

CORRIGÉ CC1 EXERCICES 3, ALGÈBRE IV

Sujet A

Enoncé Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel, q une forme quadratique sur E , $v \in E$, $v \neq 0$ et F l'orthogonal de v pour q . Donner, en la justifiant par une démonstration, une condition nécessaire et suffisante sur v pour que $E = \mathbb{R} \cdot v + F$.

Solution Rappelons que l'orthogonal F de v pour q est défini par :

$$F = \{u \in E : b(u, v) = 0\}$$

où b est la forme polaire de q (l'unique forme bilinéaire symétrique telle que $b(w, w) = q(w)$ pour tout $w \in E$).

Commençons par traiter le cas où b est non-dégénérée. Alors $\ell = b(\cdot, v)$ est une forme linéaire non-nulle sur E et on a donc $\dim(\ker(\ell)) = \dim(E) - 1$ (en effet, ℓ est une application linéaire surjective $E \rightarrow \mathbb{R}$ et la formule du rang donne donc $\dim(\mathbb{R}) + \dim(\ker(\ell)) = \dim(E)$). En particulier on a

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(\mathbb{R}v). \quad (*)$$

D'autre part on a $E = F + \mathbb{R}v$ si et seulement si

$$\dim(E) = \dim(F + \mathbb{R}v) = \dim(F) + \dim(\mathbb{R}v) - \dim(F \cap \mathbb{R}v)$$

soit encore, d'après (*), $\dim(F \cap \mathbb{R}v) = 0$, ou encore $F \cap \mathbb{R}v = \{0\}$. Ce qui revient à $v \notin F$, et enfin par définition de F comme orthogonal de v à $q(v) = b(v, v) \neq 0$.

Traisons maintenant le cas où b peut être dégénérée. Alors il y a deux possibilités :

1. $v \notin \ker(b)$, auquel cas $\dim(F) = \dim(E) - 1$ et le raisonnement ci-dessus s'applique encore ;
2. $v \in \ker(b)$, auquel cas $F = E$ et on a donc bien $E = F + \mathbb{R}v$ (noter que la somme n'est pas directe dans ce cas).

Finalement, la condition nécessaire et suffisante est donc :

$$\text{On a } E = F + \mathbb{R}v \text{ si et seulement si } q(v) \neq 0 \text{ ou } v \in \ker(b)$$

Sujet B

Enoncé Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et b une forme bilinéaire sur E . Montrer que si F est un supplémentaire de $\ker(b)$ dans E alors $b|_{F \times F}$ est non-dégénérée.

Solution La forme bilinéaire $b|_{F \times F}$ sur F est non-dégénérée si et seulement si $\ker(B_{F \times F}) = \{0\}$, autrement dit :

$$\forall v \in F : (\forall u \in F b(u, v) = 0) \Rightarrow v = 0.$$

Soit donc $v \in F, v \neq 0$. On veut montrer qu'il existe un $u \in F$ tel que $b(u, v) \neq 0$. Par hypothèse F est un supplémentaire de $\ker(b)$ dans E et on a donc $\ker(b) \cap F = \{0\}$, en particulier $v \notin \ker(b)$. Il existe donc un $w \in E$ tel que $b(w, v) \neq 0$. Comme $E = \ker(b) + F$ il existe $u \in F$ et $u' \in \ker(b)$ tels que $w = u + u'$. Il vient alors :

$$b(v, w) = b(v, u + u') = b(v, u) + b(v, u') = b(v, u)$$

(la dernière égalité vient de ce que $u' \in \ker(b)$ donc $b(u', v) = 0$). On a donc $b(v, u) \neq 0$, ce qui finit la preuve vu que $u \in F$.

Sujet C

Enoncé Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4 et q une forme quadratique de signature $(2, 2)$ sur E . Soit $v \in E$ tel que $q(v) < 0$ et F l'orthogonal de v pour q . Montrer que $q|_F$ est de signature $(2, 1)$.

Solution Comme q est de signature $(2, 2)$ et $\dim(E) = 4$ on voit que la forme polaire b de q est non-dégénérée. Comme $q(v) \neq 0$ on a donc $E = \mathbb{R}v + F$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthogonale de F pour $q|_F$. Alors (v, e_1, e_2, e_3) est une base orthogonale de E pour q : en effet on a $q(v, e_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ parce que $e_i \in F = v^\perp$ et $q(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$ parce que (e_1, e_2, e_3) est orthogonale pour q .

Il suit que la signature de q est donnée par $(p, 4-p)$ où p est le nombre de réels strictement positifs parmi $q(v), q(e_1), q(e_2), q(e_3)$. On sait que $p = 2$ et il comme $q(v) < 0$ il suit donc qu'exactly deux des $q(e_i)$ sont > 0 , le restant étant alors forcément < 0 . La signature de $q|_F$, lue dans la base (e_1, e_2, e_3) , est donc $(2, 1)$.