

Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 + 6xy - 4xz + 10y^2 - 16yz + 4z^2$$

la matrice de q dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 10 & -8 \\ -2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

et l'algorithme de Gauss donne l'expression :

$$q = (x + 3y - 2z)^2 + (y - 2z)^2 - 4z^2$$

donc la signature de q est $(2, 1)$. Une base orthogonale est

$$(1, 0, 0), (-3, 1, 0), (-4, 2, 1).$$

Soit q la forme quadratique

$$q(x, y, z) = 2xy + 2xz - 2yz - 3z^2$$

la matrice de q dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

la réduction de Gauss donne comme expression :

$$q = 2(x - z)(y + z) - z^2 = \frac{1}{2}(x + y)^2 - \frac{1}{2}(x - y - 2z)^2 - z^2$$

et la signature de q est donc $(1, 2)$. Une base orthogonale est

$$(1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, -1, 1)$$