

Feuille d'exercices n° 1 :

Rappels d'algèbre linéaire

Dans tous les exercices $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1. FORMES LINÉAIRES

Exercice 1

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note $e^i : E \rightarrow K$ l'application définie par $e^i(v) = x_i$ si $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

(1.a) Donner une formule pour e^1, e^2 dans les cas suivants :

- $E = \mathbb{R}^n$ et B est la base canonique ;
- $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (2, 1)$ et $e_2 = (1, 1)$;
- $E = \mathbb{R}^3$ et la matrice des coordonnées de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1.b) En général, montrer que e^i est une application linéaire.

(1.c) Montrer que (e^1, \dots, e^n) est une base de l'espace dual E^* .

Exercice 2

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $\dim(E) = n$. Soit (ℓ_1, \dots, ℓ_k) une famille libre dans E^* .

(2.a) Montrer que l'application linéaire $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ définie par $\phi(v) = (\ell_1(v), \dots, \ell_k(v))$ est surjective (*on pourra montrer que le fait que son image soit contenue dans un sous-espace vectoriel strict contredit la liberté de ℓ_1, \dots, ℓ_k*).

(2.b) Soit F le sous-ensemble défini par :

$$F = \{v \in E : \forall i = 1, \dots, k : \ell_i(v) = 0\} = \bigcap_{i=1}^k \ker(\ell_i).$$

Déduire de la question précédente que F est un sous-espace vectoriel et que $\dim(F) = n - k$. Donner une interprétation géométrique de ce fait pour $n = 2, k = 2$ et $n = 3, k = 2, 3$.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$ un entier ; on note $E = M_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n sur K .

(3.a) Pour $A = (a_{ij}) \in E$ on définit la *trace* de A par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Vérifier que tr définit une forme linéaire sur E .

(3.b) On note $e_{kl} \in E$ la matrice dont le coefficient à la ligne k et colonne l est 1, et tous les autres 0. Montrer que $B = (e_{11}, \dots, e_{1n}, e_{21}, \dots, e_{nn})$ est une base de E .

(3.c) Calculer $\text{tr}(e_{kl}A)$ et $\text{tr}(Ae_{kl})$ pour $A = (a_{ij}) \in E$ et $k, l = 1, \dots, n$. En déduire que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour toutes $A, B \in E$.

(3.d) Montrer que les applications $A \mapsto \text{tr}(e_{kl}A)$ pour $k, l = 1, \dots, n$ forment une base de l'espace dual E^* .

* (3.e) Montrer que toute forme linéaire $\ell \in E^*$ telle que $\forall A, B \in E : \ell(AB) = \ell(BA)$ est un multiple de tr .

Exercice 4

Soit $d \geq 0$ un entier. On note $E = \mathbb{C}_d[T]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d sur \mathbb{C} .

(4.a) Soit $f \in E$. Montrer que l'application $\ell_f : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\ell_f(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \overline{f(e^{it})} dt$$

est une forme linéaire sur E .

(4.b) Si $0 \leq k \leq d$ est un entier on pose $e_k = T^k \in E$; on notera aussi $\ell_k = \ell_{e_k}$. Calculer $\ell_k(e_l)$ pour $0 \leq k, l \leq d$ et en déduire que ℓ_0, \dots, ℓ_d est une base de E^* .

2. APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 5

(5.a) Diagonaliser sur \mathbb{R} la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(5.b) Donner une base de \mathbb{C}^2 dans laquelle l'application linéaire $(x, y) \mapsto (-y, x)$ ait une matrice diagonale. Même question pour $(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$.

(5.c) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur \mathbb{C} .

Exercice 6

Soit $d \geq 0$ et soient E le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_{d+1}[T]$ et F le sous-espace $\mathbb{R}_d[T]$. Soit ϕ l'application $E \rightarrow E$ définie par $\phi(f)(T) = f(T + 1) - f(T)$.

(6.a) Montrer que ϕ est linéaire, calculer son noyau et en déduire que $\text{im}(\phi) = F$.

(6.b) Ecrire la matrice de ϕ dans la base (e_0, \dots, e_d) (où $e_k = T^k$).

(6.c) Résoudre le système linéaire $\phi(f) = T^l$ pour $l = 0, 1, 2$. En déduire une expression en fonction de n pour $\sum_{i=1}^n (i + 3)^2$.

Exercice 7

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $\phi \in \text{End}(E)$ une application linéaire.

(7.a) Montrer que si $k \geq 1$ alors $\ker(\phi^k) \subset \ker(\phi^{k+1})$, et que si $\ker(\phi^{k+1}) = \ker(\phi^k)$ alors $\ker(\phi^{k+2}) = \ker(\phi^{k+1})$.

(7.b) Déduire de la question précédente qu'il existe un entier $K_1 \geq 1$ tel que $\ker(\phi^{k+1}) = \ker(\phi^k)$ pour tout $k \geq K_1$.

(7.c) Montrer que $\operatorname{im}(\phi^{k+1}) \supset \operatorname{im}(\phi^k)$ et qu'il existe un entier $K_2 \geq 1$ tel que $\operatorname{im}(\phi^{k+1}) = \operatorname{im}(\phi^k)$ pour tout $k \geq K_2$.

(7.d) Soit $K = \max(K_1, K_2)$ On pose :

$$N = \bigcup_{k=1}^K \ker(\phi^k), \quad C = \bigcap_{k=1}^K \operatorname{im}(\phi^k).$$

Montrer que N, C sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E = N \oplus C$.

(7.e) Montrer que $\phi(C) \subset C$ et $\phi(N) \subset N$. Montrer que $\phi|_C$ est inversible, et que la seule valeur propre de $\phi|_N$ est 0.

(7.f) Expliquer le lien des résultats de la question précédente avec la décomposition de Jordan.