

Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Table des matières

0	Rappels d'algèbre linéaire	2
0.1	Espaces vectoriels	2
0.2	Formes linéaires et hyperplans	3
0.3	Applications linéaires et matrices	4
1	Formes bilinéaires	7
1.1	Définitions	7
1.2	Calcul en coordonnées	8
1.3	Orthogonalité et isotropie	10
2	Formes quadratiques et quadriques	12
2.1	Formes quadratiques	12
2.2	Réduction des formes quadratiques	14
2.3	Formes quadratiques réelles	16
2.4	Quadriques	19
3	Espaces euclidiens	21
3.1	Définitions	21
3.2	Isométries	25
3.3	Opérateurs autoadjoints	27
4	Espaces hermitiens	34
4.0	Formes quadratiques sur les nombres complexes	34
4.1	Formes hermitiennes	34
4.2	Espaces hermitiens	39
4.3	Opérateurs autoadjoints	41
4.4	Espaces euclidiens et espaces hermitiens	43
5	Isométries des espaces euclidiens et hermitiens	44
5.1	Exemples	44
5.2	Structure des isométries	46
5.3	Groupes de matrices	50

Chapitre 0

Rappels d'algèbre linéaire

0.1 Espaces vectoriels

Soit K l'un des corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Un *espace vectoriel sur K* (souvent abrégé en *K -espace vectoriel*) est la donnée de :

- Un ensemble E , non-vidé ;
- Une application $E \times E \rightarrow E$ que l'on notera toujours $(x, y) \mapsto x + y$ (addition de vecteurs) ;
- Une application $K \times E \rightarrow E$ notée $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ ou λx (multiplication d'un vecteur par un scalaire).

On demande qu'elles vérifient les conditions suivantes :

- $\forall x, y, z \in E : (x + y) + z = x + (y + z)$ (« associativité ») et $x + y = y + x$ « commutativité » ;
- Il existe un élément distingué $0_E \in E$ tel que $\forall x \in E : x + 0_E = x$;
- $\forall \lambda, \mu \in K : \forall (x, y) \in E : \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$ et $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (ce qui force aussi $\forall \lambda \in K : \lambda \cdot 0_E = 0_E$).

La notion la plus importante dans la théorie des espaces vectoriels est celle d'indépendance ou de liberté. Si $x_1, \dots, x_n \in E$ sont des vecteurs on dit qu'ils sont *linéairement indépendants* (ou juste *indépendants*) si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ on a $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \neq 0$, sauf si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. On dit aussi que la famille (ordonnée) (x_1, \dots, x_n) est *libre*.

Un *sous-espace vectoriel* de E est un sous-ensemble F non-vidé stable par addition et multiplication par n'importe que scalaire (c'est-à-dire que $\forall x, y \in F : \forall \lambda \in K : \lambda \cdot x + y \in F$). Les deux opérations utiles sur les sous-espaces sont :

- la somme : si F_1, F_2 sont des sous-espaces de E alors le sous-ensemble $F_1 + F_2 = \{x + y : x \in F_1, y \in F_2\}$ est un sous-espace ;
- l'intersection $F_1 \cap F_2$ est aussi un sous-espace.

Si $S \subset E$ le *sous-espace engendré par S* est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient S , explicitement c'est l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ pour $x_1, \dots, x_n \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. On dit que S engendre E si ce dernier est égal à E ; on dit que E est de *dimension finie* s'il existe une famille finie qui engendre E .

Si $x_1, \dots, x_n \in E$ sont indépendants et $\{x_1, \dots, x_n\}$ engendre E (en particulier E est de dimension finie) alors la famille ordonnée (x_1, \dots, x_n) est appelée une *base* de E . Il est facile de voir

que toutes les bases ont la même longueur, que l'on appelle la *dimension* de E , notée $\dim(E)$. Un résultat fondamental de la théorie est le *théorème de la base incomplète* :

Théorème 0.1 *Si E est de dimension finie et $x_1, \dots, x_m \in E$ sont indépendants alors il existe $r \geq 0$ et x_{m+1}, \dots, x_{m+r} tels que (x_1, \dots, x_{m+r}) est une base de E .*

Si S engendre E alors il existe une base de E contenue dans S . En particulier tout espace de dimension finie admet une base.

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors pour tout $y \in E$ il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tel que $y = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. On appelle $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les *coordonnées* de x dans B ; les fonctions $y \mapsto \lambda_i$ sont souvent appelées fonctions coordonnées sur E (attachées à la base B).

0.2 Formes linéaires et hyperplans

Une *forme linéaire* sur E est une application $\ell : E \rightarrow K$ telle que $\forall \lambda \in K : \forall x, y \in E : \ell(x+y) = \ell(x) + \ell(y)$ et $\ell(\lambda \cdot x) = \lambda \ell(x)$. L'ensemble E^* des formes linéaires est naturellement un espace vectoriel avec l'addition et la multiplication point par point (c'est-à-dire $(\ell + m)(x) = \ell(x) + m(x)$ et $(\lambda \cdot \ell)(x) = \lambda \ell(x)$). Il est de dimension égale à celle de E : si B est une base de E alors la famille des fonctions coordonnées sur E attachées à B forme une base de E^* .

Si E est un espace vectoriel de dimension n un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Proposition 0.1

Si $\ell \in E^ \setminus \{0\}$ alors le sous-ensemble*

$$\ker(\ell) = \{x \in E : \ell(x) = 0\}$$

est un hyperplan de E , et $\ker(\ell) = \ker(m)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tel que $m = \lambda \ell$.

Réciproquement, si $H \subset E$ est un hyperplan alors il existe $\ell \in E^ \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker(\ell)$.*

Démonstration : Soit $\ell \in E^* \setminus \{0\}$; il est facile de vérifier que $H = \ker(\ell)$ est un sous-espace vectoriel, on va montrer qu'il est de dimension $n - 1$. Soit e_1, \dots, e_m une base de $H = \ker(\ell)$: on veut obtenir $m = \dim(E) - 1$. Soit $e_{m+1} \in E \setminus H$, on pose $\mu = \ell(e_{m+1}) \neq 0$. Soit $x \in E$, on pose $y = x - \ell(x)/\mu e_{m+1}$. Alors $y \in H$: en effet $\ell(y) = \ell(x) - (\ell(x)/\mu)\ell(e_{m+1}) = \ell(x) - \ell(x) = 0$. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ tels que $y = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m$, en posant $\lambda_{m+1} = \ell(x)/\mu$ on a donc $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{m+1} e_{m+1}$.

On a montré que $\{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ engendre E , il reste à montrer que les e_i sont indépendants pour conclure que $m + 1 = \dim(E)$. Pour ceci on suppose que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{m+1} e_{m+1} = 0$. Il vient :

$$0 = \ell(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{m+1} e_{m+1}) = \lambda_1 \ell(e_1) + \dots + \lambda_{m+1} \ell(e_{m+1}) = \lambda_{m+1} \mu$$

de sorte que $\lambda_{m+1} = 0$. Mais alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m = 0$ et comme (e_1, \dots, e_m) est libre il suit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Soit maintenant H un hyperplan de E . On va construire une forme linéaire ℓ telle que $H = \ker(\ell)$. Pour ce faire on choisit une base (e_1, \dots, e_m) de H que l'on complète par un vecteur $e_{m+1} \in E \setminus H$ en une base de E . Pour un vecteur $x \in E$ de coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1})$ on pose $\ell(x) = \lambda_{m+1}$: il est facile de vérifier que ℓ répond bien au problème. \square

0.3 Applications linéaires et matrices

0.3.1 Applications linéaires

Si E, F sont des K -espaces vectoriels une application $f : E \rightarrow F$ est dite *linéaire* si

$$\forall x, y \in E : \forall \lambda \in K : f(\lambda x) = \lambda f(x), f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(en particulier les formes linéaires sur E sont les applications linéaires $E \rightarrow K$). Le *noyau* de f est le sous-ensemble $\ker(f) := \{x \in E : f(x) = 0\}$ et l'image de f est le sous-ensemble $\text{im}(f) := f(E)$. Ce sont tous deux des sous-espaces vectoriels (de E et F respectivement).

Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est nul. Une propriété des applications linéaires parmi les plus importante est la formule du rang : si E est de dimension finie alors

$$\dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E).$$

En particulier, une application linéaire entre deux espaces de même dimension est bijective si et seulement si elle est injective *ou* surjective. L'entier $\dim(\text{im}(f))$ est appelé *le rang* de f , noté $\text{rg}(f)$.

Si $f : E_2 \rightarrow E_3$ et $g : E_1 \rightarrow E_2$ sont deux applications linéaires alors leur composée $f \circ g : E_1 \rightarrow E_3$ est encore linéaire, et si une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est bijective alors sa bijection inverse $f^{-1} : F \rightarrow E$ est aussi linéaire. Les images directes et préimages de sous-espaces vectoriels par des applications linéaires restent des sous-espaces vectoriels.

L'ensemble des applications linéaires $E \rightarrow F$ est un espace vectoriel de dimension $\dim(E) \dim(F)$, que l'on notera $\text{Hom}(E, F)$.

0.3.2 Matrices des applications linéaires

Une *matrice* de taille $m \times n$ sur K est un mn -uplet d'éléments de K indexés par $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$. Si $A = (a_{i,j})$ on la représente sous la forme d'un tableau à m lignes et n colonnes où l'entrée à l'intersection de la i -ème ligne et j -ième colonne est $a_{i,j}$. L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ est un K -espace vectoriel de dimension mn , que l'on notera $\mathcal{M}(m, n; K)$ ou $\mathcal{M}(m, n)$ si le corps de base est indiqué par le contexte, ou encore $\mathcal{M}(n)$ si $m = n$.

La multiplication de deux matrices $A \in \mathcal{M}(m, n), B \in \mathcal{M}(n, l)$ est la matrice C de taille $m \times l$ dont les coefficients sont donnés par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

cette multiplication est associative mais en général pas commutative.

Si $B = (e_i), C = (f_j)$ sont des bases de deux espaces vectoriels E, F de dimensions finies n, m et $\phi : E \rightarrow F$ est une application linéaire alors on définit sa matrice dans les bases B, C comme la matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\text{Mat}_B^C(\phi) = (\lambda_{i,j})_{i,j} \text{ si } \phi(e_j) = \sum_i \lambda_{i,j} f_i.$$

Ceci définit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\text{Hom}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}(m, n)$. On a la règle de composition

$$\text{Mat}_B^D(f \circ g) = \text{Mat}_C^D(f) \text{Mat}_B^C(g)$$

et la formule de changement de base :

$$\text{Mat}_{B'}^{C'}(f) = \text{Mat}_C^{C'}(\text{Id}) \text{Mat}_B^C(f) \text{Mat}_{B'}^B(\text{Id}).$$

Noter que $\text{Mat}_{B'}^B(\text{Id})$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans B des vecteurs de B' . En particulier, si $f \in \text{End}(E)$ on a

$$\text{Mat}_C^C(f) = P \text{Mat}_B^B(f) P^{-1}, \quad P = \text{Mat}_B^C(\text{Id}).$$

0.3.3 Déterminant

L'espace $\wedge^p E^*$ des applications multilinéaires alternées de degré p sur E est l'ensemble des applications $E^p \rightarrow K$ qui sont linéaires en chaque variable et telles que la permutation de deux variables change le signe. Autrement dit :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} : \forall x_1, \dots, x_p \in E, x'_i \in E, \lambda \in K :$$

$$f(x_1, \dots, x_i + \lambda x'_i, \dots, x_p) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_p)$$

et

$$\forall i < j \in \{1, \dots, p\} : \forall x_1, \dots, x_p \in E : f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p).$$

Si E est de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors l'application $\wedge^n E^* \rightarrow K$ donnée par

$$f \mapsto f(e_1, \dots, e_n)$$

est un isomorphisme, de sorte que $\dim(\wedge^n E^*) = 1$. En particulier toute application linéaire $\wedge^n E^* \rightarrow \wedge^n E^*$ est de la forme $f \mapsto \lambda f$ pour un $\lambda \in K$.

Si $\phi : E \rightarrow E$ est une application linéaire et $f \in \wedge^n E^*$ alors $\phi^* f(x_1, \dots, x_n) = f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$ définit une application linéaire $\wedge^n E^* \rightarrow \wedge^n E^*$. Il existe donc un $\lambda \in K$ tel que $\forall f \in \wedge^n E^* : \phi^* f = \lambda f$ et on définit le *déterminant* de ϕ par $\det(\phi) = \lambda$. On voit immédiatement que si ϕ, ψ sont des applications linéaires $E \rightarrow E$ alors $\det(\phi \circ \psi) = \det(\phi)\det(\psi)$. On peut aussi démontrer que $\det(\phi) = 0$ si et seulement si ϕ est bijective et qu'alors $\det(\phi^{-1}) = \det(\phi)^{-1}$.

Le déterminant d'une matrice de taille $N \times n$ peut être défini d'une manière similaire (unique application multilinéaire en les colonnes et changeant de signe lorsqu'on échange deux colonnes, et valant 1 sur la matrice identité) ou par une formule explicite qui fait apparaître ces propriétés :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

Il est alors clair que si B est une base de E et $\phi \in \text{End}(E)$ on a $\det(\phi) = \det(\text{Mat}_B^B(\phi))$. Ceci implique immédiatement que l'on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ si $A, B \in \mathcal{M}(n)$.

Pour une matrice 2×2 l'expression ci-dessus donne

$$\det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = ad - bc$$

si $n > 2$ elle n'est pas utilisée en pratique. Pour calculer un déterminant on utilise la réduction par pivot de Gauss pour se ramener au cas d'une matrice triangulaire.

Si $A \in \mathcal{M}(m, n)$ et $1 \leq k \leq \min(m, n)$ les k -mineurs de A sont les déterminants des matrices $k \times k$ de la forme $(a_{i_q, j_q})_{p, q=1, \dots, k}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$.

Il existe une formule donnant une expression pour l'inverse d'une matrice $n \times n$ en fonction de son déterminant et de ses $(n-1)$ -mineurs (« formule de la comatrice » ou « formule de Cramér »). Elle n'est pas efficace pour des calculs explicites dès que $n > 2$, par contre elle a une importance théorique appréciable ; pour $n = 2$ elle a la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ si } ad - bc \neq 0.$$

0.3.4 Réduction des applications linéaires

Si $f \in \text{End}(E)$ un scalaire $\lambda \in K$ est une *valeur propre de f sur K* si le sous-espace $\ker(f - \lambda \text{Id})$ est non nul, autrement dit s'il existe un $x \in E, x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$: un tel x est appelé un *vecteur propre* de f (pour la valeur propre λ). Si E est de dimension finie les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $\chi_f(t) := \det(f - t \text{Id})$, le *polynôme caractéristique* de f .

Une application linéaire f est dite *diagonalisable sur K* s'il existe une base de E composée de vecteurs propres sur K . En termes de matrices ceci signifie qu'il existe une base B de E telle que

$$\text{Mat}_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

S'il existe seulement une base où la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(où $*$ désigne des coefficients quelconques dans K) on dit que f est *trigonalisable sur K* .

Une application linéaire est trigonalisable sur K si et seulement si toutes les racines de son polynôme caractéristique sont dans K . En particulier, si $K = \mathbb{C}$ toute application linéaire est trigonalisable. En revanche toutes ne sont pas diagonalisables, comme le montre l'exemple de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont la seule valeur propre est 1 vu que $\chi_A(t) = (t - 1)^2$ mais qui vérifie $\dim \ker(A - \text{Id}) = 1$.

Chapitre 1

Formes bilinéaires

La notion de forme bilinéaire est une généralisation naturelle et utile de celle de produit scalaire sur un espace réel (qui sera étudiée plus en détail dans le chapitre 3). Une partie du vocabulaire concernant les formes bilinéaires est emprunté à ce cadre géométrique, mais les formes bilinéaires générales exhibent un comportement plus riche que les seuls produits scalaires et l'intuition géométrique associée n'est pas toujours fiable.

1.1 Définitions

Formes bilinéaires

Soit E un espace vectoriel sur K . Une *forme bilinéaire* sur E est une application $b : E \times E \rightarrow K$ telle que pour tout $v \in E$ les applications $b(v, \cdot) : u \mapsto b(v, u)$ et $b(\cdot, v) : u \mapsto b(u, v)$ soient des formes linéaires sur E . Autrement dit, pour tous $v, u, w \in E$ et $\lambda \in K$ on a :

$$b(v, \lambda u + v) = \lambda b(v, u) + b(v, v) \text{ et } b(\lambda u + w, v) = \lambda b(u, v) + b(w, v). \quad (1.1.1)$$

Qualités remarquables

Une forme bilinéaire b sur E est dite *symétrique* si pour tous $u, v \in E$ on a $b(u, v) = b(v, u)$. Elle est dite *antisymétrique* (ou *alternée*) si $\forall u, v \in E : b(u, v) = -b(v, u)$. Dans les chapitres suivants on se concentrera sur les formes symétriques.

La forme b est dite *non-dégénérée* si on a $b(\cdot, v) = 0$ si et seulement si $v = 0$. Autrement dit :

$$\forall v \in E : (\forall u \in E : b(u, v) = 0) \Rightarrow v = 0.$$

S'il existe un $v \in E$ tel que $b(\cdot, v) = 0$ on dit que la forme b est *dégénérée*.

Noyaux des formes bilinéaires

Le *noyau à droite* (respectivement *noyau à gauche*) de b est l'ensemble des $v \in E$ tels que $b(v, \cdot) = 0$ (respectivement $b(\cdot, v) = 0$, on les notera :

$$\ker^d(b) = \{v \in E : b(\cdot, v) = 0\} \text{ et } \ker^g(b) = \{v \in E : b(v, \cdot) = 0\}.$$

Proposition 1.1 *Les sous-ensembles $\ker^d(b)$ et $\ker^g(b)$ sont des sous-espaces vectoriels de E . De plus on a :*

$$\dim(\ker^d(b)) = \dim(\ker^g(b)).$$

La démonstration du fait que ce sont des sous-espaces vectoriels est naturelle. L'égalité des dimensions est plus difficile et on la démontrera à la section suivante en utilisant des propriétés connues des matrices.

Si b est symétrique ou antisymétrique ces deux espaces coïncident (en particulier l'énoncé ci-dessus est évident) et on donne à l'un ou l'autre le seul nom de *noyau* de b , que l'on notera $\ker(b)$.

Une conséquence de la proposition est qu'une forme bilinéaire est dégénérée si et seulement si son noyau à droite est non-nul ou son noyau à gauche est non-nul.

1.2 Calcul en coordonnées

1.2.1 Matrices des formes bilinéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $\dim(E) = n$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Si b est une forme bilinéaire sur E la matrice de b dans B est la matrice

$$\text{Mat}_B(b) = (b(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (1.2.1)$$

Proposition 1.2 *Soient $u, v \in E$ et X, Y les vecteurs colonnes des coordonnées respectives de u et v dans B . On note $M = \text{Mat}_B(b)$, on a alors :*

$$b(u, v) = {}^t X M Y. \quad (1.2.2)$$

Démonstration : Commençons par le démontrer pour les vecteurs de la base B : soient

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

les vecteurs coordonnées de e_1, \dots, e_n dans B . Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On notera $a_{ij} = b(e_i, e_j)$. On calcule que :

$${}^t E_i M E_j = E_i \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}$$

ce qui est exactement (1.2.2) dans ce cas. Soient maintenant $u, v \in E$ que l'on écrit

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$$

dans la base B . Par bilinéarité de f il vient :

$$\begin{aligned} b(u, v) &= b(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, v) = x_1 b(e_1, v) + \dots + x_n b(e_n, v) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j b(e_j, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = \sum_{j=1}^n x_j (y_1 b(e_j, e_1) + \dots + y_n b(e_j, e_n)) = \sum_{i,j=1}^n y_j x_i a_{ij}. \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$${}^t X M Y = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$$

qui est égal à $b(u, v)$ d'après le calcul précédent, ce qui finit la preuve de (1.2.2). \square

La démonstration de la proposition suivante est alors immédiate.

Proposition 1.3 *Soit $M = \text{Mat}_B(b)$. Les coordonnées des éléments de $\ker^d(b)$ (respectivement de $\ker^g(b)$) dans la base B sont exactement les vecteurs colonnes Y (respectivement X) tels que $MY = 0$ (respectivement ${}^t M X = 0$).*

Comme corollaire on peut donner une preuve de la proposition 1.1. En effet, on voit que la dimension de $\ker^d(b)$ est égale à la dimension du sous-espace $\ker(M) \subset \mathbb{K}^n$ (l'ensemble des vecteurs colonnes tels que $MX = 0$). On a alors $\text{rg}(M) = n - \dim(\ker(M)) = n - \dim(\ker^d(b))$. De la même manière on a $n - \dim(\ker^g(b)) = \text{rg}({}^t M)$. Mais on sait que $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^t M)$ (par exemple parce que $M, {}^t M$ ont les mêmes mineurs et que le rang est la taille maximale d'un mineur non-nul)¹.

La formule (1.2.2) montre immédiatement que la matrice dans la base B de la forme bilinéaire $(u, v) \mapsto b(v, u)$ est égale à la transposée ${}^t \text{Mat}_B(b)$. En particulier on voit que :

- La forme b est symétrique si et seulement si sa matrice $M = \text{Mat}_B(b)$ vérifie que ${}^t M = M$ (on dit alors aussi que M est une *matrice symétrique*);
- La forme b est antisymétrique si et seulement si sa matrice $M = \text{Mat}_B(b)$ vérifie que ${}^t M = -M$ (on dit alors aussi que M est une *matrice antisymétrique*).

1.2.2 Changement de base

Soient E, F deux K -espaces vectoriels de dimensions finies n, m et $B = e_1, \dots, e_n, C = f_1, \dots, f_m$ des bases respectives de E et F . Si $\phi : E \rightarrow F$ est une application linéaire et b une forme bilinéaire sur F on note b' la fonction sur $E \times E$ définie par :

$$b'(u, v) = b(\phi(u), \phi(v)).$$

On vérifie immédiatement que b' est une forme bilinéaire sur E .

La matrice de b' dans la base B est donnée par la formule :

$$\text{Mat}_B(b') = {}^t \text{Mat}_B^C(\phi) \text{Mat}_C(b) \text{Mat}_B^C(\phi). \quad (1.2.3)$$

On note $P = \text{Mat}_B^C(\phi)$, $M = \text{Mat}_C(b)$. Pour démontrer (1.2.3) il suffit de vérifier que

$$b(\phi(u), \phi(v)) = {}^t X ({}^t P M P) Y \quad (1.2.4)$$

1. devrait être inclus dans les rappels

pour tous $u, v \in E$ dont X, Y sont les vecteurs (colonnes) de coordonnées dans B . Pour ceci il suffit d'observer que PX, PY sont les vecteurs coordonnées de $\phi(u), \phi(v)$ dans la base C et que (1.2.4), qui se réécrit $b(\phi(u), \phi(v)) = {}^t(PX)M(PY)$ est donc une simple conséquence de la définition de $M = \text{Mat}_C(b)$.

Un cas particulier est la formule de changement de base que l'on obtient en prenant $E = F$ et $\phi = \text{Id}$. Dans ce cas $b = b'$ et $\text{Mat}_B^C(\text{Id})$ est la « matrice de passage » de C à B , dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs e_j dans la base C et on a :

$$\text{Mat}_B(b) = {}^t \text{Mat}_B^C(\phi) \text{Mat}_C(b) \text{Mat}_B^C(\phi). \quad (1.2.5)$$

1.3 Orthogonalité et isotropie

Dans cette section on suppose que b est une forme bilinéaire symétrique sur le K -espace vectoriel E . Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits *orthogonaux pour b* si $b(u, v) = 0$ (à cause de la symétrie ceci est équivalent à $b(v, u) = 0$). Un vecteur $v \in E$ est dit *isotrope pour b* s'il est orthogonal à lui-même, autrement dit $b(v, v) = 0$.

Si $S \subset E$ est un sous-ensemble l'orthogonal S^\perp de S pour b est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de S . Autrement dit :

$$S^\perp = \bigcap_{v \in S} \ker(b(v, \cdot)) = \{w \in E : \forall v \in S : b(v, w) = 0\}.$$

On a les propriétés suivantes :

- i) S^\perp est un sous-espace vectoriel de E ;
- ii) Si F est le sous-espace de E engendré par S alors $S^\perp = F^\perp$;
- iii) Si F est un sous-espace vectoriel de E on a $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) + \dim \ker(b) \cap F$;
- iv) Si $b|_{F \times F}$ est non-dégénérée (par exemple si F ne contient pas de vecteur isotrope) alors $E = F \oplus F^\perp$.

La démonstration des deux premières propriétés est laissée en exercice. Pour démontrer (1.3.iii), on choisit une base (ℓ_1, \dots, ℓ_d) de l'image $\Phi_b(F)$. Soient $e_1, \dots, e_d \in F$ tels que $\Phi_b(e_i) = \ell_i$ et $(e_{d+1}, \dots, e_{\dim(F)})$ une base de $\ker(\Phi_b) \cap F$. La propriété (1.3.ii) implique que :

$$F^\perp = \{u \in E : \forall i = 1, \dots, \dim(F) : b(u, e_i) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{\dim(F)} \{u \in E : b(u, e_i) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{\dim(F)} \ker(\Phi_b(e_i)).$$

Pour $i > d$ on a $e_i \in \ker(\Phi_b)$ et donc $\ker(\Phi_b(e_i)) = E$; pour $1 \leq i \leq d$ on a $\ker \Phi_b(e_i) = \ker(\ell_i)$. Il suit que

$$F^\perp = \bigcap_{i=1}^d \ker(\ell_i)$$

et comme la famille de formes linéaires (ℓ_1, \dots, ℓ_d) est libre on a, par le résultat de l'exercice ??, que $\dim(F^\perp) = \dim(E) - d$. Comme $d = \dim(\Phi_b(F)) = \dim(F) - \dim \ker(b) \cap F$ par la formule du rang appliquée à $\Phi_b|_F$ l'égalité voulue suit immédiatement.

Enfin, (1.3.iv) est une conséquence immédiate des deux faits suivants :

- Comme $b|_{F \times F}$ est non-dégénérée, $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ par (1.3.iii) ;

— On a $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Pour démontrer le second point soit $v \in F \cap F^\perp$: on a donc $\forall u \in F : b(v, u) = 0$, c'est-à-dire que $v \in \ker(b|_{F \times F})$. Mais par hypothèse $\ker(b|_{F \times F}) = \{0\}$, donc $v = 0$.

Chapitre 2

Formes quadratiques et quadriques

Dans toute cette section E, F désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies.

2.1 Formes quadratiques

Définition

Une fonction $q : E \rightarrow K$ est une *forme quadratique* s'il existe une forme bilinéaire b sur E telle que

$$q(v) = b(v, v) \quad (2.1.1)$$

pour tout $v \in E$. Si la forme bilinéaire b est symétrique on l'appelle *forme polaire* de q .

Toute forme quadratique admet une forme polaire : en effet, si $q(v) = b(v, v)$ on peut écrire $b = b_s + b_a$ avec b_s symétrique et b_a antisymétrique (voir l'exercice ??). On a alors

$$\forall v \in E : q(v) = b_s(v, v) + b_a(v, v) = b_s(v, v)$$

vu que l'on a $b_a(v, v) = -b_a(v, v)$, ce qui force $b_a(v, v) = 0$. Il suit que b_s est une forme polaire pour q . On verra à la fin de la section que cette forme polaire est unique.

Exemples

- i) Si $E = \mathbb{K}$ alors les formes quadratiques sur E sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2$ pour $a \in \mathbb{K}$.
- ii) .

Propriétés

Les propriétés des formes quadratiques qui se déduisent de la bilinéarité sont les suivantes : soit q une forme quadratique et b sa forme polaire.

- i) (Homogénéité) Si $v \in E, \lambda \in K$ on a

$$q(\lambda v) = \lambda^2 q(v).$$

- ii) Si $u, v \in E$ on a :

$$q(u + v) = q(u) + 2b(u, v) + q(v).$$

iii) (Polarisation) si $u, v \in E$ on a :

$$b(u, v) = \frac{1}{4} (q(u + v) - q(u - v)).$$

La propriété d'homogénéité 2.1.i) est immédiate :

$$q(\lambda v) = b(\lambda v, \lambda v) = \lambda b(v, \lambda v) = \lambda^2 b(v, v) = q(v).$$

La formule 2.1.ii) se démontre par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} q(u + v) &= b(u + v, u + v) = b(u, u + v) + b(v, u + v) \\ &= b(u, u) + b(u, v) + b(v, u) + b(v, v) = q(u) + 2b(u, v) + q(v) \end{aligned}$$

(noter qu'on utilise la symétrie pour la dernière égalité). La polarisation est une conséquence de 2.1.ii) :

$$\begin{aligned} q(u + v) - q(u - v) &= (q(u) + 2b(u, v) + q(v)) - (q(u) + 2b(u, -v) + q(-v)) \\ &= 2b(u, v) - 2 \times (-1)b(u, v) + (1 - (-1)^2)q(v) = 4b(u, v). \end{aligned}$$

Une conséquence de la polarisation est que la forme quadratique q associée à une forme bilinéaire b par (2.1.1) détermine cette dernière sans ambiguïté. Autrement dit l'application $b \mapsto q$ est une bijection entre les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques. On dira que q est non-dégénérée si b elle-même l'est.

Expression en coordonnées

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Si q est une forme quadratique, b sa forme polaire et on pose $a_{ij} = b(e_i, e_j)$ (autrement dit $\text{Mat}_B(b) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$) on a :

$$q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \sum_k a_{kk} x_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ij} x_i x_j. \quad (2.1.2)$$

Réciproquement, si on définit une fonction sur E par la formule :

$$q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \sum_k b_{kk} x_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j$$

alors c'est une forme quadratique sur E , dont la forme polaire b est déterminée par sa matrice $\text{Mat}_B(b) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où :

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{kk} & \text{si } i = j = k \\ \frac{b_{ij}}{2} & \text{si } i < j \\ \frac{b_{ji}}{2} & \text{si } i > j \end{cases}.$$

2.2 Réduction des formes quadratiques

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et q une forme quadratique donnée en coordonnées dans B par l'expression .

$$q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \sum_k b_{kk} x_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j.$$

Le but de cette section est de trouver une base $C = (f_1, \dots, f_n)$ dans laquelle on n'ait pas de doubles produits dans l'expression en coordonnées, autrement dit :

$$q(y_1 f_1 + \dots + y_n f_n) = a'_1 y_1^2 + \dots + a'_n y_n^2. \quad (2.2.1)$$

Du point de vue des formes bilinéaires, si b est la forme polaire de q et $M = \text{Mat}_B(b)$ on veut trouver une matrice inversible P telle que ${}^t P M P$ soit une matrice diagonale.

Algorithme de Gauss

L'algorithme de Gauss donne une solution générale au problème introduit dans le paragraphe précédent. Il fonctionne comme suit : il prend en entrée une forme quadratique q en des variables x_1, \dots, x_n (coordonnées dans une base B de E) et sort des nouvelles coordonnées y_1, \dots, y_n comme combinaisons linéaires des x_i , dans lesquelles la forme q s'exprime comme (2.2.1). C'est un algorithme récursif, dont les étapes sont les suivantes :

- i) Si $n = 0$ on s'arrête et on renvoie les coordonnées gardées en mémoire.
- ii) Sinon, et si $b_{11} \neq 0$, on pose :

$$y_1 = x_1 + \frac{b_{12}}{2b_{11}} x_2 + \dots + \frac{b_{1n}}{2b_{11}} x_n$$

de sorte que

$$q = b_{11} y_1^2 + q'$$

où q' est une forme quadratique en les variables x_2, \dots, x_n . On garde en mémoire y_1 et on itère alors l'algorithme sur la forme q' .

- iii) Si $b_{11} = 0$ mais l'un des $b_{kk}, 2 \leq k \leq n$ est non nul on échange les variables x_k et x_1 et on applique l'étape 2.2.ii).
- iv) Si $b_{kk} = 0$ pour $1 \leq k \leq n$ mais $b_{12} \neq 0$ on procède en deux étapes :
 - (a) on pose d'abord

$$z_1 = b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + \dots + b_{1n} x_n \text{ et } z_2 = b_{12} x_1 + b_{23} x_3 + \dots + b_{2n} x_n$$

de sorte que

$$q = \frac{1}{b_{12}} z_1 z_2 + q'$$

où q' est une forme quadratique en les variables x_3, \dots, x_n .

(b) On pose ensuite :

$$y_1 = z_1 + z_2 \text{ et } y_2 = z_1 - z_2$$

de sorte que :

$$q = \frac{1}{4b_{12}}y_1^2 - \frac{1}{4b_{12}}y_2^2 + q'.$$

On garde y_1, y_2 en mémoire et on itère l'algorithme sur q' .

- v) Si $b_{12} \neq 0$ mais $b_{kl} \neq 0$ pour des $1 \leq k < l \leq n$ on échange (x_1, x_2) avec (x_k, x_l) et on applique l'étape 2.2.iv).
- vi) Si $q = 0$ on s'arrête et on renvoie les coordonnées gardées en mémoire suivies des coordonnées restantes.

Il est clair que l'algorithme termine : les étapes 2-5 baissent chacune le nombre de variables de 1 ou 2 et si on ne tombe pas sur un reste nul entre-temps (auquel cas l'algorithme termine à l'étape 5) on se retrouve donc avec 0 variables en au plus n étapes.

La sortie de l'algorithme est un ensemble de formes linéaires y_1, \dots, y_n (exprimées comme combinaisons linéaires des x_i) et de coefficients a_1, \dots, a_n (exprimés en fonction des b_{ij}) tels que

$$q = a_1y_1^2 + \dots + a_ny_n^2.$$

Il reste à vérifier que les y_i sont bien des coordonnées dans une certaine base de E , ce qui suit de la proposition suivante.

Proposition 2.1 *Si x_1, \dots, x_n sont des coordonnées dans une base et on leur applique une des transformations décrites en 2.2.ii) ou 2.2.iv) ci-dessus alors le résultat est encore un système de coordonnées dans une base.*

Démonstration : Si avant d'appliquer l'étape 2.2.ii) on a une base (e_1, \dots, e_n) dans laquelle x_1, \dots, x_n sont les coordonnées alors (y_1, x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées dans la base :

$$\left(e_1, e_2 - \frac{b_{12}}{2b_{11}}e_1, \dots, e_n - \frac{b_{1n}}{2b_{11}}e_1 \right).$$

De même, si on applique l'étape 2.2.iv) alors $z_1, z_2, x_3, \dots, x_n$ sont les coordonnées dans la base

$$\left(e_1, e_2, e_3 - \frac{b_{13}}{b_{12}}e_1 - \frac{b_{23}}{b_{12}}e_2, \dots, e_n - \frac{b_{1n}}{b_{12}}e_1 - \frac{b_{2n}}{b_{12}}e_2 \right)$$

et $y_1, y_2, x_3, \dots, x_n$ dans la base

$$\left(\frac{1}{2}(e_1 + e_2), \frac{1}{2}(e_1 - e_2), e_3 - \frac{b_{13}}{b_{12}}e_1 - \frac{b_{23}}{b_{12}}e_2, \dots, e_n - \frac{b_{1n}}{b_{12}}e_1 - \frac{b_{2n}}{b_{12}}e_2 \right).$$

□

Exemples

i) Si $E = \mathbb{K}^2$ et $q = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ en coordonnées (x_1, x_2) dans la base canonique :

(a) On a un coefficient non-nul sur x_1^2 et on applique donc l'étape 2.2.ii) : on écrit $y_1 = (x_1 + x_2)$ et il vient :

$$q = y_1^2 + x_2^2.$$

(b) On applique ensuite l'étape 2.2.ii) à la forme $q' = x_2^2$ (ce qui revient seulement à poser $y_2 = x_2$

On a donc $q = y_1^2 + y_2^2$, en coordonnées (y_1, y_2) dans la base $(1, 0), (-1, 1)$. Matriciellement ceci revient à l'égalité :

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Si $E = \mathbb{K}^3$ et $q = 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$ en coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base canonique :

(a) Comme il n'y a pas de carré et le facteur de x_1x_2 est non-nul on applique l'étape 2.2.iv) : on pose

$$z_1 = (x_1 + x_3) \text{ et } z_2 = (x_2 + x_3), \quad y_1 = z_1 + z_2 \text{ et } y_2 = z_1 - z_2$$

et il vient :

$$q = 4z_1z_2 - 4x_3^2 = y_1^2 - y_2^2 - 4x_3^2.$$

(b) On applique ensuite l'étape 2.2.ii) en posant $y_3 = x_3$.

2.3 Formes quadratiques réelles

Dans toute cette section E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension n et q est une forme quadratique sur \mathbb{R} . On notera b sa forme polaire.

2.3.1 Bases orthonormées

Une *base orthonormée* de E pour q est une famille de vecteurs (e_1, \dots, e_n) telle que :

i) Si $i \neq j$ alors $b(e_j, e_i) = 0$;

ii) Pour $i = 1, \dots, n$ on a $|q(e_i)| = 1$.

Une telle famille est forcément libre, donc une base. En effet, si on a une relation

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$$

il vient pour $j = 1, \dots, n$:

$$0 = b \left(e_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b(e_j, e_i) = q(e_j) \lambda_j$$

d'où il suit que $\lambda_j = 0$ puisque $|q(e_i)| = 1$ et donc $q(e_i) \neq 0$.

Proposition 2.2 *Si q est non-dégénérée alors il existe une base orthonormale de E pour q .*

Démonstration : Soit (f_1, \dots, f_n) une base donnée par l'algorithme de Gauss 2.2, de sorte que l'on ait $b(f_i, f_j) = 0$ si $i \neq j$. On pose $q(f_i) = a_i$. On a alors forcément $a_i \neq 0$: en effet, comme q est non-dégénérée il existe un vecteur $v \in E$ tel que $b(f_i, v) \neq 0$. En écrivant $v = \sum_i x_i f_i$ il vient alors :

$$0 \neq \sum_{i=1}^n x_i b(f_i, f_j) = x_j q(f_j)$$

donc $a_i x_i \neq 0$, ce qui force $a_i \neq 0$. On pose alors

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} f_i$$

et il vient :

$$q(e_i) = \frac{1}{\sqrt{|a_i|}^2} q(f_i) = \frac{a_i}{|a_i|}$$

qui est égal à 1 en valeur absolue. On a aussi immédiatement que $b(e_i, e_j) = |a_i a_j|^{1/2} b(f_i, f_j) = 0$ et on voit donc que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée pour q . \square

Exemples

- i) Si $E = \mathbb{R}^2$ alors la base canonique $((1, 0), (0, 1))$ est orthonormée pour la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2$ et aussi pour $x_1^2 - x_2^2$.
- ii) Si $E = \mathbb{R}^2$ et $q = 2x_1 x_2$ alors la base $((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}))$ est orthonormée pour q .

2.3.2 Signature

Loi d'inertie de Sylvester

On suppose que q est *non-dégénérée* et on choisit une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) par q . On note :

$$p_+ = |\{i : q(e_i) = 1\}| \text{ et } p_- = |\{i : q(e_i) = -1\}|$$

de sorte que $p_+ + p_- = n$.

Théorème 2.1 *On a :*

$$p_+ = \max(\dim(V) : V \text{ est un s.e.v. de } E \text{ et } \forall v \in V \setminus \{0\} : q(v) > 0).$$

Démonstration : On commence par montrer que $p_+ \geq \dots$. Soit V un sous-espace de dimension $\dim(V) > p_+$, on veut trouver un vecteur $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $q(v) < 0$. Pour ceci on pose

$$W_- = \sum_{i:q(e_i)=-1} \mathbb{R}e_i.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E de dimension p_- . On a donc

$$\dim(V) + \dim(W_-) > p_+ + p_- = n$$

et on doit donc avoir $\dim(V \cap W_-) > 0$, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $v \in V \cap W_-$, $v \neq 0$. On écrit

$$v = \sum_{i:q(e_i)=-1} x_i e_i$$

où les x_i ne sont pas tous nuls, de sorte que $\sum_i x_i^2 > 0$, et il vient :

$$q(v) = \sum_{i:q(e_i)=-1} x_i^2 q(e_i) = - \sum x_i^2 < 0. \quad (2.3.1)$$

On a donc démontré l'énoncé :

$$(\dim(V) > p_+) \Rightarrow (\exists v \in V \setminus \{0\}, q(v) < 0)$$

dont la contraposée est

$$(\forall v \in V \setminus \{0\} : q(v) \geq 0) \Rightarrow (\dim(V) \leq p_+)$$

d'où l'inégalité voulue suit immédiatement.

Pour l'inégalité inverse on pose :

$$W_+ = \sum_{i:q(e_i)=1} \mathbb{R}e_i$$

qui est de dimension p_+ , et qui par un calcul similaire à (2.3.1) vérifie que $q(w) > 0$ pour $w \in W_+ \setminus \{0\}$. □

Définition

Soit q une form linéaire non-dégénérée. D'après le théorème 1 p_+ et $p_- = n - p_+$ ne dépendent pas de la base orthonormale pour q utilisée pour les définir. La *signature* de q est la paire (p_+, p_-) .

Remarques :

- Si B est une base quelconque de E et $M = \text{Mat}_B$ alors $\det(M)$ est du même signe que $(-1)^{p_-}$ (quand on change de base avec une matrice inversible P , il suit de (1.2.5) que le déterminant est multiplié par $\det({}^t P)\det(P) = \det(P)^2$ et ne change donc pas de signe, et si B est orthonormée on a $\det(M) = (-1)^{p_-}$). En particulier, si $\dim(E) = 2$ alors q est de signature $(2, 0)$ ou $(0, 2)$ si $\det(M) > 0$ et de signature $(1, 1)$ si $\det(M) < 0$.

Formes dégénérées

En général, la signature de q est par définition la signature de $q|_F$ où F est un supplémentaire de $\ker(b)$ dans E . Si elle est égale à (p_+, p_-) on a donc $p_+ + p_- + \dim \ker(b) = n$.

Pour la calculer, on applique l'algorithme de Gauss pour obtenir une base (e_1, \dots, e_n) où $\forall i \neq j : b(e_i, e_j) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} p_+ &= |\{i : q(e_i) > 0\}|, \\ p_- &= |\{i : q(e_i) < 0\}|, \\ \dim \ker(b) &= |\{i : q(e_i) = 0\}| \end{aligned}$$

2.4 Quadriques

Dans cette section E est un espace vectoriel réel de dimension n .

Définition

Une *quadrique* dans E est un sous-ensemble de la forme :

$$Q = \{v \in E : q(v) + \ell(v) = c\} \quad (2.4.1)$$

où q est une forme quadratique non-nulle sur E , ℓ est une forme linéaire sur E et $c \in \mathbb{R}$.

Exemples

i) La sphère unité :

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

est une quadrique.

ii) On munit le plan \mathbb{R}^2 des coordonnées polaires (r, θ) . Si C est une courbe donnée par une équation polaire $r = f(\theta)$ où f satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{1}{f} + \frac{d^2(1/f)}{d\theta^2} = c$$

pour un $c \in \mathbb{R}$ alors C est une quadrique. (L'équation différentielle correspond à l'approximation de l'équation de Newton pour un corps de masse négligeable se déplaçant dans un champ de gravité centré à l'origine, et décrit donc approximativement le mouvement des planètes dans un système solaire).

2.4.1 Réduction des quadriques

Proposition 2.3 *Soit Q une quadrique donnée par (2.4.1). Si $\ker(q) \subset \ker(\ell)$ (en particulier si q est non-dégénérée) il existe des coordonnées y_1, \dots, y_n sur E , de la forme $y_i = \sum_j a_{ij}x_j + b_i$ où x_1, \dots, x_n sont les coordonnées dans une base, telles que Q soit donnée par l'équation :*

$$y_1^2 + \dots + y_{p_+}^2 - y_{p_++1}^2 - \dots - y_{p_++p_-}^2 = 1$$

ou

$$y_1^2 + \dots + y_{p_+}^2 - y_{p_++1}^2 - \dots - y_{p_++p_-}^2 = 0.$$

Si on il existe de telles coordonnées telles que l'équation de q devienne :

$$y_1^2 + \dots + y_{p_+}^2 - y_{p_++1}^2 - \dots - y_{p_++p_-}^2 = y_{p_++p_-+1}.$$

Démonstration :

□

Remarques

— La paire (p_+, p_-) est donnée par la signature de q ou $-q$.

2.4.2 Coniques

Dans le cas où $\dim(E) = 2$ les quadriques de E sont aussi appelées coniques (parce qu'on peut les obtenir en intersectant un cône par des plans). On a trois possibilités pour la signature de q .

Signature $(2, 0)$ ou $(0, 2)$

Après réduction on obtient une équation de la forme

$$x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon$$

où $\varepsilon \in \{1, -1, 0\}$. Si $\varepsilon = 1$ on obtient une *ellipse*. Si $\varepsilon = 0$ la conique se réduit à un point. Si $\varepsilon = -1$ elle est vide.

Signature $(1, 1)$

Dans ce cas on se réduit à une équation de la forme

$$x_1^2 - x_2^2 = 1 \text{ ou } 0.$$

Si le second terme est égal à 1 on obtient une *hyperbole*, s'il est égal à 0 on obtient deux droites sécantes.

Signature $(1, 0)$ ou $(0, 1)$

Dans ce cas on se ramène à

$$x_1^2 = x_2$$

ce qui donne une *parabole*, ou

$$x_1^2 = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1$$

auquel cas on obtient respectivement une droite, ou un ensemble vide.

Chapitre 3

Espaces euclidiens

3.1 Définitions

3.1.1 Espaces euclidiens

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, q une forme quadratique sur E et b sa forme polaire. On dit que q ou b est *définie positive* si $q(v) = 0$ si et seulement si $v = 0$ et $q(v) \geq 0$ pour tout $v \in E$ (autrement dit, si $n = \dim(E)$ alors q est de signature $(n, 0)$). La forme bilinéaire b est alors appelée un *produit scalaire* sur E , et on utilisera le plus souvent la notation $b(u, v) = \langle u, v \rangle$; le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé un *espace euclidien*. La *norme euclidienne* $\| \cdot \|$ sur E est alors définie par

$$\|v\| = \sqrt{q(v)} = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Exemples

i) L'exemple fondamental est $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire défini par :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \text{ pour } x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n);$$

en effet, on a $\langle x, x \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. D'autres exemples sont :

ii) Pour $d \geq 0$, $E = \mathbb{R}_d[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

(voir l'exercice ??).

iii) Si $E = M_n(\mathbb{R})$ alors

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t B A)$$

définit un produit scalaire sur E (voir l'exercice ??).

Sous-espaces et orthogonalité

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La restriction de la forme quadratique $\|\cdot\|^2$ à F est aussi définie positive, en particulier elle est non-dégénérée. Par la propriété (1.3.iv)) on obtient alors le résultat suivant.

Proposition 3.1 *Si $F \subset E$ est un sous-espace d'un espace euclidien alors $E = F \oplus F^\perp$.*

3.1.2 Bases orthonormées

Dans le cadre des espaces euclidiens les notions vues plus haut pour des formes quadratiques générales prennent une forme particulièrement simple. Une base e_1, \dots, e_n est orthonormée si et seulement si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\|e_i\|^2 = 1$ (si on a seulement la première condition on dit qu'elle est *orthogonale*). Par la proposition 2.2 il existe toujours des bases orthonormées dans un espace euclidien.

L'algorithme de Gauss devient aussi plus simple dans ce cadre, puisque l'étape (2.2.iv)) n'est jamais utilisée. En pratique on utilise directement l'algorithme dual, que l'on appelle dans ce cadre *algorithme de Gram-Schmidt*, c'est-à-dire que l'on travaille directement avec des bases plutôt qu'avec les coordonnées associées. Plus précisément, pour obtenir une base orthonormée à partir d'une base quelconque f_1, \dots, f_n on définit récursivement à partir de $e'_1 = f_1$:

$$e'_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle e'_i, f_{k+1} \rangle}{\|e'_i\|^2} e'_i \quad (3.1.1)$$

et finalement $e_i = e'_i / \|e'_i\|$. La base (e_1, \dots, e_n) est alors orthonormée et a la propriété que e_1, \dots, e_k engendrent le même sous-espace que f_1, \dots, f_k pour $k = 1, \dots, n$.

Vérifions que les vecteurs e'_i définis par (3.1.1) sont bien orthogonaux. On procède naturellement par récurrence : on suppose que pour $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$ on a $\langle e'_i, e'_j \rangle = 0$ (pour $k = 1$ cet énoncé est vrai puisqu'il ne s'applique pas). Si $k \geq l$ on a alors :

$$\begin{aligned} \langle e'_{k+1}, e'_l \rangle &= \left\langle f_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle e'_i, f_{k+1} \rangle}{\|e'_i\|^2} e'_i, e'_l \right\rangle \\ &= \langle f_{k+1}, e'_l \rangle - \sum_{i=1}^k \frac{\langle e'_i, f_{k+1} \rangle}{\|e'_i\|^2} \langle e'_i, e'_l \rangle \\ &= \langle f_{k+1}, e'_l \rangle - \frac{\langle e'_l, f_{k+1} \rangle}{\|e'_l\|^2} \langle e'_l, e'_l \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Calcul dans les base orthonormées

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et $u, v \in E$ ont pour coordonnées respectives (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) dans B on a par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

En particulier, si $w \in E$ les coordonnées de w dans B sont $(\langle e_1, w \rangle, \dots, \langle e_n, w \rangle)$.

Il suit que si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (E', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ sont des espaces euclidiens munis de bases orthogonales $B = (e_1, \dots, e_n), B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ et ϕ est une application linéaire de E dans E' alors la matrice de ϕ est donnée par :

$$\text{Mat}_B^{B'}(\phi) = (\langle \phi(e_j), e'_i \rangle')_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}. \quad (3.1.2)$$

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

Soit (f_1, f_2, f_3) la base canonique. L'algorithme de Gram–Schmidt nous donne comme base orthogonale obtenue à partir de celle-ci la famille (e'_1, e'_2, e'_3) où :

$$\begin{aligned} e'_1 &= f_1, \\ e'_2 &= f_2 - \frac{\langle f_1, f_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1, \\ e'_3 &= f_3 - \frac{\langle f_1, f_3 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle e'_2, f_3 \rangle}{\|e'_2\|^2} e'_2. \end{aligned}$$

On voit que $\langle f_1, f_2 \rangle = 1$ et donc $e'_2 = f_2 - f_1$. On a alors

$$\langle e'_2, f_3 \rangle = \langle f_2, f_3 \rangle - \langle f_1, f_3 \rangle = 1 - 1 = 0$$

et il suit que $e'_3 = f_3 - f_1$. On calcule que

$$\|e'_2\|^2 = \|f_2\|^2 - 2\langle f_2, f_1 \rangle + \|f_1\|^2 = 2 - 2 + 1 = 1$$

et de même $\|e'_3\|^2 = 1$. Il suit que $(e_1, e_2, e_3) = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormée. Les coordonnées d'un vecteur $v = (x_1, x_2, x_3)$ dans cette base sont

$$(x_1 + x_2 + x_3, x_2, x_3)$$

(on peut vérifier que ce sont bien les coordonnées obtenues en appliquant l'algorithme de Gauss à la forme quadratique $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$).

3.1.3 Inégalité de Cauchy–Schwarz

Dans cette section $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien et $\|\cdot\|$ sa norme. Le résultat le plus important sur les espaces euclidiens est l'inégalité suivante, qui porte le nom de Cauchy–Schwarz (ou parfois seulement Schwarz).

Théorème 3.1 Soient $u, v \in E$ on a :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$ ou $u = \lambda v$ (u et v sont colinéaires).

Démonstration : On va donner deux preuves de l'inégalité. Pour la première on commence par remarquer que si $a, b \in \mathbb{R}$ on a $(a - b)^2 \geq 0$, d'où il suit que

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad (3.1.3)$$

avec égalité si et seulement si $a = b$. On peut en déduire immédiatement l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle^2 &= (x_1y_1 + x_2y_2)^2 = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1y_1x_2y_2 \\ &\leq x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = \|x\|^2\|y\|^2 \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $x_1x_2 = y_1y_2$, autrement dit si et seulement si x, y sont colinéaires. La même preuve peut être utilisée pour tout espace euclidien E et paire de vecteurs $u, v \in E$: il suffit de choisir une base orthonormée e_1, \dots, e_n telle que $u, v \in \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ (ce qui est possible par l'algorithme de Gauss/Gram–Schmidt). En calculant dans cette base seuls les deux premières coordonnées sont utilisées et on peut refaire les étapes ci-dessus. Explicitement, si $u = x_1e_1 + x_2e_2$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2$ on a :

$$\langle u, v \rangle^2 = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2.$$

On peut aussi faire un calcul en coordonnées dans n'importe quelle base en utilisant (3.1.3) de la même manière.

La seconde preuve utilise le polynôme du second degré :

$$f(T) = \|Tu + v\|^2 = \|u\|^2T^2 + 2\langle u, v \rangle T + \|v\|^2.$$

Comme le produit scalaire est défini positif, on a $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (et $f(t) > 0$ si u, v ne sont pas colinéaires). Il suit que le discriminant Δ de f doit être positif (strictement positif si u, v ne sont pas colinéaires). On a donc :

$$4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \geq 0$$

avec inégalité stricte si u, v ne sont pas colinéaires, ce qui termine la preuve. \square

Une conséquence utile de l'inégalité de Cauchy–Schwarz est l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne, qui exprime rigoureusement le fait intuitivement évident que la somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est forcément plus grande que la longueur du côté restant.

Proposition 3.2 *Soient $u, v \in E$. On a :*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Démonstration : Ceci suit d'un calcul simple en utilisant Cauchy–Schwarz :

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

\square

3.2 Isométries

Définition

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $(E', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ des espaces euclidiens. Une application linéaire $\phi : E \rightarrow E'$ est une *isométrie* entre les espaces euclidiens si elle est surjective et :

$$\forall u, v \in E : \langle \phi(u), \phi(v) \rangle' = \langle u, v \rangle. \quad (3.2.1)$$

Par la formule de polarisation (2.1.iii) il est équivalent de demander que $\forall v \in E : \|\phi(v)\|' = \|v\|$.

Une application linéaire pas forcément surjective vérifiant (3.2.1) est parfois appelée un *plongement isométrique*.

Propriétés

- i) Soit $\phi : E \rightarrow E'$ une isométrie. Si B est une base orthonormée de E alors $\phi(B)$ est une base orthonormée de E' . En particulier, s'il existe une isométrie $E \rightarrow E'$ alors $\dim(E) = \dim(E')$.
- ii) Si B, B' sont des bases orthonormées respectives de E, E' il existe une unique isométrie $\phi : E \rightarrow E'$ telle que $\phi(B) = B'$.
- iii) Si $E \xrightarrow{\phi} E' \xrightarrow{\psi} E''$ sont des isométries alors $\psi \circ \phi : E \rightarrow E''$ est une isométrie.
- iv) Si $\phi : E \rightarrow E'$ est une isométrie alors ϕ est inversible et $\phi^{-1} : E' \rightarrow E$ est une isométrie.

Les démonstrations sont laissées en exercice.

3.2.1 Matrices des isométries

Proposition 3.3 Soient E, E' des espaces euclidiens, B, B' des bases orthonormées et $n = \dim(E)$, $m = \dim(E')$. Soit $\phi : E \rightarrow E'$ une application linéaire et $P = \text{Mat}_B^{B'}(\phi) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Alors ϕ est un plongement isométrique si et seulement si :

$${}^t P \cdot P = 1_n.$$

En particulier, si $\dim(E) = \dim(E')$ alors ϕ est une isométrie si et seulement si ${}^t P = P^{-1}$.

Démonstration : La matrice identité 1_n est la matrice de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base orthonormée B . D'après (1.2.3) la matrice ${}^t P P = {}^t P 1_m P$ est la matrice de la forme bilinéaire $\langle \phi(\cdot), \phi(\cdot) \rangle'$ dans la base B . La définition (3.2.1) pour ϕ est équivalente à l'égalité de ces deux formes bilinéaires, donc ϕ est une isométrie si et seulement si ${}^t P P = 1_n$.

On peut aussi donner une preuve par un calcul direct (ce qui revient à refaire dans ce contexte les calculs menant à (1.2.3)). Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = {}^t P P$ alors d'après (3.1.2) la condition $\langle \phi(e_i), \phi(e_j) \rangle' = \langle e_i, e_j \rangle = 0$ revient à $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et la condition $\|\phi(e_i)\|'^2 = \|e_i\|^2 = 1$ revient à $a_{i,i} = 1$. \square

3.2.2 Exemples

- i) L'identité Id_E et $-\text{Id}_E$ sont toujours des isométries de E .
- ii) Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et $B = (e_1, e_2)$ la base canonique. Alors une application linéaire $\phi : E \rightarrow E$ est une isométrie si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ et

$$\text{Mat}_B^B(\phi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

En effet, si on pose $\phi(e_1) = (a, b)$ alors par la condition $\langle \phi(e_1), \phi(e_2) \rangle = 0$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(e_2) = (-\lambda b, \lambda a)$. Comme $\|\phi(e_1)\|^2 = \|\phi(e_2)\|^2 = 1$ il vient $a^2 + b^2 = 1$ puis $\lambda^2 = 1$, donc $\lambda = \pm 1$.

On peut écrire $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$ pour un unique $\theta \in [0, 2\pi[$. Les isométries de E sont donc paramétrées par

$$(\theta, \varepsilon) \in [0, 2\pi[\times \{1, -1\} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (\theta = \pi, \varepsilon = 1), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (\theta = 0, \varepsilon = -1), \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\theta = \pi/2, \varepsilon = 1), \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\theta = \pi/2, \varepsilon = -1), \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} (\theta = \pi/4, \varepsilon = 1), \dots$$

ou encore :

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

- iii) Si $\dim(E) = 3$, une application linéaire dont la matrice dans une base orthonormée est

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

est une isométrie. Soit $a > 0$ tel que $a^2 + a - 1 = 0$, l'application linéaire dont la matrice dans une base orthonormée est :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & -a-1 & 1 \\ a+1 & 1 & a \\ -1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

est aussi une isométrie.

- iv) Soit $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ une bijection. Soit E un espace euclidien et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors l'application linéaire $\phi : E \rightarrow E$ telle que $\phi(e_i) = e_{\sigma(i)}$ est une isométrie. Par exemple si $n = 3$ et σ est la permutation cyclique $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$ sa matrice dans B est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 Opérateurs autoadjoints

Dans cette section $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

3.3.1 Définitions

Proposition 3.4 Soit $\phi : E \rightarrow E$ une application linéaire. Il existe une unique application linéaire $\phi^* : E \rightarrow E$ telle que :

$$\forall u, v \in E : \langle \phi(u), v \rangle = \langle u, \phi^*(v) \rangle. \quad (3.3.1)$$

Démonstration : On va donner deux preuves de ce résultat, l'une abstraite et l'autre utilisant les coordonnées. Pour la première on introduit $\Phi : E \rightarrow E^*$, l'isomorphisme donnée par $u \mapsto \langle u, \cdot \rangle$. On peut alors réécrire (3.3.1) comme

$$\forall v \in E : \Phi(v) \circ \phi = \Phi(\phi^*(v))$$

ce qui, vu que Φ est un isomorphisme, détermine uniquement ϕ^* en posant $\phi^* = \Phi^{-1} \circ \omega_\phi \circ \Phi$ où $\omega_\phi(\ell)(u) = \ell(\phi(u))$.

Pour la seconde on choisit une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E . La matrice de ϕ dans M est alors donnée par $\text{Mat}_B(\phi) =: M = (m_{i,j})$ où :

$$m_{i,j} = \langle \phi(e_i), e_j \rangle.$$

La condition (3.3.1) est alors équivalente à

$$\forall i, j : \langle \phi(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, \phi^*(e_j) \rangle$$

et l'application linéaire ϕ^* est donc uniquement déterminée en posant $\text{Mat}_B(\phi)^* = {}^t M$. \square

Parmi les propriétés immédiates des opérateurs autoadjoints on a les deux suivantes.

- i) Soit B une base orthonormée de E . Un endomorphisme ϕ est autoadjoint si et seulement si $\text{Mat}_B(\phi)$ est une matrice symétrique.
- ii) Soit ϕ un endomorphisme autoadjoint de E et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que $\phi(F) \subset F$. Alors on a également $\phi(F^\perp) \subset F^\perp$.

La caractérisation (3.3.i)) est une conséquence immédiate de la seconde démonstration de la proposition 3.4.

Démontrons maintenant (3.3.ii)). Pour ceci il faut montrer, sous les hypothèses données, que si $v \in F^\perp$ alors $\phi(v) \in F^\perp$. Supposons donc que $v \in F^\perp$, c'est-à-dire que $\langle w, v \rangle = 0$ pour tout $w \in F$, et que $u \in F$. Vu que ϕ est autoadjoint on a $\langle u, \phi(v) \rangle = \langle \phi(u), v \rangle$, et comme d'autre part $\phi(F) \subset F$ on a $\phi(u) \in F$ et donc $\langle \phi(u), v \rangle = 0$. Donc $\langle u, \phi(v) \rangle = 0$ pour tout $u \in F$, c'est-à-dire que $\phi(v) \in F^\perp$.

Exemples

Via la caractérisation (3.3.i)) il est facile de construire des exemples d'opérateurs autoadjoints par des expressions en coordonnées. Il existe aussi des exemples plus naturels.

- i) On étudiera plus bas une famille d'exemples intéressants, les projecteurs orthogonaux (voir la section 3.3.3.
- ii) .

3.3.2 Diagonalisabilité

Théorème spectral

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $\psi : E \rightarrow E$ une application linéaire on dit que B diagonalise ψ si chaque e_i est un vecteur propre pour ψ , autrement dit il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\psi(e_i) = \lambda_i e_i$.

Théorème 3.2 Soit E un espace euclidien et ϕ un endomorphisme autoadjoint de E . Il existe une base orthonormée de E diagonalisant ϕ .

Démonstration : On commence par se ramener à l'énoncé suivant : sous les hypothèses du théorème, ϕ a un vecteur propre non nul dans E . En effet, supposons que cette proposition soit démontrée. On va alors en déduire le théorème par récurrence sur $\dim(E)$. Pour $\dim(E) = 1$ tout endomorphisme est autoadjoint et tout vecteur est un vecteur propre. Il faut donc démontrer que si le théorème est vrai pour tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ alors il l'est aussi pour un endomorphisme autoadjoint ϕ d'un espace E de dimension $n + 1$.

On utilise alors l'existence d'un vecteur propre : soit $v \in E$ tel que $v \neq 0$ et $\phi(v) = \lambda v$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $D = \mathbb{R}v$ la droite engendrée par v et $E' = D^\perp$. On a $E = E' \oplus D$, donc $\dim(E') = n$. D'autre part, comme $\phi(D) \subset D$ on a par la propriété (3.3.ii) que $\phi(E') \subset E'$. La restriction $\phi' = \phi|_{E'}$ est donc un endomorphisme de l'espace euclidien E' , qui est également autoadjoint. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E' formée de vecteurs propres pour ϕ . Soit $e_{n+1} = v/\|v\|$; on a $\|e_{n+1}\| = 1$, $\langle e_i, e_{n+1} \rangle = 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et e_{n+1} est un vecteur propre de ϕ . Il suit que (e_1, \dots, e_{n+1}) est une base orthonormée de E qui satisfait à la conclusion du théorème pour ϕ .

Passons maintenant à la démonstration de l'existence d'un vecteur propre. On va l'obtenir en étudiant la fonction suivante :

$$f(v) = \langle \phi(v), v \rangle$$

sur le sous-ensemble

$$S = \{v \in E : \|v\| = 1\}.$$

La fonction f est continue sur S (ceci suit de la continuité de f et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz). On sait d'autre part que S est compact (voir l'exercice (??)). Par le théorème de Heine, il existe donc un maximum pour f sur S : un vecteur $v \in S$ tel que $f(u) \leq f(v)$ pour tout $u \in S$. On va montrer qu'un tel v est un vecteur propre pour ϕ , de valeur propre $\lambda = f(v)$.

Soit $w = \phi(v) - \lambda v$: on veut montrer que $w = 0$. On commence par remarquer que w est orthogonal à v ; en effet :

$$\langle w, v \rangle = \langle \phi(v), v \rangle - \lambda \|v\|^2 = \lambda - \lambda = 0.$$

Soit maintenant $u \in v^\perp$ et $t > 0$. On pose :

$$u(t) = \frac{v + tu}{\|v + tu\|} \in S.$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle \phi(v) + t\phi(u), v + tu \rangle &= f(v) + t(\langle \phi(u), v \rangle + \langle \phi(v), u \rangle) + t^2 f(u) = f(v) + 2t\langle \phi(v), u \rangle + t^2 f(u) \\ &= f(v) + 2\langle u, w \rangle t + t^2 f(u). \end{aligned}$$

En utilisant des développements limités classiques on voit alors que :

$$\begin{aligned}
f(u(t)) &= \frac{1}{\|v + tu\|^2} \langle \phi(v) + t\phi(u), v + tu \rangle \\
&= \frac{1}{1 + t^2\|u\|^2} (\langle \phi(v), v \rangle + \langle \phi(v), tu \rangle + t \langle t\phi(u), v \rangle + t^2 \langle \phi(u), u \rangle) \\
&\stackrel{t \rightarrow 0}{=} (f(v) + 2\langle u, w \rangle t + t^2 f(u)) (1 - t^2\|u\|^2 + O(t^4)) \\
&= f(v) + 2\langle u, w \rangle t + O(t^2).
\end{aligned}$$

Comme $u(t) \in S$ on a $f(u(t)) \leq f(v)$. En prenant t assez proche de 0 il suit de la dernière asymptotique ci-dessus que l'on doit avoir $\langle u, w \rangle \leq 0$. Mais en prenant $u = w$ on obtient que $\|w\|^2 \leq 0$, ce qui force $w = 0$. \square

Formulation matricielle

En termes de matrices le théorème spectral 2 se réécrit comme suit.

Théorème 3.3 *Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Il existe une matrice orthogonale $U \in O(n)$ telle que tUMU soit diagonale.*

Démonstration : Ce théorème est bien sûr une conséquence immédiate du théorème 2, en écrivant la formule de changement de base pour la matrice de l'endomorphisme de \mathbb{R}^n donné dans la base canonique par M , vers une base orthonormée le diagonalisant. On va aussi en donner une preuve directe, plus algébrique.

Par le même argument que dans la démonstration du théorème 2 il suffit de démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$ tels que $MX = \lambda X$. Comme le polynôme caractéristique de M a une racine sur \mathbb{C} on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et un vecteur colonne $Z \in \mathbb{C}^n, Z \neq 0$ tels que $MZ = \lambda Z$. On va démontrer que l'on a en fait $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour une matrice ou un vecteur $A = (a_{i,j})$ on note \bar{A} la matrice ou le vecteur dont les entrées sont $\bar{a}_{i,j}$. On note que le scalaire ${}^t\bar{Z} \cdot Z$ est non-nul, vu qu'il est égal à $\sum_i |z_i|^2$ où z_1, \dots, z_n sont les entrées de Z . On a alors :

$$\lambda = \frac{{}^t\bar{Z} \cdot M \cdot Z}{{}^t\bar{Z} \cdot Z}.$$

On a alors :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{{}^t({}^t\bar{Z} \cdot Z)} {}^t(\overline{{}^t\bar{Z} \cdot M \cdot Z}) = \frac{{}^t\bar{Z} \cdot {}^t\bar{M} \cdot Z}{{}^t\bar{Z} \cdot Z}$$

(la première égalité vient de ce que l'on ne change pas les matrices 1×1 , ${}^t\bar{Z} \cdot M \cdot Z$ et ${}^t\bar{Z} \cdot Z$, en les transposant ; la seconde vient de ce que la transposition change l'ordre des produits). Mais comme ${}^t\bar{M} = M$ on obtient finalement que :

$$\bar{\lambda} = \frac{{}^t\bar{Z} \cdot M \cdot Z}{{}^t\bar{Z} \cdot Z} = \lambda$$

c'est-à-dire que $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui finit la démonstration. \square

3.3.3 Projecteurs orthogonaux

Projecteurs en général

Un projecteur (dans E) est une application linéaire $\pi : E \rightarrow E$ vérifiant l'une des conditions équivalentes suivantes :

- i) $\pi \circ \pi = \pi$;
- ii) $E = \ker(\pi) \oplus \text{im}(\pi)$ et $\pi(u) = u$ pour tout $u \in \text{im}(\pi)$.

La seconde caractérisation donne une construction explicite de tous les projecteurs : si on a une désomposition en somme directe $E = F \oplus F'$ alors l'application π définie par $\pi(v) = w$ si $v = w + u$ avec $w \in F$ et $u \in F'$ est un projecteur d'image F et noyau F' .

Projecteurs orthogonaux

Soit $F \subset E$ un sous-espace de E . Par la proposition 3.1 on a $E = F \oplus F^\perp$. On peut donc définir comme ci-dessus le projecteur sur F parallèlement à F^\perp . On appelle π la *projection orthogonale* sur F .

Proposition 3.5 *Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est autoadjoint.*

Démonstration : Supposons que π soit autoadjoint. Soient $F = \text{im}(\pi)$ et $F' = \ker(\pi)$; on veut montrer que $F' = F^\perp$. Comme $E = F \oplus F'$ il suffit de montrer que F et F' sont orthogonaux, autrement dit que $\langle u, v \rangle = 0$ pour $u \in F, v \in F'$. Pour ceci on remarque que $\pi(v) = 0$ et $\pi(u) = u$ et donc par la propriété d'auto-adjonction on a donc :

$$\langle u, v \rangle = \langle \pi(u), v \rangle = \langle u, \pi(v) \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0.$$

Supposons maintenant que $\text{im}(\pi) = \ker(\pi)^\perp$, on veut montrer que $\langle \pi(u), v \rangle = \langle u, \pi(v) \rangle$ pour $u, v \in E$. On écrit $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2$ avec $u_1, v_1 \in \ker(\pi)$ et $u_2, v_2 \in \text{im}(\pi)$. On a alors :

$$\langle \pi(u), v \rangle = \langle u_2, v_1 + v_2 \rangle = \langle u_2, v_2 \rangle = \langle u_2 + u_1, v_2 \rangle = \langle u, \pi(v) \rangle$$

ce qui finit la démonstration. □

3.3.4 Propriétés diverses de l'adjonction

Soient ϕ, ψ des endomorphismes de E .

- i) Si $t \in \mathbb{R}$ on a $(\phi + t\psi)^* = \phi^* + t\psi^*$.
- ii) On a $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.
- iii) On a $(\phi^*)^* = \phi$.
- iv) Si χ_ϕ, χ_{ϕ^*} sont les polynômes caractéristiques respectifs de ϕ, ϕ^* alors $\chi_\phi = \chi_{\phi^*}$.
- v) On a $\ker(\phi^*) = \text{im}(\phi)^\perp$ et $\text{im}(\phi^*) = \ker(\phi)^\perp$.

Les preuves de (i)–(iii) sont laissées en exercice (on peut utiliser pour chaque propriété la définition de l'adjoint ou la propriété correspondante de la transposition). Pour démontrer (iv) on remarque que si $\phi^*(u) = 0$ alors

$$\forall v \in E : \langle \phi(v), u \rangle = \langle v, \phi^*(u) \rangle = 0$$

c'est-à-dire que $u \in \text{im}(\phi)^\perp$. Réciproquement, si $\langle \phi(v), u \rangle = 0$ pour tout v alors $\langle v, \phi^*(u) \rangle = 0$ pour tout v et donc $\phi^*(u) = 0$.

3.3.5 Compléments sur les projecteurs

Distance d'un vecteur à un sous-espace

Proposition 3.6 Soient $v \in E$ et $F \subset E$ est un sous-espace, alors il existe un unique vecteur $w \in F$ qui minimise $\|v - w\|^2$, et on a $w = \pi(v)$ où π est la projection orthogonale sur F .

Démonstration : On pose $W = \pi(v)$ et on veut voir que si $w' \in F$ et $w' \neq w$ alors $\|v - w'\|^2 > \|v - w\|^2$. Pour ceci on pose $u = v - w$: par définition de π on a $u \in F^\perp$. Il vient :

$$\|v - w'\|^2 = \|(v - w) + (w - w')\|^2 = \|v - w\|^2 + 2\langle u, w - w' \rangle + \|w - w'\|^2$$

et comme $w - w' \in F$ il vient

$$\|v - w'\|^2 = \|v - w\|^2 + \|w - w'\|^2.$$

Le côté droit est strictement plus grand que $\|v - w\|^2$ vu que $w - w' \neq 0$ et donc $\|w - w'\|^2 > 0$, ce qui finit la preuve. \square

La norme $\|v - \pi(v)\|$ est appelée la *distance de v à F* et on la note souvent

$$d(v, F) = \|v - \pi(v)\| = \inf_{w \in F} \|v - w\|.$$

Projection sur les sous-espaces propres

Une autre façon d'énoncer le théorème spectral est la suivante.

Proposition 3.7 Si ϕ est un endomorphisme autoadjoint de E alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et des projecteurs orthogonaux π_1, \dots, π_r tels que $\phi = \lambda_1 \pi_1 + \dots + \lambda_r \pi_r$ et $\pi_1 + \dots + \pi_r = \text{Id}_E$.

Démonstration : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de ϕ et $F_i = \ker(\phi - \lambda_i \text{Id}_E)$. Soit π_i le projecteur orthogonal de E sur F_i . Par le théorème spectral E est la somme orthogonale des F_i , et pour un vecteur $v \in E$ la décomposition de v sur $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ s'écrit $\pi_1(v) + \dots + \pi_r(v)$, donc $\sum_i \pi_i = \text{Id}_E$. De plus on a $\phi(u) = \lambda_i u$ pour $u \in F_i$ et il suit donc que :

$$\phi(v) = \sum_i \phi(\pi_i(v)) = \sum_i \lambda_i \pi_i(v)$$

ce qui est l'égalité voulue. \square

Comme application on a le résultat suivant, qui peut servir à estimer les valeurs propres d'une matrice symétrique.

Proposition 3.8 Soit ϕ un endomorphisme autoadjoint de E et $v \in E$. On suppose que ϕ a une unique valeur propre λ de valeur absolue maximale. Soit π la projection orthogonale sur $\ker(\phi - \lambda \text{Id}_E)$ et soit $v \in E$. On a :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (\lambda^{-m} \phi^m(v)) = \pi(v).$$

Si de plus $v \in E \setminus \ker(\pi)$ alors :

$$|\lambda| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|\phi^m(v)\|^{\frac{1}{m}}.$$

Démonstration : Par la proposition précédente :

$$\lambda^{-m} \phi^m(v) = \pi(v) + \sum_{i=2}^r \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right)^m \pi_i(v)$$

où λ_i, π_i sont comme dans l'énoncé de cette dernière et $|\lambda| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_r|$. Il suit que

$$\|\lambda^{-m} \phi^m(v) - \pi(v)\| \leq \|\pi_2(v) + \dots + \pi_r(v)\| \max_i \left| \frac{\lambda_i^m}{\lambda^m} \right| \leq \left| \frac{\lambda_2^m}{\lambda^m} \right| \cdot \|v\|$$

et il est clair que le côté droit tend vers 0.

La seconde partie est une conséquence immédiate de la première. □

3.3.6 Endomorphismes positifs

Soit ϕ un endomorphisme autoadjoint de E . Il est dit *positif* si :

$$\forall v \in E : \langle \phi(v), v \rangle \geq 0.$$

Proposition 3.9 *Un endomorphisme auto-adjoint est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives, et strictement positif si et seulement si elles sont strictement positives.*

Démonstration : Soit ϕ un endomorphisme autoadjoint positif et λ une valeur propre de ϕ . Si v est un vecteur propre non-nul de ϕ il vient :

$$\lambda = \frac{\langle \phi(v), v \rangle}{\|v\|^2} \geq 0.$$

Réciproquement, soit ϕ un endomorphisme positif et λ_1, λ_r les valeurs propres de ϕ , que l'on suppose vérifier $\lambda_i \geq 0$. Soient π_i le projecteur orthogonal sur $\ker(\phi - \lambda_i \text{Id}_E)$. On a alors par la proposition 3.7 :

$$\langle \phi(v), v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i \pi_i(v), \sum_{i=1}^r \pi_i(v) \right\rangle = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|\pi_i(v)\|^2 \geq 0$$

donc ϕ est positif. □

Décomposition polaire des endomorphismes

Proposition 3.10 *Soit ϕ un endomorphisme de E . Il existe un endomorphisme autoadjoint α et une isométrie ω de E , uniquement déterminés par ϕ , tels que $\phi = \alpha\omega$.*

Démonstration : Soit $\psi = \phi^* \circ \phi$. On va d'abord montrer que ψ est autoadjoint et positif. Ceci suit du fait que :

$$\forall u, v \in E : \langle \psi(u), v \rangle = \langle \phi^*(\phi(u)), v \rangle = \langle \phi(u), \phi(v) \rangle$$

et donc $\langle \psi(u), v \rangle = \langle u, \psi(v) \rangle$ (en faisant le même calcul) et $\langle \psi(v), v \rangle = \|\phi(v)\|^2 \geq 0$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de ψ et (e_1, \dots, e_n) une base orthogonale propre, de sorte que $\phi(e_j) = \lambda_{i_j} e_j$. On définit alors α en posant :

$$\alpha(e_j) = \sqrt{\lambda_{i_j}} e_j.$$

On va commencer par supposer que $\ker(\phi) = \{0\}$. Dans ce cas on a aussi $\ker(\phi^* \circ \phi) = \{0\}$ et donc aussi $\ker(\alpha) = \{0\}$. Il suit que α est inversible et on pose $\omega = \alpha^{-1} \circ \phi$. On va vérifier que ω est une isométrie : on a

$$\omega \circ \omega^* = \alpha^{-1} \phi \phi^* \alpha = \alpha \alpha^{-2} \alpha^2 \alpha = \text{Id}.$$

Dans le cas où $F = \ker(\phi) \neq \{0\}$ on a $\alpha(F^\perp) \subset F^\perp$ puisque α est autoadjoint, et $\alpha|_{F^\perp}$ est inversible vu que $\ker(\phi) \cap F^\perp = \{0\}$. On définit alors $\omega = (\alpha|_{F^\perp}^{-1} \circ \phi|_{F^\perp}) \oplus \text{Id}_F$, on a encore $\phi = \alpha\omega$. On vérifie que ω est une isométrie sur F^\perp comme plus haut et il suit immédiatement que ω est une isométrie de E . \square

3.3.7 Lien avec les formes quadratiques et application aux quadriques

Si ϕ est un endomorphisme autoadjoint de E alors $b_\phi : (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique, ce qui est immédiat d'après la définition de l'autoadjonction et la symétrie du produit scalaire.

Proposition 3.11 *Si b est une forme bilinéaire symétrique il existe un unique endomorphisme autoadjoint ϕ de E tel que $b_\phi = b$.*

Démonstration : L'application $\phi \mapsto b_\phi$ est linéaire, injective par le théorème spectral, et les dimensions des espaces source et but sont égales. \square

Un nouvel énoncé pour le théorème spectral est donc le suivant.

Proposition 3.12 *Soit q une forme quadratique sur un espace euclidien E . Il existe une base orthonormée de E qui soit aussi une base orthogonale pour q .*

Attention, si on calcule une base orthogonale pour q par l'algorithme de réduction de Gauss elle ne sera pas en général orthonormée pour la structure euclidienne de E .

Chapitre 4

Espaces hermitiens

Dans tout le chapitre E est un espace vectoriel sur \mathbb{C} , que l'on supposera toujours de dimension finie.

4.0 Formes quadratiques sur les nombres complexes

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$. Soit q une forme quadratique non-dégénérée sur E ; l'algorithme de Gauss montre qu'il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que :

$$q(z_1 e_1 + \dots + z_n e_n) = a_1 z_1^2 + \dots + a_n z_n^2,$$

pour des $a_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Il existe des $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ telq que $b_i^2 = 1/a_i$. Dans la base $(b_1 e_1, \dots, b_n e_n)$ la forme q s'écrit alors :

$$q(z_1 b_1 e_1 + \dots + z_n b_n e_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

On voit donc que toutes les formes quadratiques non-dégénérées sur E sont équivalentes. En particulier elles ont toutes des vecteurs isotropes non-nuls dès que $n \geq 2$ et il n'est pas possible d'élaborer dans ce cadre une théorie semblable à celle des espaces euclidiens.

4.1 Formes hermitiennes

La plupart des démonstrations pour cette section sont semblables à celles du chapitre 1 et laissées à la lectrice.

4.1.1 Définition

Une *forme hermitienne* sur E est une fonction $h : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) Pour tous $u, v, w \in E$ on a :

$$h(u + v, w) = h(u, w) + h(v, w) \text{ et } h(u, v + w) = h(u, v) + h(u, w).$$

ii) Pour tous $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$h(\lambda u, v) = \lambda h(u, v)$$

et

$$h(u, \lambda v) = \bar{\lambda} h(u, v) \tag{4.1.1}$$

iii) Pour tous $u, v \in E$ on a :

$$h(u, v) = \overline{h(v, u)}. \quad (4.1.2)$$

La différence avec les formes bilinéaires vient des propriétés 4.1.1 et 4.1.2 (la deuxième est souvent appelée *symétrie hermitienne*). Noter que contrairement au cas bilinéaire on ne considérera que des formes symétriques en ce sens (les fonctions vérifiant les autres propriétés mais pas forcément (4.1.2) sont souvent appelées *sésquilinéaires*, terme qui inclut aussi les formes bilinéaires).

Exemples

i) Si $E = \mathbb{C}$ alors les formes hermitiennes sur E sont exactement les fonctions de la forme

$$h(z, w) = az\bar{w}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

ii) Si $E = \mathbb{C}^2$, alors la fonction définie par :

$$h_1((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2$$

est une forme hermitienne.

iii) Si $E = \mathbb{C}_d[X]$ alors

$$h_2(f, g) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta$$

définit une forme hermitienne sur E .

4.1.2 Matrices, changement de base

Soit h une forme hermitienne sur E . Comme dans le cas quadratique, si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E on, définit la matrice de h dans B par :

$$\text{Mat}_B(h) = (h(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On a des propriétés similaires à celles des matrices de formes bilinéaires symétriques. Dans la suite, si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ on note $\bar{A} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ la matrice dont les entrées sont les $\bar{a}_{i,j}$.

Propriétés : Soit $M = \text{Mat}_B(h)$.

i) Si u, v ont pour coordonnées dans B les vecteurs colonnes Z, W alors on a :

$$h(u, v) = {}^tZ \cdot M \cdot \bar{W}. \quad (4.1.3)$$

ii) On a $M = {}^t\bar{M}$.

En général, une matrice vérifiant l'égalité $M = {}^t\bar{M}$ est appelée une *matrice hermitienne*. Noter que ceci force ses coefficients à être réels. On peut aussi exprimer l'égalité (4.1.3) en donnant une expression en coordonnées dans une base : si $\text{Mat}_B(h) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ alors :

$$h(u, v) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} z_i \bar{w}_j$$

où $(z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n)$ sont les coordonnées de u, v dans B .

La formule de changement de base pour les formes hermitiennes est la suivante : si B, C sont des bases de E et $P = \text{Mat}_B^C(\text{Id}_E)$ alors on a :

$$\text{Mat}_C(h) = {}^tP \cdot \text{Mat}_B(h) \cdot \bar{P}. \quad (4.1.4)$$

4.1.3 Noyau, dégénérescence, orthogonalité

On dit que deux vecteurs $u, v \in E$ sont orthogonaux pour h si $h(u, v) = 0$. Un vecteur $v \in E$ est dit isotrope pour h si $h(v, v) = 0$. Le noyau de h est le sous-espace :

$$\begin{aligned}\ker(h) &= \{v \in E : \forall u \in E : h(v, u) = 0\} \\ &= \{v \in E : \forall u \in E : h(v, u) = 0\}.\end{aligned}$$

On dit que h est *non dégénérée* si $\ker(h) = \{0\}$.

Si F est un sous-espace de E son *orthogonal pour h* est le sous-espace :

$$F^\perp = \{v \in E : \forall u \in F : h(v, u) = 0\}.$$

On a les propriétés suivantes :

- i) Si h est non-dégénérée alors $\dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim(E)$.
- ii) Si $F_1 \subset F_2$ alors $F_1^\perp \supset F_2^\perp$, en particulier si h est non-dégénérée alors $(F^\perp)^\perp = F$.

4.1.4 Formes quadratiques hermitiennes

La *forme quadratique hermitienne* q associée à h est la fonction $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q(v) = h(v, v).$$

Noter que q est bien à valeurs réelles vu que si $v \in E$ on a $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$ par la propriété de symétrie hermitienne 4.1.2, donc $h(v, v) \in \mathbb{R}$. La forme hermitienne h est appelée *forme polaire* de q .

Exemples

- i) Si $E = \mathbb{C}$ les formes quadratiques hermitiennes sont les fonctions $z \mapsto a|z|^2$, $a \in \mathbb{R}$.
- ii) Si $E = \mathbb{C}^2$ et h est donnée par l'exemple 4.1.ii) alors la forme quadratique hermitienne associée est

$$q(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

- iii) Si $E = \mathbb{C}_d[X]$ et $h(f, g) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta$ (exemple 4.1.iii) ci-dessus) alors

$$q(f) = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

- iv) Si $E = \mathbb{C}^3$ et la matrice de h dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{aligned}q(z_1, z_2, z_3) &= z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2} \\ &= 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_3}) + 2\operatorname{Re}(z_2\overline{z_3})\end{aligned}$$

En général, une forme quadratique hermitienne s'écrit en coordonnées z_1, \dots, z_n dans une base de E sous la forme :

$$q = \sum_{i=1}^n a_{i,i} |z_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{i,j} \operatorname{Re}(z_i \bar{z}_j)$$

pour des $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Propriétés Soit q une forme quadratique hermitienne sur E et h sa forme polaire. Les formules suivantes sont semblables à celles sur les formes quadratiques associées aux formes bilinéaires.

i) Si $v \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$q(\lambda v) = |\lambda|^2 q(v).$$

ii) Si $u, v \in E$ on a :

$$q(u + v) = q(u) + 2\operatorname{Re}(h(u, v)) + q(v). \quad (4.1.5)$$

iii) Si $u, v \in E$ on a :

$$h(u, v) = \frac{1}{4} (q(u + v) - q(u - v) + i(q(u + iv) - q(u - iv))). \quad (4.1.6)$$

Les démonstrations diffèrent sensiblement du cas bilinéaire et on va donc les donner. Pour la première égalité on voit que :

$$q(\lambda v) = h(\lambda v, \lambda v) = \lambda h(v, \lambda v) = \bar{\lambda} \lambda h(v, v) = |\lambda|^2 q(v).$$

Pour (4.1.5) on a :

$$\begin{aligned} q(u + v) &= h(u + v, u + v) = h(u, u) + h(u, v) + h(v, u) + h(v, v) \\ &= q(u) + (h(u, v) + \overline{h(u, v)}) + q(v) = q(u) + 2\operatorname{Re}(h(u, v)) + q(v). \end{aligned}$$

Pour (4.1.6) on doit montrer que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(h(u, v)) &= \frac{1}{4} (q(u + v) - q(u - v)), \\ \operatorname{Im}(h(u, v)) &= \frac{1}{4} (q(u + iv) - q(u - iv)). \end{aligned}$$

La première égalité est une conséquence immédiate de (4.1.5). La seconde suit de ce que l'on a

$$\operatorname{Im}(h(u, v)) = \operatorname{Re}(-ih(u, v))$$

et

$$-ih(u, v) = h(u, iv) = \frac{1}{4} (q(u + iv) - q(u - iv))$$

par la première égalité.

4.1.5 Réduction des formes quadratiques hermitiennes

L'analogie de l'algorithme de Gauss pour les formes quadratiques hermitiennes est le suivant. On part d'une forme quadratique hermitienne sous la forme :

$$q = \sum_{i=1}^n b_{i,i} |z_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{i,j} \operatorname{Re}(z_i \bar{z}_j)$$

où les z_i sont des coordonnées sur E et $b_{i,j} \in \mathbb{R}$, que l'on veut mettre sous la forme $a_1 |w_1|^2 + \dots + a_n |w_n|^2$. Pour ceci on applique les étapes suivantes :

i) Si $b_{1,1} \neq 0$ on peut écrire :

$$q = b_{1,1} \left| z_1 + \frac{b_{1,2}}{b_{1,1}} z_2 + \dots + \frac{b_{1,n}}{b_{1,1}} z_n \right|^2 + q'$$

où q' est une forme quadratique hermitienne ne dépendant que des variables z_2, \dots, z_n . On pose $w_1 = z_1 + \frac{b_{1,2}}{b_{1,1}} z_2 + \dots$ et on itère ensuite l'algorithme sur q' .

Si $b_{1,1} = 0$ mais il existe k tel que $b_{k,k} \neq 0$ alors on échange z_1 et z_k puis on applique l'étape ci-dessus.

ii) Si $b_{k,k} = 0$ pour tout k mais $b_{1,2} \neq 0$ on peut écrire :

$$q = \frac{2}{b_{1,2}} \operatorname{Re}((b_{1,2} z_1 + b_{2,3} z_3 + \dots + b_{2,n} z_n)(b_{1,2} \bar{z}_2 + b_{1,3} \bar{z}_3 + \dots + b_{1,n} \bar{z}_n)) + q'$$

où q' est une forme quadratique hermitienne ne dépendant que des variables z_3, \dots, z_n . On pose

$$z'_1 = b_{1,2} z_1 + b_{2,3} z_3 + \dots + b_{2,n} z_n, \quad z'_2 = b_{1,2} \bar{z}_2 + b_{1,3} \bar{z}_3 + \dots + b_{1,n} \bar{z}_n$$

et $w_1 = z'_1 + z'_2$, $w_2 = z'_1 - z'_2$ de sorte que

$$q = \frac{2}{b_{1,2}} \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}'_2) = \frac{1}{2b_{1,2}} (|w_1|^2 - |w_2|^2)$$

et on itère l'algorithme sur q' .

Si $b_{1,2} = 0$ mais $b_{k,l} \neq 0$ on échange z_1 et z_k et z_2 et z_l , puis on applique l'étape ci-dessus.

iii) Si $q = 0$ on arrête.

Exemples

i) Soit

$$q = |z_1|^2 + \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2.$$

Après une application de l'étape (4.1.i)) on obtient la forme comme somme de carrés de modules :

$$q = \left| z_1 + \frac{1}{2} z_2 \right|^2 + \frac{3}{4} |z_2|^2.$$

ii) Soit

$$q = \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$$

Après une application de l'étape (4.1.ii)) on obtient

$$q = \frac{1}{4} |z_1 + z_2|^2 - \frac{1}{4} |z_1 - z_2|^2.$$

4.2 Espaces hermitiens

4.2.1 Définition

Une forme hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E est dite *définie positive* si on a :

$$\forall v \in E \setminus \{0\} : \langle v, v \rangle > 0.$$

Un *espace hermitien* est un espace vectoriel complexe muni d'une forme hermitienne définie positive. De tels espaces sont aussi appelés *hilbertiens (de dimension finie)*. La forme quadratique associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est notée $\| \cdot \|^2$.

Exemples

i) L'exemple fondamental est $E = \mathbb{C}^n$ muni de la forme hermitienne définie par :

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + \cdots + z_n \overline{w_n}$$

qui est définie positive vu que

$$\langle z, z \rangle = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 > 0$$

sauf si $|z_1| = \cdots = |z_n| = 0$, c'est-à-dire $z = 0$.

ii) L'espace $E = \mathbb{C}_d[X]$ munie de la forme hermitienne (4.1.iii) est un espace hermitien vu que $\int_0^{2\pi} \pi |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0$ implique que $f(e^{i\theta})$ est nul pour tout θ , donc $f = 0$ puisqu'un polynôme non-nul ne peut pas avoir une infinité de racines dans \mathbb{C} .

iii) Si $E = \mathcal{M}_{n \times n}$ on peut le munir de la forme hermitienne

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A \overline{B})$$

dont on vérifie qu'elle est définie positive.

iv) En général, si on a une forme quadratique hermitienne donnée en coordonnées dans une base, pour vérifier que sa forme polaire est définie positive il faut appliquer l'algorithme de réduction pour la mettre sous forme $a_1 |z_1|^2 + \cdots + a_n |z_n|^2$ et vérifier que $a_i > 0$. Par exemple, pour la forme :

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} - 2z_1 \overline{w_2} - 2z_2 \overline{w_1} + 5z_2 \overline{w_2}$$

on a la forme quadratique

$$\|z\|^2 = |z_1|^2 - 4 \text{Re}(z_1 \overline{z_2}) + 5|z_2|^2$$

qui après une application de l'étape 4.1.i) s'écrit :

$$|z_1 - 2z_2|^2 + |z_2|^2$$

et est donc définie positive.

4.2.2 Orthogonalité

Comme dans le cas euclidien on peut spécialiser les propriétés 4.1.i) et 4.1.ii) au cas d'un espace hermitien E . Si F est un sous-espace vectoriel de E alors :

i) $E = F \oplus F^\perp$;

ii) $(F^\perp)^\perp = F$.

4.2.3 Inégalité de Cauchy–Schwarz

Théorème 4.1 Soient $u, v \in E$. On a :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

avec égalité si et seulement si u, v sont colinéaires.

Démonstration : Comme pour le cas euclidien, on commence par démontrer l'inégalité dans \mathbb{C}^2 muni de sa structure hermitienne canonique. Si $u = (z_1, z_2)$, $v = (w_1, w_2)$ on a :

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle|^2 &= (z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2)(\overline{z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2}) \\ &= (z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2)(\bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2) \\ &= |z_1|^2 \cdot |w_1|^2 + (z_1 \bar{w}_2 \bar{z}_2 w_1 + z_2 \bar{w}_1 \bar{z}_1 w_2) + |z_2|^2 \cdot |w_2|^2 \\ &= |z_1|^2 \cdot |w_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{w}_1 \bar{z}_2 w_2) + |z_2|^2 \cdot |w_2|^2. \end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité, valide pour tous nombres complexes a, b et qui suit immédiatement du fait que $|a - b|^2 \geq 0$:

$$2 \operatorname{Re}(a \bar{b}) \leq |a|^2 + |b|^2. \quad (4.2.1)$$

En utilisant (4.2.1) sur la dernière ligne du calcul précédent avec $a = z_1 w_2$, $b = z_2 w_1$ il vient :

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq |z_1|^2 \cdot |w_1|^2 + |z_1|^2 \cdot |w_2|^2 + |z_2|^2 \cdot |w_1|^2 + |z_2|^2 \cdot |w_2|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2)$$

ce qui prouve l'inégalité. Le cas d'égalité dans (4.2.1) correspond à $a = b$, qui dans le cas où on l'utilise revient à $z_1 w_2 - z_2 w_1 = 0$, autrement dit u, v sont liés.

Dans le cas général on choisit une base orthonormée (e_1, e_2) de l'espace $\mathbb{C}u + \mathbb{C}v$, ce qui ramène au cas précédent en calculant en coordonnées dans cette base. \square

4.2.4 Isométries

Une application linéaire $\phi : E \rightarrow E$ est une *isométrie* si :

$$\forall u, v \in E : \langle \phi(u), \phi(v) \rangle = \langle u, v \rangle. \quad (4.2.2)$$

Proposition 4.1 Soient B une base orthonormée de E , ϕ un endomorphisme de E et $U = \operatorname{Mat}_B(\phi)$. Alors ϕ est une isométrie si et seulement si :

$$U \cdot {}^t \bar{U} = 1_n.$$

Démonstration : On a

$$\langle \phi(u), \phi(v) \rangle = {}^t(UX) \operatorname{Mat}_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) \bar{U} X = {}^t X ({}^t U \bar{U}) \bar{Y}$$

donc (4.2.2) revient à ${}^t U \bar{U} = 1_n$, ce qui est équivalent à l'énoncé. \square

4.3 Opérateurs autoadjoints

4.3.1 Adjonction

Proposition 4.2 Soit $\phi : E \rightarrow E$ linéaire. Il existe une unique application linéaire $\phi^* : E \rightarrow E$ telle que :

$$\forall u, v \in E : \langle \phi(u), v \rangle = \langle u, \phi(v) \rangle. \quad (4.3.1)$$

Démonstration : Soit B une base orthonormée de E et $M = \text{Mat}_B(\phi)$. Il est immédiat de voir que la condition (4.3.1) est équivalente à

$$\text{Mat}_B(\phi^*) = {}^t \overline{M}$$

ce qui détermine bien une unique application linéaire $E \rightarrow E$. □

Comme dans le cas euclidien, l'endomorphisme ϕ^* est appelé *l'adjoint* (pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$) de ϕ . On a les propriétés basiques suivantes pour l'adjonction : dans les énoncés suivants ϕ, ψ sont des endomorphismes de E .

- i) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $(\phi + \lambda\psi)^* = \phi^* + \overline{\lambda}\psi^*$.
- ii) On a $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.
- iii) On a $(\phi^*)^* = \phi$.
- iv) Si χ_ϕ, χ_{ϕ^*} sont les polynômes caractéristiques respectifs de ϕ, ϕ^* alors $\chi_\phi = \overline{\chi_{\phi^*}}$.
- v) On a $\ker(\phi^*) = \text{im}(\phi)^\perp$ et $\text{im}(\phi^*) = \ker(\phi)^\perp$.

Les démonstrations sont similaires au cas euclidien.

Autoadjoints

On dit que ϕ est *autoadjoint* si $\phi^* = \phi$. On a les deux propriétés fondamentales suivantes pour les opérateurs autoadjoints (la première est une conséquence de la preuve ci-dessus et la seconde se prouve comme dans le cas euclidien) :

- i) Soit B une base orthonormée de E et $M = \text{Mat}_B(\phi)$. Alors ϕ est autoadjoint si et seulement si $M = {}^t \overline{M}$.
- ii) Si ϕ est autoadjoint et $\phi(F) \subset F$ pour un sous-espace $F \subset E$ alors on a aussi $\phi(F^\perp) \subset F^\perp$.

4.3.2 Théorème spectral

L'énoncé du théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints des espaces hermitiens est le suivant, semblable au cas euclidien.

Théorème 4.2 Soit $\phi : E \rightarrow E$ une application linéaire autoadjointe. Il existe une base orthonormée de E diagonalisant ϕ , et de plus toutes les valeurs propres de ϕ sont réelles.

Démonstration : On démontre la première partie du théorème (la diagonalisabilité de ϕ) par récurrence sur $\dim(E)$ de manière similaire à celle employée dans le cas euclidien. Le cas où $\dim(E) = 1$ est trivial ; supposons que le résultat soit vrai pour tous les endomorphismes autoadjoints d'un espace hermitien de dimension $n-1, n \geq 2$, et que $\dim(E) = n$. Alors il existe un vecteur propre $v \in E \setminus \{0\}$

pour ϕ . On a alors $\phi(v) \in \mathbb{C} \cdot v$ et par la propriété de préservation de l'orthogonalité 4.3.ii) il suit qu'en posant $F = v^\perp$ on a aussi $\phi(F) \subset F$. On a alors que F est un espace hermitien de dimension $n - 1$ et $\phi|_F$ est un endomorphisme autoadjoint de F . Il existe donc une base orthonormée (e_1, \dots, e_{n-1}) de F diagonalisant $\phi|_F$. On pose enfin $e_n = v/\|v\|$ de sorte que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E diagonalisant ϕ .

La seconde partie (le fait que les valeurs propres sont réelles) est démontré de manière similaire à la preuve du théorème 3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de ϕ et $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $\phi(v) = \lambda v$. On a alors :

$$\lambda = \frac{\langle \phi(v), v \rangle}{\|v\|^2}$$

de sorte qu'il vient :

$$\bar{\lambda} = \frac{\overline{\langle \phi(v), v \rangle}}{\|v\|^2} = \frac{\langle v, \phi(v) \rangle}{\|v\|^2}$$

où la seconde égalité suit du fait que $\|v\|^2 \in \mathbb{R}$ et de la propriété de symétrie hermitienne. D'autre part, comme ϕ est autoadjoint on a $\langle v, \phi(v) \rangle = \langle \phi(v), v \rangle$ et il suit que $\lambda = \bar{\lambda}$, autrement dit $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Comme dans le cas euclidien on a une formulation matricielle équivalente.

Théorème 4.3 *Soit $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ vérifiant $M = \overline{^t M}$. Il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ telle que $U^{-1} = \overline{^t U}$ et UMU^{-1} est diagonale et à coefficients dans \mathbb{R} .*

4.3.3 Projecteurs orthogonaux

Comme dans le cas euclidien, les projecteurs orthogonaux sont autoadjoints et ont une propriété de minimisation de la distance. La démonstration est exactement la même dans les deux cas.

Proposition 4.3 *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et π la projection de E sur F parallèlement à F^\perp . Alors :*

- i) π est l'unique projecteur autoadjoint d'image F ;
- ii) Pour tout $v \in E$ on a :

$$\|v - \pi(v)\| = \min_{w \in F} \|v - w\|.$$

4.3.4 Endomorphismes positifs et décomposition polaire

Un endomorphisme $\phi : E \rightarrow E$ est dit *positif* s'il est autoadjoint et si de plus $\langle \phi(v), v \rangle \geq 0$ pour tout $v \in E$. On a la même caractérisation que dans le cas euclidien.

Proposition 4.4 *Soit $\phi : E \rightarrow E$ un endomorphisme autoadjoint. Alors ϕ est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres le sont.*

On a aussi une décomposition polaire des endomorphismes dans le cas hermitien.

Proposition 4.5 *Soit $\psi : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Il existe $\rho : E \rightarrow E$ autoadjoint positif et $\omega : E \rightarrow E$ une isométrie telles que $\psi = \rho \circ \omega$.*

Un exemple simple est le cas où $\dim(E) = 1$: dans ce cas on peut identifier $E = \mathbb{C}$ muni du produit hermitien $\langle z, w \rangle = z\bar{w}$, et tout endomorphisme est de la forme $z \mapsto az$ pour un $a \in \mathbb{C}$. En

écrivait $a = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+^\times$, la décomposition polaire est $\rho(z) = rz$ (partie positive) et $\omega(z) = e^{i\theta}z$ (partie isométrique).

4.4 Espaces euclidiens et espaces hermitiens

On peut associer naturellement à tout espace euclidien un espace hermitien de même dimension. Pour commencer on associe à un espace vectoriel réel $E_{\mathbb{R}}$ un espace vectoriel complexe $E_{\mathbb{C}}$ comme suit : $E_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{k=1}^m z_k v_k$ pour $m \geq 1$, $z_k \in \mathbb{C}$ et $v_k \in E_{\mathbb{R}}$, avec les lois d'addition définies par :

$$\left(\sum_{k=1}^m z_k v_k \right) + \left(\sum_{i=1}^{m'} w_i u_i \right) = \left(\sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(z_i) v_i + \sum_{i=1}^{m'} \operatorname{Re}(w_i) u_i \right) + i \left(\sum_{i=1}^m \operatorname{Im}(z_i) v_i + \sum_{i=1}^{m'} \operatorname{Im}(w_i) u_i \right)$$

et de multiplication :

$$z \cdot \sum_{i=1}^m z_i v_i = \sum_{i=1}^m (z z_i) v_i.$$

Avec ces lois $E_{\mathbb{C}}$ est un espace vectoriel complexe, et si (e_1, \dots, e_n) est une base de $E_{\mathbb{R}}$ sur \mathbb{R} alors (e_1, \dots, e_n) est une base de $E_{\mathbb{C}}$ sur \mathbb{C} . L'exemple fondamental est $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$, $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$.

Pour munir $E_{\mathbb{C}}$ d'un produit hermitien on pose, si $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ est le produit scalaire sur $E_{\mathbb{R}}$ et $u, v, u', v' \in E_{\mathbb{R}}$:

$$\langle u + iv, u' + iv' \rangle_{\mathbb{C}} = (\langle u, u' \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle v, v' \rangle_{\mathbb{R}}) + i (\langle u, v' \rangle_{\mathbb{R}} - \langle v, u' \rangle_{\mathbb{R}}).$$

Si (e_1, \dots, e_n) est orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ alors elle est aussi orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$. Dans l'exemple $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$, $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ le produit hermitien obtenu à partir de $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_i x_i y_i$ pour $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ est $\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_i z_i \bar{w}_i$ pour $u = (z_1, \dots, z_n)$ et $v = (w_1, \dots, w_n)$.

Chapitre 5

Isométries des espaces euclidiens et hermitiens

5.1 Exemples

5.1.1 Rappels des définitions

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien et $\phi : E \rightarrow E$ une application linéaire. Alors ϕ est une isométrie de E si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée.

- i) Pour tous $u, v \in E$ on a $\langle \phi(u), \phi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.
- ii) Pour tout $v \in E$ on a $\|\phi(v)\| = \|v\|$.
- iii) ϕ est inversible et on a $\phi^* = \phi^{-1}$.
- iv) Si B est une base orthonormée de E et $U = \text{Mat}_B(\phi)$ on a $U^t \bar{U} = 1_n$.

Une matrice satisfaisant à la condition 5.1.iv) est appelée *orthogonale* si E est réel et *unitaire* si E est complexe.

5.1.2 Petites dimensions

Dimension 1 réelle ou complexe

Si $E = \mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = xy$ alors les seules isométries sont les applications $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

Si $E = \mathbb{C}$ muni du produit hermitien $\langle z, w \rangle = z\bar{w}$ alors les isométries sont les applications $z \mapsto uz$ avec $|u| = 1$, autrement dit les applications $z \mapsto e^{i\theta}z$ pour $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Dimension 2 réelle

On suppose que E est un espace euclidien, $\dim(E) = 2$ et (e_1, e_2) est une base orthonormée de E . Soit ω une isométrie de E et $U = \text{Mat}_B(\omega)$. On pose :

$$U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Par la condition $\|\omega(e_1)\| = \|e_1\| = 1$ on obtient que $a^2 + b^2 = 1$. De plus il suit de la condition $\langle \omega(e_1), \omega(e_2) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0$ que $ad + bc = 0$, autrement dit il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $c = ta$ et $d = tb$. Comme on a aussi $c^2 + d^2 = 1$ il vient $|t| = 1$. Il y a alors deux cas à considérer selon le signe de t .
Si $t = 1$: dans ce cas, en posant $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$ (pour un $\theta \in]-\pi, \pi[$ uniquement déterminé) la matrice de ω dans B est :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On voit que $\det(\omega) = 1$ et que le polynôme caractéristique de ω est

$$\chi_\omega = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

En particulier on voit qu'à l'exception des cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ les racines de χ_ω ne sont pas réelles et ω n'a donc aucun vecteur propre dans E . En fait on peut vérifier que la matrice de ω est égale à M dans toute base orthonormée de déterminant positif de E .

Si $t = -1$: en posant comme ci-dessus $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$ on obtient que $\det(\omega) = -1$ et $\chi_\omega = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$. L'application ω est donc diagonalisable sur \mathbb{R} . On peut voir qu'en posant :

$$v_+ = \cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2, \quad v_- = -\sin(\theta/2)e_1 + \cos(\theta/2)e_2$$

on a que (v_+, v_-) est une base orthonormée de E et $\omega(v_\pm) = \pm v_\pm$.

Dimension 2 complexe

Soit E un espace hermitien de dimension 2 et $B = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E . Si ω est une isométrie de E on peut voir de manière similaire au cas euclidien qu'il existe $a, b, u \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et $|u| = 1$ tels que :

$$\text{Mat}_B(\omega) = \begin{pmatrix} ua & -\bar{b} \\ ub & a \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de ω est alors $X^2 - (ua + \bar{a})X + u$. Soient $e^{i\theta}, e^{i\phi}$ ses racines. Soit α tel que $u = e^{i\alpha}$, on voit que $\theta + \phi = \alpha$ modulo 2π et d'autre part :

$$e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{i\frac{\alpha}{2}}a + \overline{e^{i\frac{\alpha}{2}}a}) = ua + \bar{a} = e^{i\theta} + e^{i\phi} = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi-\theta}{2}})$$

ce qui détermine (modulo 2π) $\{\phi, \theta\}$ en fonction de u et a . En particulier si $u = 1$ (ce qui revient à demander que $\det(\omega) = 1$) on a $\theta = -\phi$.

5.1.3 Symétries

Symétries en général

Soit E un espace euclidien ou hermitien. Soient F, F' des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus F'$. La *symétrie de E par rapport à F parallèlement à F'* est l'application $\sigma : E \rightarrow E$ définie par :

$$\sigma(u + v) = u - v \text{ si } u \in F, v \in F'.$$

Elle est clairement linéaire, et on a $\sigma \circ \sigma = \text{Id}$. Ceci est une caractérisation des symétries de E : si $\phi^2 = \text{Id}$ on a $(\phi + \text{Id}) \circ (\phi + \text{Id}) = 0$ et il suit que $E = \ker(\phi - \text{Id}) \oplus \ker(\phi + \text{Id})$. En posant $F = \ker(\phi - \text{Id})$ et $F' = \ker(\phi + \text{Id})$ on voit que ϕ est la symétrie par rapport à F parallèlement à F' .

On remarque aussi que si π est la projection de E sur F parallèlement à F' on a $\sigma = 2\pi - \text{Id}$.

Symétries orthogonales

Proposition 5.1 *Soient F, F' des sous espaces de E tels que $E = F \oplus F'$ et σ la symétrie par rapport à F parallèlement à F' . Alors σ est une isométrie de E si et seulement si $F' = F^\perp$.*

Démonstration : On va montrer que $\sigma^* = \sigma^{-1}$ si et seulement si $F' = F^\perp$. Soit π la projection sur F parallèlement à F' . D'après l'une des propositions 3.5 ou 4.3 on a $\pi = \pi^*$ si et seulement si F' et F sont orthogonaux. D'autre part on a $\sigma^* = (2\pi - \text{Id})^* = 2\pi^* - \text{Id}$ et $\sigma^{-1} = \sigma$ d'où il suit que $\sigma^* = \sigma - 1$ si et seulement si $\pi = \pi^*$, c'est-à-dire $F' = F^\perp$. \square

5.1.4 Isométries et bases orthogonales

Proposition 5.2 *Soit E un espace euclidien ou hermitien. Soient B, B' des bases orthonormées de E . Il existe une unique isométrie $\omega : E \rightarrow E$ telle que $\omega(B) = B'$, et si ω est une isométrie quelconque de E alors $\omega(B)$ est une base orthonormée.*

Démonstration : On sait qu'il existe une unique application linéaire $\omega : E \rightarrow E$ telle que $\omega(B) = B'$. Il faut donc montrer que ω est une isométrie. Pour cela on remarque que vu que $\omega(B) = B'$ on a :

$$U := \text{Mat}_B^B(\omega) = \text{Mat}_{B'}^{B'}(\text{Id}_E).$$

Il suit donc que :

$${}^t U \text{Mat}_{B'}(\langle \cdot, \cdot \rangle) \bar{U} = \text{Mat}_B(\langle \cdot, \cdot \rangle)$$

et comme B, B' sont orthonormées on a $\text{Mat}_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) = 1_n = \text{Mat}_{B'}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ d'où il suit que ${}^t U \bar{U} = 1_n$, c'est-à-dire que ω est une isométrie. \square

5.2 Structure des isométries

5.2.1 Stabilité de l'orthogonal

Proposition 5.3 *Soit E un espace euclidien ou hermitien et ϕ une isométrie de E . Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que $\phi(F) \subset F$. Alors on a aussi $\phi(F^\perp) \subset F^\perp$.*

Démonstration : Soit $v \in F^\perp$. On veut montrer que $\omega(v) \in F^\perp$, c'est-à-dire que $\langle \omega(v), u \rangle = 0$ pour tout $u \in F$. Pour ceci on note que ω est une isométrie, donc bijective. De plus $\omega|_F$ est aussi une isométrie, et donc aussi bijective de F dans lui-même. On a donc $\omega^{-1}(u) \in F$ et il suit que :

$$\langle \omega(v), u \rangle = \langle v, \omega^{-1}(u) \rangle = 0.$$

\square

5.2.2 Réduction des isométries hermitiennes

Proposition 5.4 Soient E un espace hermitien et ω une isométrie de E . Il existe une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E et $(\theta_1, \dots, \theta_n \in]-\pi, \pi])$ tels que $\omega(e_k) = e^{i\theta_k}$ pour $k = 1, \dots, n$.

La conclusion s'écrit aussi :

$$\text{Mat}_B(\omega) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

et la forme matricielle de l'énoncé est donc la suivante : si $U \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ est une matrice unitaire alors il existe une matrice unitaire P telle que PUP^{-1} soit de la forme ci-dessus.

Démonstration : On démontre l'énoncé par récurrence. Si $\dim(E) = 1$ alors les matrices unitaires sont les $(e^{i\theta})$ pour $\theta \in]-\pi, \pi]$ et la conclusion est immédiate. Supposons que $\dim(E) = n \geq 2$ et que l'énoncé soit vérifié pour toute isométrie d'un espace hermitien de dimension $n - 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de ω et $v \in E \setminus \{0\}$ un vecteur tel que $\omega(v) = \lambda v$.

On commence par vérifier que $|\lambda| = 1$ (de sorte qu'on peut l'écrire sous la forme $\lambda = e^{i\theta_n}$ pour un $\theta_n \in]-\pi, \pi]$). On a en effet :

$$|\lambda|^2 = \frac{\|\lambda v\|^2}{\|v\|^2} = \frac{\|\omega(v)\|^2}{\|v\|^2} = 1$$

vu que ω est une isométrie.

Soit maintenant $F = \mathbb{C} \cdot v$, de sorte que $\omega(F) = F$. Par la proposition 5.3 on a alors $\omega(F^\perp) = F^\perp$, et $\omega|_{F^\perp}$ est une isométrie. Comme $\dim(F^\perp) = n - 1$ il existe, par l'hypothèse de récurrence, une base orthonormée (e_1, \dots, e_{n-1}) de F^\perp et $\theta_1, \dots, \theta_{n-1} \in]-\pi, \pi]$ tels que $\omega(e_k) = e^{i\theta_k} e_k$. On pose $e_n = v/\|v\|$ et il suit que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E vérifiant la conclusion de l'énoncé. \square

5.2.3 Réduction des isométries euclidiennes

Proposition 5.5 Soit E un espace euclidien et ω une isométrie de E . Il existe une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E , des entiers r, s tels que $0 \leq r \leq n/2$ et $2r \leq s \leq n$, et $\theta_1, \dots, \theta_r \in]-\pi, \pi]$ tels que :

i) Pour $k = 1, \dots, r$ on a

$$\omega(e_{2k-1}) = \cos(\theta_k)e_{2k-1} + \sin(\theta_k)e_{2k} \quad (5.2.1)$$

et

$$\omega(e_{2k}) = -\sin(\theta_k)e_{2k-1} + \cos(\theta_k)e_{2k}. \quad (5.2.2)$$

ii) Pour $l = 2r + 1, \dots, s$ on a

$$\omega(e_l) = -e_l.$$

iii) Pour $l = s + 1, \dots, n$ on a :

$$\omega(e_l) = e_l.$$

La conclusion s'écrit aussi de la manière suivante : si on pose

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

alors on a

$$\text{Mat}_B(\omega) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_{\theta_r} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1_{s-2r} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1_{n-s} \end{pmatrix}$$

En particulier, si $\dim(E) = 2$ on retrouve le résultat de la discussion de 5.1.2 et si $\dim(E) = 3$ alors la conclusion s'écrit

$$\text{Mat}_B(\omega) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si $\det(\omega) = 1$ (y compris les cas $\theta = 0, \pi$ qui correspondent à $r = 0$) et

$$\text{Mat}_B(\omega) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si $\det(\omega) = -1$ (y compris les cas $\theta = 0, \pi$ qui correspondent à $r = 0$).

Démonstration : On va donner deux démonstrations : la première utilise la complexification de E , la seconde est plus directe.

Pour la première on note $E = E_{\mathbb{R}}$ et on introduit l'espace hermitien $E_{\mathbb{C}}$ complexifié de E . Il existe alors une unique application $E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$, notée $v \mapsto \bar{v}$, telle que $\lambda \bar{v} = \overline{\lambda v}$ pour tous $v \in E_{\mathbb{C}}, \lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in E_{\mathbb{R}}$ si et seulement si $v = \bar{v}$. Ceci est facile à observer, par exemple en coordonnées dans une base de $E_{\mathbb{R}}$ on voit qu'elle est donnée par $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$.

Comme ω est réelle son polynôme caractéristique est à coefficients réels et on peut donc grouper ses racines complexes non-réelles par paires $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_r, \bar{\alpha}_r$. On note $v_k \in E_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ un vecteur propre non-nul pour ω et α_k . Alors le vecteur \bar{v}_k est un vecteur propre pour ω et $\bar{\alpha}_k$: en effet on a

$$\omega(\bar{v}_k) = \overline{\omega(v_k)} = \bar{\alpha}_k \bar{v}_k$$

vu que ω est réelle et donc $\bar{\omega} = \omega$. On pose alors :

$$w_{2k-1} = v_k + \bar{v}_k, \quad w_{2k} = iv_k - i\bar{v}_k.$$

On observe immédiatement que $\bar{w}_{2k-1} = w_{2k-1}$ et $\bar{w}_{2k} = w_{2k}$, de sorte que ces deux vecteurs appartiennent à $E_{\mathbb{R}}$. Ils sont de plus non-nuls, et orthogonaux : en effet v_k, \bar{v}_k sont orthogonaux (puisqu'ils sont des vecteurs propres d'une isométrie de $E_{\mathbb{C}}$ pour des valeurs propres distinctes) et on a donc :

$$\begin{aligned} \langle w_{2k-1}, w_{2k} \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle v_k + \bar{v}_k, i(v_k - \bar{v}_k) \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= -i \langle v_k + \bar{v}_k, v_k - \bar{v}_k \rangle_{\mathbb{C}} = -i (\|v_k\|_{\mathbb{C}}^2 - \|\bar{v}_k\|_{\mathbb{C}}^2) = 0 \end{aligned}$$

Enfin, on sait que α_k est de module 1 et en écrivant $\alpha_k = e^{i\theta_k}$ il vient :

$$\begin{aligned}
\omega(w_{2k-1}) &= \omega(v_k) + \omega(\bar{v}_k) = e^{i\theta_k}v_k + e^{-i\theta_k}\bar{v}_k \\
&= \frac{e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k}}{2}(v_k + \bar{v}_k) + \frac{e^{i\theta_k} - e^{-i\theta_k}}{2}v_k - \frac{e^{i\theta_k} - e^{-i\theta_k}}{2}\bar{v}_k \\
&= \frac{e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k}}{2}(v_k + \bar{v}_k) + \frac{e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k}}{2i}i(v_k - \bar{v}_k) \\
&= \cos(\theta_k)w_{2k-1} + \sin(\theta_k)w_{2k}.
\end{aligned}$$

En prenant des vecteurs v_1, \dots, v_r deux à deux orthogonaux dans $E_{\mathbb{C}}$ on obtient donc une famille orthonormée $e_l = W_l/\|w_l\| \in E_{\mathbb{R}}$, $l = 1, \dots, 2r$ qui vérifient (5.2.1) et (5.2.2) et, en posant $F = \sum_{k=1}^{2r} \mathbb{R}e_k$, le polynôme caractéristique de $\omega|_{F^\perp}$ n'a que des racines réelles. Ces dernières doivent être de module 1, donc égales à ± 1 , et en appliquant le même argument que pour le case hermitien on obtient une base propre e_{2r+1}, \dots, e_n de $\omega|_{F^\perp}$ vérifiant la conclusion souhaitée.

Pour la deuxième preuve, quitte à se restreindre à l'orthogonal de $\ker(\omega - \text{Id}_E) \oplus \ker(\omega + \text{Id}_E)$ (qui est stable sous ω par la proposition 5.3) on peut supposer que le polynôme caractéristique χ_ω de ω n'a pas de racine réelle. On a alors nécessairement que $\dim(E)$ est paire, et on raisonne par récurrence de manière similaire au cas hermitien : si $\dim(E) = 0$ la conclusion est évidente. Si $\dim(E) \geq 2$ alors χ_ω a un facteur irréductible de la forme $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ pour un $\theta \in]-\pi, \pi]$. On a alors $\ker(\omega^2 - 2\cos(\theta)\omega + \text{Id}_E) \neq \{0\}$ et on peut prendre $v \neq 0$ tel que $\omega^2(v) = 2\cos(\theta)v - v$. Il suit que le plan $P = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}\omega(v)$ est stable sous ω et en appliquant le case de la dimension 2 à P , et l'hypothèse de récurrence à P^\perp qui est stable par la proposition 5.3, on obtient la conclusion. \square

5.2.4 Décomposition en produit de réflexions

Soit E un espace vectoriel euclidien. Une *réflexion* de E est une symétrie orthogonale dont l'espace des vecteurs fixes est de dimension $\dim(E) - 1$.

Proposition 5.6 *Soit E un espace euclidien et ω une isométrie de E . Il existe $r \leq n$ et des réflexions $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ telles que $\omega = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_r$.*

Démonstration : On va donner deux preuves : l'une utilisant la proposition 5.5, et l'autre plus géométrique et directe.

Pour la première démonstration on se réduit immédiatement à démontrer le résultat en dimension 2 : en effet, si ω n'a que ± 1 comme valeurs propres alors le résultat est facile à démontrer. Sinon, alors il existe un plan P tel que

$$\text{Mat}_B(\omega|_P) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée B de P . On définit alors σ_1, σ_2 par

$$\text{Mat}_B(\sigma_2|_P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_B(\sigma_1|_P) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $\sigma_i|_{P^\perp} = \text{Id}_{P^\perp}$, de sorte que $(\sigma_1 \circ \sigma_2)|_P = \omega|_P$ et $(\sigma_1 \circ \sigma_2)|_{P^\perp} = \text{Id}_{P^\perp}$. On peut alors appliquer une récurrence en itérant avec $(\sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \omega)|_{P^\perp}$.

Pour la deuxième démonstration on choisit arbitrairement $v \in E \setminus \{0\}$. Si $\omega(v) = v$ alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ω_{v^\perp} . Sinon on pose $W = v - \omega(v)$ et $F = W^\perp$, et on note σ_1 la réflexion telle que $\ker(\sigma - \text{Id}) = F$. On a alors $\sigma(\omega(v)) = v$, vu que

$$\omega(v) = \frac{1}{2}(\omega(v) + v) + \frac{1}{2}(\omega(v) - v)$$

est la décomposition de $\omega(v)$ sur $F \oplus F^\perp$ et on a donc :

$$\sigma(\omega(v)) = \frac{1}{2}(\omega(v) + v) - \frac{1}{2}(\omega(v) - v) = v.$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $(\sigma \circ \omega)|_F$. □

5.3 Groupes de matrices

5.3.1 Groupes : définitions et groupe linéaire

Notion de groupe

Un *groupe* est un ensemble G non-vide, muni d'une *loi de composition* qui est une application $G \times G \rightarrow G$ que l'on notera $(g, h) \mapsto gh$. On demande de plus que les axiomes suivants soient vérifiés :

- i) (Associativité) Pour tous $g, h, f \in G$ on a $(gh)f = g(hf)$.
- ii) (Élément neutre) Il existe $e \in G$ tel que pour tout $g \in G$ on ait $ge = g = eg$.
- iii) (Inverse) Pour tout $g \in G$ il existe $h \in G$ tel que $gh = e = hg$.

Si ces conditions sont vérifiées alors le $e \in G$ vérifiant (5.3.ii) est unique et on l'appelle *élément neutre* de G . De même, si $g \in G$ alors l'élément h vérifiant (5.3.iii) est unique ; on l'appelle *inverse de g* et on le note g^{-1} . Les propriétés suivantes sont évidentes :

- Pour tout $g \in G$ on a $(g^{-1})^{-1} = g$;
- Pour tous $g, h \in G$ on a $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

En général, étant donnés $g, h \in G$ on n'a pas nécessairement $gh = hg$. Si c'est le cas pour tous $g, h \in G$ on dit que G est *abélien* ou de manière plus évocatrice *commutatif*.

Groupe linéaire

Si E est un espace vectoriel alors l'ensemble des applications linéaires bijectives $E \rightarrow E$ muni de la loi de composition donnée par la composée de deux applications est un groupe. On l'appelle *groupe linéaire de E* et on le note $\text{GL}(E)$. Il est abélien si $\dim(E) \leq 1$ mais il ne l'est plus dès que $\dim(E) \geq 2$.

Un autre exemple de groupe est donné par le groupe $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, muni de la multiplication matricielle.

Sous-groupes

Soit G un groupe. Un *sous-groupe* de G est un sous-ensemble $H \subset G$ qui est non-vide et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- i) Si $g, h \in H$ alors $gh \in H$.
- ii) Si $g \in H$ alors $g^{-1} \in H$.

On voit que si H est un sous-groupe de G et e le neutre de G alors $e \in H$. Il suit facilement que H muni de la restriction de la loi de composition de G est lui-même un groupe, de neutre e .

Il est évident que si G est un groupe de neutre e alors G et $\{e\}$ sont des sous-groupes de G . L'intersection de deux sous-groupes de G est encore un sous-groupe.

Soit E un espace vectoriel ; un exemple intéressant de sous-groupe est donné par :

$$\mathrm{SL}(E) = \{g \in \mathrm{GL}(E) : \det(g) = 1\},$$

le *groupe spécial linéaire* de E . De même le sous-ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ des matrices de déterminant 1 dans $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ est un sous-groupe.

Morphismes

Si G, G' sont deux groupes et $\Phi : G \rightarrow G'$ est une application on dit que Φ est un *morphisme de groupes* (une nomenclature souvent utilisée est celle d'*homomorphisme*) si elle vérifie les propriétés suivantes :

- Si $g, h \in G$ alors $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$.
- Si $g \in G$ alors $\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)^{-1}$.

Il suit de ces deux propriétés que $\Phi(e) = e'$ où e, e' sont les éléments neutres respectifs de G, G' .

Un exemple de morphisme est la représentation matricielle des applications linéaires bijectives : si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et B en est une base alors l'application $\Phi : \mathrm{GL}(E) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ définie par $\phi \mapsto \mathrm{Mat}_B(\phi)$ est un morphisme de groupes. On a de plus $\Phi(\mathrm{SL}(E)) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et il suit que $\Phi|_{\mathrm{SL}(E)}$ est aussi un morphisme de groupes. D'autres exemples de morphismes sont donnés par le déterminant $\mathrm{GL}(E) \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbb{K})$, ou encore par l'application $\Psi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\Psi(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \det(g)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.3.1)$$

Si un morphisme de groupes est aussi une bijection on dit que c'est un *isomorphisme*. Par exemple le morphisme Φ défini ci-dessus est un isomorphisme de $\mathrm{GL}(E)$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et sa restriction à $\mathrm{SL}(E)$ est un isomorphisme de ce dernier vers $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. En revanche \det (pour $\dim(E) > 1$) ou Ψ ne sont pas des isomorphismes bien qu'ils soient injectifs.

Si $\Phi : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes son *noyau* est le sous-ensemble de G défini par :

$$\ker(\Phi) = \{g \in G : \Phi(g) = e'\}$$

dont on vérifie immédiatement que c'est un sous-groupe de G . On voit aussi qu'un morphisme Φ est injectif si et seulement si $\ker(\Phi) = \{e\}$.

Sous-groupes engendrés et générateurs

Soit G un groupe. Si $S \subset G$ alors le *sous-groupe de G engendré par S* est l'ensemble des éléments de G qui peuvent s'écrire sous la forme $g_r^{\varepsilon_r} \cdots g_1^{\varepsilon_1}$ où $r \geq 0$, $g_1, \dots, g_r \in S$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{1, -1\}$. Par convention un produit vide dans G est égal à l'élément neutre e de G , et le sous-groupe engendré par $\emptyset \subset G$ est donc $\{e\}$. En général on vérifie que la sous-groupe engendré par une partie est bien un sous-groupe de G , que l'on note $\langle G \rangle$.

On dit que S engendre G , ou que S est une *famille génératrice* de G , si $\langle S \rangle = G$. Un exemple de partie génératrice est le suivant : si $n \geq 2$, $1 \leq k, l \leq n$, $k \neq l$ et $a \in \mathbb{K}$ on note $T_{k,l}(a)$ la matrice $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,i} = 1$ pour tout i , $a_{k,l} = a$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Alors l'ensemble :

$$S = \{T_{i,j}(a) : 1 \leq k, l \leq n, k \neq l, a \in \mathbb{K}\}$$

est une famille génératrice de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Ceci suit de l'algorithme du pivot de Gauss pour inverser les matrices, et de l'égalité

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour engendrer $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ il faut y ajouter les matrices diagonales.

5.3.2 Groupe orthogonal

Soit E un espace euclidien. Le *groupe orthogonal* de E est l'ensemble des isométries de E , muni de la composition des applications linéaires. On le note $\mathrm{O}(E)$, c'est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ d'après les propriétés (3.2.iii) et (3.2.iv)). Le sous-groupe $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}(E) \cap \mathrm{SL}(E)$ est appelé *groupe spécial orthogonal* de E .

Le *groupe orthogonal* $\mathrm{O}(n)$ (parfois désigné par $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$) est le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathrm{O}(n) = \{O \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : {}^t O \cdot O = 1_n\}.$$

C'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et on note $\mathrm{SO}(n)$ (ou $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$) le sous-groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$. Le groupe $\mathrm{O}(n)$ n'est pas abélien dès que $n \geq 2$. En revanche le groupe $\mathrm{SO}(2)$ est abélien, ce qui se voit en calculant le produit de deux matrices de ce groupe. Les groupe $\mathrm{SO}(n)$ ne sont pas abéliens pour $n \geq 3$, par exemple parce qu'il existe un morphisme injectif $\mathrm{O}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(n)$ pour tout $n \geq 3$ obtenu en restreignant le morphisme Ψ défini par (5.3.1).

Si B est une base *orthonormée* de E alors la restriction à $\mathrm{O}(E)$ du morphisme $\mathrm{GL}(E) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi \mapsto \mathrm{Mat}_B(\phi)$ définit un isomorphisme de $\mathrm{O}(E)$ vers $\mathrm{O}(n)$, qui se restreint encore à un isomorphisme $\mathrm{SO}(E) \rightarrow \mathrm{SO}(n)$.

D'après la proposition 5.6 le groupe $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions de E .

5.3.3 Groupe unitaire

Soit E un espace hermitien. Le *groupe unitaire* de E , noté $\mathrm{U}(E)$, est l'ensemble des isométries de E , muni de la composition des applications linéaires. C'est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ d'après l'équivalent hermitien des propriétés (3.2.iii) et (3.2.iv)). Le sous-groupe $\mathrm{SU}(E) = \mathrm{U}(E) \cap \mathrm{SL}(E)$ est appelé *groupe spécial unitaire* de E .

Le *groupe unitaire* $U(n)$ est le sous-ensemble de $GL_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$U(n) = \{O \in GL_n(\mathbb{R}) : {}^tO \cdot O = 1_n\}.$$

C'est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et on note $SU(n)$ le sous-groupe $SL_n(\mathbb{C}) \cap U(n)$. Les groupe $U(n)$ ou $SU(n)$ ne sont pas abéliens dès que $n \geq 2$. En revanche le groupe $U(1)$ est abélien puisque $GL_1(\mathbb{C})$ l'est. On peut en fait voir que $U(1)$ est isomorphe à $SO(2)$, via le morphisme

$$e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Si B est une base orthonormée de E alors la restriction à $U(E)$ du morphisme $GL(E) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ défini par $\phi \mapsto \text{Mat}_B(\phi)$ définit un isomorphisme de $U(E)$ vers $U(n)$, qui se restreint encore à un isomorphisme $SU(E) \rightarrow SU(n)$.