

Fiche d'Exercice n°1

Révisions sur les réels et les suites numériques

I. Nombres réels : équations, inéquations, inégalités, valeurs absolues**Exercice 1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ en discutant selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

(a) $(x+1)^2 \leq mx$

(b) $\begin{cases} x+y = m \\ xy = 1 \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(a) $|x-2| = |x+1|$ (b) $|x-4| = x^2 - 1$ (c) $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leq 2$

Exercice 3. On suppose que : $2 \leq |a| \leq 4$ et $5 \leq |b| \leq 6$. Encadrer : $\frac{a^2 |b+1|}{|a-2b|}$.**Exercice 4.** Démontrer que :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n+2}{2n+3} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^n}{n!} \geq n$

Exercice 5. Soit x et y des réels. Montrer que :

(a) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

(b) $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

II. Partie entière**Exercice 6.** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:(a) Exprimer $\lfloor x + n \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$ et n .(b) Exprimer $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.**Exercice 7.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 8. Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$: $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$

III. Bornes supérieures et bornes inférieures

Exercice 9. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On note :

$$A + B = \left\{ a + b \mid a \in A, b \in B \right\} \quad ; \quad -A = \left\{ -a \mid a \in A \right\}$$

Établir les relations suivantes :

1. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
2. $\sup(-A) = -\inf A$ et $\inf -A = -\sup A$ (on suppose ici A borné)
3. $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$ (on suppose ici B borné)

Exercice 10. Déterminer, lorsqu'ils existent, les bornes sup, inf, minimum, et maximum pour des ensembles suivants :

- (a) $A = \left\{ \frac{1}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (b) $B = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
- (c) $C = \left\{ \frac{1}{p} \mid p \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ est premier} \right\}$.
- (d) $D = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid (n, m) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$.

IV. Suites numériques

Exercice 11. Soit $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire l'inégalité : $\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 12. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.

Exercice 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 14. Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $\lim u_n v_n = 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Exercice 15. (Moyenne de Cesaro)

Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ . On considère la suite (m_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $m_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$

- (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
- (b) Montrer qu'il existe un rang n_1 tel que, pour tout entier $n \geq n_1$, $|m_n - \ell| \leq \epsilon$.
- (c) Que peut-on dire sur la convergence de (m_n) ?

Exercice 16. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction ϕ_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\phi_n(x) = x - \ln(x) - n.$$

- (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, l'équation : $\ln(x) + n = x$ admet deux solutions (que l'on notera x_n et y_n), avec $x_n \in]0, 1[$ et $y_n \in]1, +\infty[$.
- (b) En considérant $\phi_{n+1}(x_n)$, montrer que $(x_n)_{n \geq 2}$ est une suite décroissante.
- (c) Montrer que $(x_n)_{n \geq 2}$ converge.
- (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. (On pourra raisonner par l'absurde.)
- (e) Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$.

Exercice 18. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$. On note $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$

- (a) Dresser le tableau de variations de f .
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\sqrt{2}, +\infty[$.
- (c) Montrer que (u_n) est décroissante, puis qu'elle converge.
- (d) Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 19. Soit (u_n) la suite complexe définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3} (2u_n - \overline{u_n})$. Montrer que (u_n) converge puis déterminer sa limite en fonction de u_0 . (On pourra étudier les suites $(a_n = \operatorname{Re}(u_n))$ et $(b_n = \operatorname{Im}(u_n))$).

Exercice 20. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère f_n définie sur $[0, \pi/2]$ par $f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n possède un maximum en un unique point (on le note x_n et $y_n = f(x_n)$).
- (b) Trouver un équivalent de (x_n) et de (y_n)

Exercice 21.

- (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique u_n tel que $u_n^5 + nu_n = 1$
- (b) Étudier la monotonie de (u_n) . (On pourra comparer $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$)
- (c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- (d) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n .

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x + x^2 + \dots + x^n = 1$ admet une unique solution réelle positive x_n . Montrer la convergence de (x_n) et déterminer sa limite.