# Examen, Structures algébriques I
15 janvier 2018

Ni documents ni calculatrices ne sont autorisés. Le barème est indicatif, les questions marquées par un $*$ sont plus difficiles et hors barème.

## Problème 1 (6 points)

*Question (1)* Pour chacun des $n, G$ ci-dessous, existe-t'il un élément d'ordre $n$ dans $G$ ? (Donner un exemple si la réponse est positive et brièvement justifier une réponse négative.)

1. $n = 13$ et $G = S_8$ ;
2. $n = 15$ et $G = S_8$ ;
3. $n = 9$ et $G = S_6$.

*Question (2)* Parmi les groupes suivants, lesquels sont isomorphes à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ? (Justifier brièvement chaque réponse.)

1. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ;
2. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ;
3. $\mathbb{Z}^2/\langle(2,0),(0,6)\rangle$ ;
4. $\mathbb{Z}^2/\langle(5,2),(-1,2)\rangle$.

*Question (3)* Donner un exemple de groupe $G$ et d'un sous-groupe $H \subset G$ d'indice 2 tels que $G$ ne soit pas isomorphe à un produit semi-direct de $H$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

*Question (4)* Donner des éléments d'ordre 4 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$ et dans le groupe linéaire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

## Problème 2 (4 points)

*Question (1)* Décrire les classes de conjugaison dans le groupe alterné $A_4$, puis dans le groupe symétrique $S_4$ (pour chaque classe on donnera son cardinal et un représentant).

*Question (2)* Donner un sous-groupe distingué de $A_4$ (distinct de $A_4$ lui-même et du sous-groupe trivial $\{\mathrm{Id}\}$). Est-il distingué dans $S_4$ (justifier la réponse) ?

*Question (3)* Soit $H \subset A_4$ le sous-groupe trouvé à la question précédente.

*Question (3.a)* Montrer que $A_4/H$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

*Question (3.b)* $^*$ Montrer que $S_4/H \cong S_3$.

## Problème 3 (5 points)

Dans tout l'exercice on notera $n$ un entier au moins égal à 3 et $D_{2n}$ le groupe dihédral d'ordre $2n$.

*Question (1)* Combien y-a-t'il d'éléments d'ordre $n$ dans $D_{2n}$ pour $n = 3, 4, 5, 6$ et $7$ ?

*Question (2)* Décrire les classes de conjugaison dans $D_{2n}$ pour $n = 2017$ et $n = 2018$.

*Question (3)* Décrire tous les sous-groupes distingués de $D_{2n}$.

*Question (4)* Montrer que si un groupe $G$ agit transitivement sur un ensemble $X$, si $H$ est un sous-groupe distingué de $G$ et il existe $x \in X$ tel que $H \subset \mathrm{Stab}_G(x)$ alors l'action n'est pas fidèle (*indication : montrer que $H$ est contenu dans le noyau*).

*Question (5)* Déduire des deux questions précédentes que si $n$ est impair alors une action transitive de $D_{2n}$ sur un ensemble fini de cardinal pair et strictement inférieur à $2n$ ne peut pas être fidèle.

## Problème 4 (6 points)

*Question (1)* Combien y-a-t'il de 5-sous-groupes de Sylow dans le groupe symétrique $S_5$ ?

*Question (2.a)* Donner le cardinal d'un 3-sous-groupe de Sylow du groupe symétrique $S_6$.

*Question (2.b)* Un tel sous-groupe est-il forcément abélien ? Peut-il être cyclique ? (Justifier brièvement chaque réponse.)

*Question (2.c)* Donner un exemple de 3-sous-groupe de Sylow dans $S_6$.

*Question (2.d)* Quel est le nombre de 3-sous-groupes de Sylow dans $S_6$ ?

*Question (3.a)* Donner le cardinal d'un 3-sous-groupe de Sylow du groupe symétrique $S_9$.

*Question (3.b)* Un tel sous-groupe peut-il être abélien ? (Justifier la réponse)

*Question (3.c)* * Soient

$$\sigma = (1\,2\,3),\ \tau = (1\,4\,7)(2\,5\,8)(3\,6\,9).$$

Montrer que $\langle \sigma, \tau \rangle$ est un 3-sous-groupe de Sylow de $S_9$.