

Fiche d'Exercice n°2

Révisions sur les fonctions réelles

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], [0, 1])$ telle que $f \circ f = f$. On note A l'ensemble des points fixes de f . Montrer que $f([0, 1]) = A$. En déduire que A est un segment.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall x > 0, \exists c > 0 \text{ tel que } f(x) - f(-x) = x (f'(c) + f'(-c))$$

Exercice 3. Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que : $f(c + \frac{1}{2}) - f(c) = 2$.

Exercice 4. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{\cos x - 1}{x} \right| \leq 1$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$. (On peut démontrer de même que $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.)
- Déterminer la dérivée n -ième de $f : x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$.

Exercice 6. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que :

$$1 - \frac{a}{b} \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b}{a} - 1.$$

Exercice 7. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

(a)

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^4) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^2) \end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On suppose que f'' ne s'annule pas sur $[a, b]$. Montrer que f ne s'annule pas sur $]a, b[$

Exercice 9. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$ est minorée et atteint son minimum.

Exercice 10. (Rolle généralisé et une application.)

a) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Application. Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \exp(-x^2) \end{aligned}.$$

Montrer que la dérivée n -ième de f est de la forme $P_n(x) \exp(-x^2)$ où P_n est un polynôme de degré n possédant n racines distinctes.

Exercice 11. (Très utile!)

- a) Soit f une fonction réelle n fois dérivable sur un intervalle I et s'annulant en $n + 1$ points distincts de I . Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en un point de I .
- b) Application. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'équation $P(x) - \sin x = 0$ ne possède qu'un nombre fini de racines réelles deux à deux distinctes sur un segment $[a, b]$.

Exercice 12. Soit le polynôme P_n défini par pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P_n(x) = [(1 - x^2)^n]^{(n)}$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1, 1]$.

Exercice 13. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ définie sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$.

- a) Montrer que f réalise une bijection de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ dans un intervalle J à déterminer.
- b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ puis que $\forall x \in]1, +\infty[, \frac{df^{-1}}{dx}(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Exercice 14. Calculer, à l'aide de développements limités, les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right).$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

Exercice 15. Déterminer à l'aide d'un développement limité l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

a) $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}.$

b) $f : x \mapsto \ln(2 + x + x^2).$

Exercice 16. Déterminer à l'aide d'un développement asymptotique (l'existence et) l'équation d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

a) $f : x \mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

b) $f : x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{1+x} \right)$

Exercice 17. Soit $a > 0$ et $b > 0$. Donner un développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$