

## CORRIGÉ EXAMEN FINAL, ALGÈBRE IV

## Problème 1 (D points)

ans tout le problème on notera :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

et  $\phi$  l'application linéaire  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique est  $A$ .

*Question (1.a)* Justifier que  $A$  est diagonalisable en base orthonormée sur  $\mathbb{R}$ .

**Correction** La matrice  $A$  est symétrique et le théorème spectral implique qu'elle est diagonalisable en base orthonormée.

*Question (1.b)* Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

**Correction** En développant par rapport à la première colonne on obtient :

$$\begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} &= (X-1) \left( (X-2) \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (X-1) ((X-2)(X^2-3X+1) - (X-1)) \\ &= (X-1)(X^3-5X^2+6X-1) = X^4-6X^3+11X^2-7X+1 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = X^2-3X+1.$$

Finalement, on a donc en remplaçant les termes dans (1) que :

$$\det(X \text{Id} - A) = X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 7X + 1 - (X^2 - 3X + 1) = X^4 - 6X^3 + 10X^2 - 4X.$$

*Question (2)* Donner des bases pour les sous-espaces  $\ker(\phi)$  et  $\ker(\phi - 2\text{Id})$  de  $\mathbb{R}^4$ .

**Correction** En résolvant les systèmes on voit que :

$$\ker(\phi) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ker(\phi - 2\text{Id}) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Question (3.a)* Soit  $V = \ker(\phi) + \ker(\phi - 2\text{Id})$ . Donner une base orthonormée du sous-espace  $W = V^\perp$ .

**Correction** Un vecteur  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  est orthogonal à  $V$  si et seulement s'il est orthogonal aux deux vecteurs de base ci-dessus, c'est à dire si et seulement si :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

En résolvant le système on obtient comme base :

$$v_1 = (1 \ 0 \ 0 \ -1), v_2 = (0 \ 1 \ -1 \ 0)$$

*Question (3.b)* Justifier que  $\phi(W) \subset W$  et donner la matrice de  $\phi|_W$  dans la base de  $W$  obtenue précédemment.

**Correction** On a  $\phi(V) \subset V$  vu que  $V$  est engendré par des vecteurs propres de  $\phi$ . Comme  $\phi$  est autoadjoint il suit par une proposition du cours que l'on a aussi  $\phi(V^\perp) \subset V^\perp$ .

*Question (4)* Donner le spectre de  $\phi$  et une base orthonormée de  $\mathbb{R}^4$  constituée de vecteurs propres pour  $\phi$ .

**Correction** On calcule la matrice de  $\phi|_W$  dans la base  $B = (v_1, v_2)$ . On a

$$\phi(v_1) = (1 \ -1 \ 1 \ -1) = v_1 - v_2$$

et

$$\phi(v_2) = (-1 \ 3 \ -3 \ 1) = -v_1 + 3v_2$$

d'où il suit que

$$\text{Mat}_B(\phi|_W) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(noter que la matrice est symétrique, ce qui est attendu vu que  $B$  est orthogonale). On voit donc que  $\det -X \text{Id}_W - \phi|_W = X^2 - 4X + 2$ . On peut vérifier que l'on a bien :

$$\det(X \text{Id}_V - \phi) = X(X - 2)(X^2 - 4X + 2).$$

Les racines de  $X^2 - 4X + 2$  sont  $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$  et le spectre de  $\pi$  est donc égal à :

$$\{0, 2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}\}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 & -1 \\ -1 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et on voit que le noyau de la matrice de droite est engendré par  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Il suit que  $\ker(\phi - (2 - \sqrt{2}) \text{Id}_V)$  est engendré par  $(\sqrt{2} + 1)v_1 + v_2$ , c'est-à-dire en coordonnées :

$$\ker(\phi - (2 - \sqrt{2}) \text{Id}_V) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

De la même manière on voit que  $\ker(\phi - (2 + \sqrt{2})\text{Id}_V)$  est engendré par  $(1 - \sqrt{2})v_1 + v_2$ , soit encore

$$\ker(\phi - (2 - \sqrt{2})\text{Id}_V) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

On pose donc :

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}, e'_4 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

qui forment une base orthogonale propre pour  $\phi$ . La base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  où  $e_i = e'_i / \|e'_i\|$  est donc la base souhaitée. On voit que :

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 2, \|e_3\| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \|e_4\| = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

*Question (5)* Montrer que la fonction  $q$  sur  $\mathbb{R}^4$  définie par  $q(v) = \langle \phi(v), v \rangle$  est une forme quadratique. Quelle est sa signature ?

**Correction** Soit  $b$  la forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^4$  définie par :

$$b(u, v) = \langle \phi(u), v \rangle.$$

Comme  $\phi$  est autoadjoint on voit que  $b$  est symétrique. De plus  $q(v) = b(v, v)$  donc  $q$  est une forme quadratique.

Dans la base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  la matrice de  $q$  est diagonale à coefficients positifs dont un nul, et il suit que la signature de  $q$  est  $(3, 0)$ .

## Problème 2 (4 points)

*Question (1)* Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$\langle u, v \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

si  $u = (x_1, x_2, x_3)$  et  $v = (y_1, y_2, y_3)$ . Montrer que la forme quadratique associée est définie positive. Donner une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  pour cette forme.

**Correction** Soit  $q$  la forme quadratique associée à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . En appliquant l'algorithme de Gauss en commençant par la variable  $x_3$  on obtient successivement :

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= (x_3 - x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 \\ &= (x_3 - x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 \end{aligned}$$

et on voit donc que la signature de  $q$  est  $(3, 0)$ , c'est à dire que  $q$  est positive.

Soit  $B$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Pour trouver une base orthonormée pour  $q$  on note que si  $C$  est la base dans laquelle les coordonnées sont  $(x_1, x_1 - x_2, x_3 - x_1 - x_2)$  alors  $\text{Mat}_C(q) = 1_3$  d'après la forme obtenue par réduction de Gauss ci-dessus. On a de plus

$$\text{Mat}_B^C(\text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =: P$$

et on calcule que

$$\text{Mat}_C^B(\text{Id}) = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Question (2)* Soit  $\omega$  l'application linéaire  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Erreur d'énoncé :** La matrice donnée n'est pas celle d'une isométrie de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , prendre

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Question (2.a)* Donner la matrice de  $\omega$  dans une base de  $\mathbb{R}^3$  orthonormée pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Correction** On voit que :

$$\omega(e_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2, \quad \omega(e_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$$

et

$$\omega(e_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1.$$

La matrice de  $\omega$  dans  $C$  est donc

$$\text{Mat}_C^C(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi calculer que :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_C^C(\omega) &= \text{Mat}_B^C(\text{Id}) \cdot \text{Mat}_B^B(\omega) \cdot \text{Mat}_C^B(\text{Id}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Question (2.b)* Montrer que  $\omega$  est une isométrie de  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Correction** On voit que la matrice de  $\omega$  dans la base orthonormée  $C$  est une matrice orthogonale. Il suit que  $\omega$  est une isométrie.

On peut aussi vérifier que  ${}^tO \cdot M \cdot O = M$ , où :

$$O = \text{Mat}_B^B(\omega) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, M = \text{Mat}_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tO \cdot M \cdot O &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Question (2.c)* Calculer  $\ker(\omega - \text{Id})$  et donner la forme réduite de  $\omega$ .

**Correction** Dans la base  $C$  on voit immédiatement que  $\omega - \text{Id}$  est de rang 1 et que les vecteurs fixes de  $\omega$  sont les multiples de  $e_1 + e_2 + e_3$ . Dans la base orthogonale

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3)$$

de l'orthogonal on voit que :

$$\omega(f_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$$

et

$$\omega(f_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_1 + e_2 + e_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3.$$

Soit encore  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$ . D'après les calculs précédents on a dans la base orthonormée  $D = (f_1, f_2, f_3)$  :

$$\text{Mat}_D^D(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

qui est la forme réduite de  $\omega$ .

*Question (3)* Donner une base de  $\mathbb{C}^3$  diagonalisant  $\omega$ .

**Correction** On a  $\omega^3 = 1$  et les valeurs propres complexes de  $\omega$  sont donc  $1, j, j^2$  où  $j = e^{2i\pi/3}$ . Des vecteurs propres correspondants sont

$$e_1 + e_2 + e_3, e_1 + je_2 + j^2e_3, e_1 + j^2e_2 + je_3.$$

### Problème 3 ( points)

*Question (1)* Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 2 et  $B$  une base orthonormée. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que si  $u, v \in E$  alors

$$\det_B(u, v) \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

**Correction** On note  $(u_1, u_2)$  et  $(v_1, v_2)$  les coordonnées respectives de  $u, v$  dans  $B$ . On a :

$$\det_B(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans  $\mathbb{R}^2$  que l'on a

$$|u_1 v_2 - u_2 v_1| \leq \sqrt{u_1^2 + (-u_2)^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

et comme  $B$  est orthonormée le côté droit est égal à  $\|u\| \cdot \|v\|$ .

*Question (2)* On suppose maintenant que  $E$  est euclidien de dimension  $n \geq 2$  et que  $B$  en est une base orthonormée.

*Question (2.a)* Vérifier que si  $v_1, \dots, v_n$  est une base de  $E$  et pour  $i = 2, \dots, n$  on se donne  $w_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$  alors

$$\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det_B(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n).$$

**Correction** On peut démontrer ce résultat par récurrence en utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes et son antisymétrie, on va plutôt utiliser une écriture matricielle.

Si  $(v_1, \dots, v_n)$  n'est pas libre alors les deux côtés valent 0. Sinon c'est une base de  $E$  que l'on notera  $C$  et on a alors

$$\det_B(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) = \det_C(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \cdot \det_B(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Mais comme  $w_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$  la matrice des coordonnées de  $(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$  dans  $C$  est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc de déterminant 1, et on a  $\det_C(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) = 1$  d'où le résultat voulu suit.

*Question (2.b)* Justifier que si  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base orthonormée de  $E$  alors

$$|\det_B(u_1, \dots, u_n)| = 1.$$

**Correction** La matrice des coordonnées de  $u_1, \dots, u_n$  dans  $B$  est une matrice orthogonale et son déterminant vaut donc  $\pm 1$  (en effet, toutes ses valeurs propres complexes sont de module 1).

*Question (3.a)* Soient  $v \in E$  et  $V \subset E$  un sous-espace vectoriel. Soit  $w$  le projeté orthogonal de  $v$  sur  $V$ . Montrer que  $\|w\| \leq \|v\|$ .

**Coquille** : remplacer par « Soit  $w$  le projeté orthogonal de  $v$  sur  $V$ . »

**Correction** Soit  $u = v - w$ . Par définition du projeté orthogonal on a  $\langle u, w \rangle = 0$  (en effet  $u \in V^\perp$  et  $w \in V$ ). Il suit que :

$$\|v\|^2 = \|w + u\|^2 = \|w\|^2 + \|u\|^2$$

et donc que  $\|w\|^2 = \|v\|^2 - \|u\|^2 \leq \|v\|^2$ .

*Question (3.b)* En utilisant le procédé de Gram–Schmidt et les questions précédentes montrer que pour tous  $v_1, \dots, v_n \in E$  on a :

$$|\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdots \|v_n\|.$$

**Correction** Supposons que  $(v_1, \dots, v_n)$  soit une base de  $E$ . Soit alors  $u_1, \dots, u_n$  la base orthonormée obtenue à partir de  $(v_1, \dots, v_n)$  par le procédé de Gram–Schmidt. On a

$$u_i = \ell_i^{-1}(v_i - w_i)$$

où  $w_i$  est le projeté orthogonal de  $v_i$  sur  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$  et  $\ell_i = \|v_i - w_i\|$ . Par la question (2.a) on a que

$$\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n) = (\ell_1 \cdots \ell_n) \cdot \det_B(u_1, \dots, u_n)$$

et par la question (2.b) il suit que

$$|\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)| = \ell_1 \cdots \ell_n.$$

D'autre part, par (3.a) on a  $\|v_i - w_i\| \leq \|v_i\|$  (en effet,  $v_i - w_i$  est le projeté de  $v_i$  sur l'orthogonal de  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$ ) et il vient finalement que l'on a

$$|\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|. \quad (2)$$

*Question (3.c)* Que peut-on-dire sur le cas d'égalité dans l'inégalité ci-dessus ?

**Correction** La seule majoration utilisée en (3.b) est  $\|v_i - w_i\| \leq \|v_i\|$ , il y a donc égalité dans (2) si et seulement si  $\|v_i - w_i\| = \|v_i\|$  pour tout  $i$ , autrement dit  $w_i = 0$  pour tout  $i$ . Ceci se produit si et seulement si les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  sont deux à deux orthogonaux.