

Feuille d'exercices n° 3 :

Espaces euclidiens

Exercice 1

Soit $n \geq 1$. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq |x_1| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$ que l'on munit de la forme bilinéaire :

$$\langle u, v \rangle = 6x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

(2.a) Montrer que c'est un produit scalaire et donner une base orthonormée de E .

(2.b) Soit $F = \mathbb{R} \cdot (1, 2, 3)$. Donner une base orthonormée de F^\perp .

Exercice 3

Soit $\phi : E \rightarrow E'$ une application linéaire entre espaces euclidiens.

(3.a) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\phi^* : E' \rightarrow E$ telle que

$$\forall u \in E, u' \in E' : \langle \phi(u), u' \rangle' = \langle u, \phi^*(u') \rangle.$$

(3.b) Montrer que $\text{im}(\phi^*) = \ker(\phi)^\perp$.

(3.c) Si B, B' sont des bases orthogonales de E, E' montrer que

$$\text{Mat}_{B'}^B(\phi^*) = {}^t \text{Mat}_B^{B'}(\phi).$$

(3.d) Dédurre des questions précédentes que si $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ alors A et ${}^t A$ ont même rang.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\phi : E \rightarrow E$ autoadjoint. On note $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de E et

$$\text{Mat}_B^B(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

(4.a) Soit $v_\theta = (\cos(\theta)e_1 - \sin(\theta)e_2, \sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2)$. Calculer $\phi(v_\theta)$ pour $v \in [0, 2\pi[$, puis donner en fonction de a, b, c des vecteurs propres pour ϕ formant une base orthonormée.

(4.b) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi(T) = \det(\phi - T \cdot \text{Id}_E)$ et ses racines. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 5

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\phi : E \rightarrow E$ un endomorphisme autoadjoint. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de ϕ .

(5.a) Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée telle que $\phi(e_i) = \lambda_i e_i$. Si $v \in E$, calculer $\langle \phi(v), v \rangle$ en fonction des coordonnées de v dans B et des λ_i .

(5.b) Dédurre de la question précédente que :

$$\lambda_1 = \min_{v \in E \setminus \{0\}} \frac{\langle \phi(v), v \rangle}{\|v\|^2} \text{ et } \lambda_n = \max_{v \in E \setminus \{0\}} \frac{\langle \phi(v), v \rangle}{\|v\|^2}.$$

(5.c) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On pose $V_k = \mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_k$. En utilisant la question (b) appliquée à $\phi|_{V_k}$ montrer que

$$\lambda_k \geq \min_{V: \dim(V)=k} \left(\max_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle \phi(v), v \rangle}{\|v\|^2} \right).$$

(5.d) Soit $W_k = \mathbb{R}e_k + \dots + \mathbb{R}e_n$. Montrer que si $V \subset E$ est un sous-espace de dimension k alors $V \cap W_k \neq \{0\}$ et en déduire avec les questions précédentes que :

$$\lambda_k = \min_{V: \dim(V)=k} \left(\max_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle \phi(v), v \rangle}{\|v\|^2} \right).$$

Exercice 6

Soit E un espace euclidien. Si ϕ est un endomorphisme de E et V est un sous-espace on note p_V la projection orthogonale sur V et on pose $\phi_V = (p_V \circ \phi \circ p_V)|_V$.

(6.a) Soient V, W des sous-espaces de E tels que $E = V + W$. Montrer que si ϕ est autoadjoint positif alors on a :

$$\text{rg}(\phi_V) + \text{rg}(\phi_W) = \text{rg}(\phi) + \text{rg}(\phi_{V \cap W}).$$

(6.b) Est-ce-que le résultat de la question précédente est vrai quand on ne suppose plus que ϕ est positif?

Exercice 7

Soient E un espace euclidien et π un projecteur de E . Montrer que π est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall v \in E : \|\pi(v)\| \leq \|v\|.$$

Exercice 8

Soient π, π' deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.

(8.a) Montrer que $\pi \circ \pi' = \pi' \circ \pi$ si et seulement si

$$\text{im}(\pi) = (\text{im}(\pi) \cap \text{im}(\pi')) + (\text{im}(\pi) \cap \ker(\pi')) \text{ et } \text{im}(\pi') = (\text{im}(\pi') \cap \text{im}(\pi)) + (\text{im}(\pi') \cap \ker(\pi)).$$

Quelle est alors la nature de $\pi \circ \pi'$?

(8.b) Montrer que $\pi + \pi'$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $\text{im}(\pi) \subset \ker(\pi')$.

Exercice 9

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2, $D \subset E$ une droite, $v \in E \setminus D$ et $e \in]0, +\infty[$. Soit :

$$C = \{u \in E : \|u - v\| = e \cdot \inf_{w \in D} \|u - w\|\}.$$

Montrer que C est une conique et discuter de sa nature selon la valeur de e .

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES**Exercice 10**

On fixe $d \geq 1$ et soit $E = \mathbb{R}_d[X]$.

(10.a) On munit E du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt;$$

donner une base orthonormée de E pour $d = 2$.

(10.b) On définit des polynômes $T_0, \dots, T_d \in E$ (“polynômes de Tchebychev”) par :

$$\begin{aligned} T_0 &= 1; \\ T_1 &= X; \\ \forall 2 \leq k \leq d : T_k &= 2XT_{k-1} - T_{k-2}. \end{aligned}$$

Montrer que pour tout k et $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$(0.1) \quad T_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta).$$

(10.c) Sur E on définit une forme bilinéaire par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Montrer que ceci est bien défini, que c’est un produit scalaire sur E et (en utilisant (0.1)) que (T_0, \dots, T_d) est une base orthogonale de E .

(10.d) Calculer la norme de T_k .

(10.e) Soit H_k la fonction sur \mathbb{R} définie par $H_k(t) = e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k} (e^{-t^2})$. Montrer que H_k est la fonction induite un polynôme H_k de degré k (“polynômes de Hermite”) et que les $H_k, k = 0, \dots, d$ sont deux à deux orthogonaux dans E muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t^2} dt.$$

Exercice 11

Démontrer que si ϕ est une isométrie d’un espace euclidien E alors $|\det(\phi)| = 1$. (*Indication : supposer le contraire et montrer qu’il existe alors une suite d’isométries ω_n telles que $\det(\omega_n) \rightarrow +\infty$, puis observer que ceci est impossible*).

Exercice 12

(12.a) Soit $F \subset E$ un sous-espace de dimension $n-1$ et p la projection orthogonale sur F . Montrer

que $(p \circ \phi \circ p)|_F$ est un endomorphisme autoadjoint de F . En utilisant l'exercice 5 montrer que si $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ sont ses valeurs propres alors on a

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n.$$

(12.b) Montrer que si $\dim(E) = 2$ il n'y a pas d'autre restriction pour le spectre de $(p \circ \phi \circ p)|_F$ que celle donnée à la question précédente. Montrer qu'en général c'est faux en dimension supérieure.

Exercice 13

Soit E un espace euclidien et soit $S \subset \text{End}(E)$ le sous-espace des endomorphismes autoadjoints. Pour $\phi \in \text{End}(E)$ on pose :

$$N(\phi) = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|}.$$

(13.a) Montrer que :

$$\forall \phi, \psi \in \text{End}(E) : N(\phi + \psi) \leq N(\phi) + N(\psi)$$

et que $N(\phi) = 0$ si et seulement si $\phi = 0$.

(13.b) En utilisant l'exercice 5 montrer que pour $\phi \in S$ on a $N(\phi) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(\phi)} |\lambda|$.

(13.c) En général, montrer que :

$$N(\phi) = N(\phi^*) \text{ et } N(\phi) = \sqrt{N(\phi^* \phi)}.$$

(13.d) On suppose que ϕ est autoadjoint positif et on reprend la notation de l'exercice 5. Montrer que si $v \in E \setminus (\mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_{n-1})$ alors

$$N(\phi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\|\phi^n(v)\|}{\|v\|} \right)^{1/n}.$$

Exercice 14

Donner une interprétation géométrique des exercices 4 et 5.

Exercice 15

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et Q la quadrique définie par l'équation $\langle Av, v \rangle = c$. On suppose que Q est non-vide. Donner un critère nécessaire et suffisant sur les valeurs propres de A pour que l'ensemble des isométries de \mathbb{R}^n préservant Q soit infini.