

CORRIGÉ EXAMEN FINAL, ALGÈBRE IV

Problème 1 (D points)

ans tout le problème on notera :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

et ϕ l'application linéaire $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A .

Question (1.a) Justifier que A est diagonalisable en base orthonormée sur \mathbb{R} .

Correction La matrice A est symétrique et le théorème spectral implique qu'elle est diagonalisable en base orthonormée.

Question (1.b) Calculer le polynôme caractéristique de A .

Correction En développant par rapport à la première colonne on obtient :

$$\begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} &= (X-1) \left((X-2) \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (X-1) ((X-2)(X^2 - 3X + 1) - (X-1)) \\ &= (X-1)(X^3 - 5X^2 + 6X - 1) = X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 7X + 1 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = X^2 - 3X + 1.$$

Finalement, on a donc en remplaçant les termes dans (1) que :

$$\det(X \text{Id} - A) = X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 7X + 1 - (X^2 - 3X + 1) = X^4 - 6X^3 + 10X^2 - 4X.$$

Question (2) Donner des bases pour les sous-espaces $\ker(\phi)$ et $\ker(\phi - 2\text{Id})$ de \mathbb{R}^4 .

Correction En résolvant les systèmes on voit que :

$$\ker(\phi) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ker(\phi - 2\text{Id}) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question (3.a) Soit $V = \ker(\phi) + \ker(\phi - 2\text{Id})$. Donner une base orthonormée du sous-espace $W = V^\perp$.

Correction Un vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est orthogonal à V si et seulement s'il est orthogonal aux deux vecteurs de base ci-dessus, c'est à dire si et seulement si :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

En résolvant le système on obtient comme base :

$$v_1 = (1 \ 0 \ 0 \ -1), v_2 = (0 \ 1 \ -1 \ 0)$$

Question (3.b) Justifier que $\phi(W) \subset W$ et donner la matrice de $\phi|_W$ dans la base de W obtenue précédemment.

Correction On a $\phi(V) \subset V$ vu que V est engendré par des vecteurs propres de ϕ . Comme ϕ est autoadjoint il suit par une proposition du cours que l'on a aussi $\phi(V^\perp) \subset V^\perp$.

Question (4) Donner le spectre de ϕ et une base orthonormée de \mathbb{R}^4 constituée de vecteurs propres pour ϕ .

Correction On calcule la matrice de $\phi|_W$ dans la base $B = (v_1, v_2)$. On a

$$\phi(v_1) = (1 \ -1 \ 1 \ -1) = v_1 - v_2$$

et

$$\phi(v_2) = (-1 \ 3 \ -3 \ 1) = -v_1 + 3v_2$$

d'où il suit que

$$\text{Mat}_B(\phi|_W) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(noter que la matrice est symétrique, ce qui est attendu vu que B est orthogonale). On voit donc que $\det -X \text{Id}_W - \phi|_W = X^2 - 4X + 2$. On peut vérifier que l'on a bien :

$$\det(X \text{Id}_V - \phi) = X(X - 2)(X^2 - 4X + 2).$$

Les racines de $X^2 - 4X + 2$ sont $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$ et le spectre de π est donc égal à :

$$\{0, 2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}\}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 & -1 \\ -1 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et on voit que le noyau de la matrice de droite est engendré par $\begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il suit que $\ker(\phi - (2 - \sqrt{2}) \text{Id}_V)$ est engendré par $(\sqrt{2} + 1)v_1 + v_2$, c'est-à-dire en coordonnées :

$$\ker(\phi - (2 - \sqrt{2}) \text{Id}_V) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

De la même manière on voit que $\ker(\phi - (2 + \sqrt{2}) \text{Id}_V)$ est engendré par $(1 - \sqrt{2})v_1 + v_2$, soit encore

$$\ker(\phi - (2 - \sqrt{2}) \text{Id}_V) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

On pose donc :

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}, e'_4 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

qui forment une base orthogonale propre pour ϕ . La base (e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_i = e'_i / \|e'_i\|$ est donc la base souhaitée. On voit que :

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 2, \|e_3\| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \|e_4\| = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Question (5) Montrer que la fonction q sur \mathbb{R}^4 définie par $q(v) = \langle \phi(v), v \rangle$ est une forme quadratique. Quelle est sa signature ?

Correction Soit b la forme bilinéaire sur \mathbb{R}^4 définie par :

$$b(u, v) = \langle \phi(u), v \rangle.$$

Comme ϕ est autoadjoint on voit que b est symétrique. De plus $q(v) = b(v, v)$ donc q est une forme quadratique.

Dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) la matrice de q est diagonale à coefficients positifs dont un nul, et il suit que la signature de q est $(3, 0)$.

Problème 2 (4 points)

Question (1) Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur \mathbb{R}^3 définie par :

$$\langle u, v \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

si $u = (x_1, x_2, x_3)$ et $v = (y_1, y_2, y_3)$. Montrer que la forme quadratique associée est définie positive. Donner une base orthonormée de \mathbb{R}^3 pour cette forme.

Correction Soit q la forme quadratique associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En appliquant l'algorithme de Gauss en commençant par la variable x_3 on obtient successivement :

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= (x_3 - x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 \\ &= (x_3 - x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 \end{aligned}$$

et on voit donc que la signature de q est $(3, 0)$, c'est à dire que q est positive.

Soit B la base canonique de \mathbb{R}^3 . Pour trouver une base orthonormée pour q on note que si C est la base dans laquelle les coordonnées sont $(x_1, x_1 - x_2, x_3 - x_1 - x_2)$ alors $\text{Mat}_C(q) = 1_3$ d'après la forme obtenue par réduction de Gauss ci-dessus. On a de plus

$$\text{Mat}_B^C(\text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =: P$$

et on calcule que

$$\text{Mat}_C^B(\text{Id}) = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Question (2) Soit ω l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Erreur d'énoncé : La matrice donnée n'est pas celle d'une isométrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, prendre

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Question (2.a) Donner la matrice de ω dans une base de \mathbb{R}^3 orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Correction On voit que :

$$\omega(e_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2, \quad \omega(e_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$$

et

$$\omega(e_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1.$$

La matrice de ω dans C est donc

$$\text{Mat}_C^C(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi calculer que :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_C^C(\omega) &= \text{Mat}_B^C(\text{Id}) \cdot \text{Mat}_B^B(\omega) \cdot \text{Mat}_C^B(\text{Id}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Question (2.b) Montrer que ω est une isométrie de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Correction On voit que la matrice de ω dans la base orthonormée C est une matrice orthogonale. Il suit que ω est une isométrie.

On peut aussi vérifier que ${}^tO \cdot M \cdot O = M$, où :

$$O = \text{Mat}_B^B(\omega) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, M = \text{Mat}_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tO \cdot M \cdot O &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Question (2.c) Calculer $\ker(\omega - \text{Id})$ et donner la forme réduite de ω .

Correction Dans la base C on voit immédiatement que $\omega - \text{Id}$ est de rang 1 et que les vecteurs fixes de ω sont les multiples de $e_1 + e_2 + e_3$. Dans la base orthogonale

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3)$$

de l'orthogonal on voit que :

$$\omega(f_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$$

et

$$\omega(f_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_1 + e_2 + e_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3.$$

Soit encore $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$. D'après les calculs précédents on a dans la base orthonormée $D = (f_1, f_2, f_3)$:

$$\text{Mat}_D^D(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

qui est la forme réduite de ω .

Question (3) Donner une base de \mathbb{C}^3 diagonalisant ω .

Correction On a $\omega^3 = 1$ et les valeurs propres complexes de ω sont donc $1, j, j^2$ où $j = e^{2i\pi/3}$. Des vecteurs propres correspondants sont

$$e_1 + e_2 + e_3, e_1 + je_2 + j^2e_3, e_1 + j^2e_2 + je_3.$$

Question (1) Soit E un espace euclidien de dimension 2 et B une base orthonormée. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que si $u, v \in E$ alors

$$\det_B(u, v) \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Correction On note (u_1, u_2) et (v_1, v_2) les coordonnées respectives de u, v dans B . On a :

$$\det_B(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans \mathbb{R}^2 que l'on a

$$|u_1 v_2 - u_2 v_1| \leq \sqrt{u_1^2 + (-u_2)^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

et comme B est orthonormée le côté droit est égal à $\|u\| \cdot \|v\|$.

Question (2) On suppose maintenant que E est euclidien de dimension $n \geq 2$ et que B en est une base orthonormée.

Question (2.a) Vérifier que si v_1, \dots, v_n est une base de E et pour $i = 2, \dots, n$ on se donne $w_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$ alors

$$\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det_B(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n).$$

Correction On peut démontrer ce résultat par récurrence en utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes et son antisymétrie, on va plutôt utiliser une écriture matricielle.

Si (v_1, \dots, v_n) n'est pas libre alors les deux côtés valent 0. Sinon c'est une base de E que l'on notera C et on a alors

$$\det_B(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) = \det_C(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \cdot \det_B(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Mais comme $w_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$ la matrice des coordonnées de $(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$ dans C est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc de déterminant 1, et on a $\det_C(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) = 1$ d'où le résultat voulu suit.

Question (2.b) Justifier que si (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormée de E alors

$$|\det_B(u_1, \dots, u_n)| = 1.$$

Correction La matrice des coordonnées de u_1, \dots, u_n dans B est une matrice orthogonale et son déterminant vaut donc ± 1 (en effet, toutes ses valeurs propres complexes sont de module 1).

Question (3.a) Soient $v \in E$ et $V \subset E$ un sous-espace vectoriel. Soit w le projeté orthogonal de v sur V . Montrer que $\|w\| \leq \|v\|$.

Coquille : remplacer par « Soit w le projeté orthogonal de v sur V . »

Correction Soit $u = v - w$. Par définition du projeté orthogonal on a $\langle u, w \rangle = 0$ (en effet $u \in V^\perp$ et $w \in V$). Il suit que :

$$\|v\|^2 = \|w + u\|^2 = \|w\|^2 + \|u\|^2$$

et donc que $\|w\|^2 = \|v\|^2 - \|u\|^2 \leq \|v\|^2$.

Question (3.b) En utilisant le procédé de Gram–Schmidt et les questions précédentes montrer que pour tous $v_1, \dots, v_n \in E$ on a :

$$|\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdots \|v_n\|.$$

Correction Supposons que (v_1, \dots, v_n) soit une base de E . Soit alors u_1, \dots, u_n la base orthonormée obtenue à partir de (v_1, \dots, v_n) par le procédé de Gram–Schmidt. On a

$$u_i = \ell_i^{-1}(v_i - w_i)$$

où w_i est le projeté orthogonal de v_i sur $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$ et $\ell_i = \|v_i - w_i\|$. Par la question (2.a) on a que

$$\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n) = (\ell_1 \cdots \ell_n) \cdot \det_B(u_1, \dots, u_n)$$

et par la question (2.b) il suit que

$$|\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)| = \ell_1 \cdots \ell_n.$$

D'autre part, par (3.a) on a $\|v_i - w_i\| \leq \|v_i\|$ (en effet, $v_i - w_i$ est le projeté de v_i sur l'orthogonal de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$) et il vient finalement que l'on a

$$|\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|. \quad (2)$$

Question (3.c) Que peut-on dire sur le cas d'égalité dans l'inégalité ci-dessus ?

Correction La seule majoration utilisée en (3.b) est $\|v_i - w_i\| \leq \|v_i\|$, il y a donc égalité dans (2) si et seulement si $\|v_i - w_i\| = \|v_i\|$ pour tout i , autrement dit $w_i = 0$ pour tout i . Ceci se produit si et seulement si les vecteurs v_1, \dots, v_n sont deux à deux orthogonaux.