(l)$. Donc $g(l)=0$. Nécessairement, d'après l'étude de g, $l=0$.
il est impossible qu'une des suites converge vers une limite $l>0$
Or $\left(\alpha_n\right)$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente par le théorème de la limite monotone. Ainsi, elle converge vers une limite positive ou nulle. D'après ce qui précède, on a donc $\alpha_n \underset{n \rightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De même, $\left(\beta_n\right)$ est croissante donc admet une limite (finie ou non) supérieure à 1. D'après ce qui précède, la limite ne peut donc pas être finie et $\beta_n \underset{n \rightarrow+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Partie B - Fonctions définies par des intégrales

6. On a bien $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0=f(0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$. On a déjà vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour $t>0, f^{\prime}(t)=\frac{g(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 avec $f^{\prime}(0)=0$, et $f^{\prime}(x) \underset{x \rightarrow+\infty}{\longrightarrow} f^{\prime}(0)$ donc $f^{\prime}$ est continue en 0 .
Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$
En $0, 0 \times f^{\prime}(0)=0=g(0)$, l'égalité reste valable.
7. (a) Les fonctions f et g (prolongées) sont continues sur $[0, x]$, d'où l'existence des intégrales . $F(x)=\int_0^x 1 . f(t) \mathrm{d} t$. Par intégration par parties (avec les fonctions $u: t \mapsto t$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$),
$$F(x)=[t f(t)]_0^x-\int_0^x t f^{\prime}(t) \mathrm{d} t=x e^{-\frac{1}{x}}-\int_0^x g(t) \mathrm{d} t=x e^{-\frac{1}{x}}-G(x).$$
(b) Soit $x \geqslant 1$.
Par la relation de Chasles, $G(x)=\int_0^1 g(t) \mathrm{d} t+\int_1^x \frac{e^{-1/t}}{t}$ dt. Par croissance de l'intégrale, puisque $e^{-1/t} \leqslant 1, G(x) \leqslant C+\int_1^x \frac{1}{t}$ d$t=C+\ln x$ en posant $C=\int_0^1 g(t) \mathrm{d} t$. De plus, $0 \leqslant G(x)$ par positivité de l'intégrale.

(c) Soit $x>0 . 0 \leqslant \frac{G(x)}{x} \leqslant \frac{C}{x}+\frac{\ln x}{x}$. Par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x} \underset{x \rightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par le théorème d'encadrement, $\frac{G(x)}{x} \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ donc $G(x) \underset{x \rightarrow+\infty}{=} o(x)$.
On a $F(x)=x e^{-1/x}-G(x)=x e^{-1/x}+o(x)$ donc $\frac{F(x)}{x}=e^{-1/x}+o(1) \underset{x \rightarrow+\infty}{\longrightarrow} 1$
Ainsi, $F(x) \underset{x \rightarrow+\infty}{\sim} x$.
8. Les solutions de l'équation homogène $(H): x^2 y^{\prime}+y=0$ sont de la forme $y(x)=\lambda e^{1/x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(x)=\lambda(x) e^{1/x}$, où λ est une fonc-
tion dérivable à déterminer. En injectant dans (E), on a $x^2\left(\lambda^{\prime}(x) e^{1/x}-\frac{\lambda(x)}{x^2} e^{1/x}\right)+\lambda(x) e^{1/x}=x^2$ puis $\lambda^{\prime}(x)=e^{-1/x}$. On peut choisir $\lambda(x)=F(x)$ puis $y_p(x)=F(x) e^{1/x}$.
Les solutions de E sont de la forme $y: x \mapsto e^{1/x}(F(x)+\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

Partie C - Étude qualitative d'une équation différentielle

9. On a $0^2 y^{\prime}(0)+y(0)=0^2$ donc $u_0=y(0)=0$.

10. Soit $x \in \mathbb{R}_+ \cdot 2xy'(x) + x^2y''(x) + y'(x) = 2x$. En évaluant en $0, u_1 = y'(0) = 0$.
On dérive à nouveau : $2y'(x) + 2xy''(x) + x^2y^{(3)}(x) + 2xy''(x) + y''(x) = 2$, puis $u_2 = y''(0) = 2$.
11. On suppose y de la forme $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
Alors $y(0) = \gamma = 0$ puis $y'(0) = \beta = 0$ et $y''(0) = 2\alpha = 2$ donc $y : x \mapsto x^2$.
Alors $x^2y'(x) + y(x) = 2x^3 + x^2 \neq x^2, y$ n'est pas solution de (E).
On ne peut pas avoir y de cette forme.
12. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 .
(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$
Les fonctions $h : x \mapsto x^2$ et y' sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$. On a $h'(x) = 2x, h''(x) = 2$ et $\forall k \geqslant 3, h^{(k)} = 0$.
Par la formule de Leibniz,
$(hy')^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} h^{(k)}y^{(n-k)}(x) = x^2y^{(n+1)}(x) + n \times 2xy^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} 2 \times y^{(n-1)}(x) + \sum_{k=3}^{n} 0$.
En dérivant n fois (E), on obtient donc
$x^2y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1) \times y^{(n-1)}(x) + y^{(n)} = 0$
d'où $x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$.
En évaluant en 0 , on a $u_n = -n(n-1)u_{n-1}$.

(b) On pose $\mathcal{P}(n)$: [$u_n = (-1)^n n!(n-1)$! »
On a $(-1)^2 2!1! = 2 = u_2$ d'où $\mathcal{P}(2)$.
Soit $n \geqslant 2$, on suppose $\mathcal{P}(n)$.
Alors $u_{n+1} = -(n+1)nu_n = -(n+1)n(-1)^n n!(n-1)! = (-1)^{n+1}(n+1)!n!$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$.
Ainsi, $\forall n \geqslant 2, u_n = (-1)^n n!(n-1)!$ y étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, elle admet à tout ordre un développement en limité en 0 , d'après la formule de Taylor-Young. Il est donné par :

$$y(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = 0 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k k!(k-1)!}{k!} x^k + o(x^n)$$
$$y(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=2}^{n} (-1)^k (k-1)! x^k + o(x^n).$$