

EXAMEN DE SECONDE SESSION, ALGÈBRE 4  
JEUDI 29 JUIN 2017

**Problème 1 (4 points)**

Donner la signature et une base orthogonale de la forme quadratique  $q$  définie par :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

**1.5 points pour la signature, 2.5 pour une base orthogonale**

**Correction** On applique l'algorithme de Gauss :

$$\begin{aligned} q &= (2x_1 + 2x_3)(2x_2 - 2x_3) + 4x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + (2x_3)^2. \end{aligned}$$

On voit donc que  $q$  est de signature  $(2, 1)$  et que (en notant  $B$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\text{Mat}_B(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il suit que si  $C$  est la base telle que

$$\text{Mat}_B^C(\text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: P$$

alors  $C$  est orthogonale pour  $Q$ . On calcule que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et il suit que les colonnes de cette matrice forment une base orthogonale pour  $q$ .

**Problème 2 (8 points)**

On note  $E = \mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique  $B$  est orthonormée. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et  $\phi$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $B$  est  $A$ .

*Question (1)* Justifier qu'il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $\phi$  est diagonale. **0.5 points**

**Correction** La matrice de  $\phi$  dans la base orthonormée  $B$  est symétrique, donc  $\phi$  est autoadjoint. Le théorème spectral implique donc que  $\phi$  est diagonalisable en base orthonormée.

*Question (2)* Donner une base de  $\ker(\phi - \text{Id})$ . **1 point**

**Correction**  $(0, 1, -1)$

*Question (3)* Soit  $V$  l'orthogonal dans  $E$  de  $\ker(\phi - \text{Id})$ . Donner une base orthonormée de  $V$ . **1.5 points**

**Correction**  $((1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1))$ .

*Question (4.a)* On suppose que  $W \subset E$  est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et que  $(e_1, e_2)$  en est une base orthonormée. Montrer que le projeté orthogonal de  $v \in E$  sur  $W$  est donné par :

$$\langle e_1, v \rangle e_1 + \langle e_2, v \rangle e_2.$$

**1 point**

**Correction** On note  $\pi(v)$  cette expression. Clairement  $\pi$  est linéaire. Si  $v \in W$  alors on voit que  $\langle e_i, \pi(v) \rangle = \langle e_i, v \rangle$  pour  $i = 1, 2$  et il suit que  $\pi \circ \pi(v) = \pi(v)$ . Donc  $\pi \circ \pi = \pi$  vu que  $\text{Im}(\pi) \subset W$  et il suit que  $\pi$  est un projecteur.

De plus, si  $v$  est orthogonal à  $W$  alors  $\langle e_i, v \rangle = 0$  et on a donc  $\pi(v) = 0$ . Le noyau de  $\pi$  est donc l'orthogonal de son image, ce qui signifie que  $\pi$  est un projecteur orthogonal.

*Question (4.b)* Soit  $\pi$  la projection orthogonale de  $E$  sur  $V$ . Donner la matrice de  $\pi$  dans la base  $B$ . **0.5 points**

**Correction**

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Question (5.a)* Soit  $\psi = \pi \circ \phi \circ \pi$ . Montrer que  $\psi$  est autoadjoint. **1 point**

**Correction** On a :

$$\psi^* = (\pi \phi \pi)^* = \pi^* \phi^* \pi^* = \pi \phi \pi = \psi$$

*Question (5.b)* Montrer que  $\psi(v) = 0$  si  $v \in \ker(\phi - \text{Id})$  et  $\psi(v) = \phi(v)$  si  $v \in V$ . **1 point**

**Correction** si  $v \in \ker(\phi - \text{Id})$  alors  $\pi(v) = 0$  donc aussi  $\psi(v) = 0$ . Si  $v \in V$  alors  $\pi(v) = v$ , donc  $\psi(v) = \pi(\phi(v))$ . Comme on a  $\phi(V) \subset V$  vu que c'est l'orthogonal d'un sous-espace propre de  $\phi$  on a  $\phi(v) \in V$  donc aussi  $\pi(\phi(v)) = \phi(v)$  et finalement  $\psi(v) = \phi(v)$ .

*Question (5.c)* Calculer le spectre de  $\psi$ , et en déduire celui de  $\phi$ . **1.5 points**

**Correction** La matrice de  $\psi$  dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

et on calcule que son polynôme caractéristique vaut

$$X(X^2 + 2X - 5) = X((X + 1)^2 - 6) = X(X + 1 - \sqrt{6})(X + 1 + \sqrt{6})$$

de sorte que le spectre de  $\psi$  est  $\{0, -1 \pm \sqrt{6}\}$ . D'autre part il suit de la question précédente que le spectre de  $\phi|_V$  est le même que celui de  $\psi|_V$ , comme  $V = \ker(\phi - \text{Id}) = \ker(\psi)$  on en déduit que  $\ker(\phi) = \{1, -1 \pm \sqrt{6}\}$ .

### Problème 3 (4 points)

Soit  $E$  le sous-espace des fonctions continues  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  engendré par les fonctions 1 (fonction constante égale à 1), sin et cos. Pour  $f, g \in E$  on pose :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

*Question (1.a)* Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique et donner sa matrice dans la base  $B_0 = (1, \sin, \cos)$ . **1 point**

*Question (1.b)* Dédurre de la question précédente que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$  et donner une base orthonormée  $B$  de  $E$ . **0.5 points**

*Question (2)* Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  on définit une application linéaire  $\rho_\alpha : E \rightarrow E$  par :

$$\rho_\alpha(f)(t) = f(t - \alpha).$$

Montrer que  $\rho_\alpha$  est une isométrie de  $E$  et donner sa matrice dans la base  $B'$ . **.5 points pour isométrie, 1 point pour la matrice**

*Question (3)* Soit  $E_{\mathbb{C}}$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel engendré par 1, sin, cos. Donner les valeurs et vecteurs propres de  $\rho_\alpha$  dans  $E_{\mathbb{C}}$ . **1 point**

### Problème 4 (4 points)

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien.

*Question (1)* Soit  $\phi : E \rightarrow E$  un endomorphisme autoadjoint. Soit  $V$  l'orthogonal dans  $E$  de  $\ker(\phi)$ . Montrer que  $\phi(V) \subset V$ , puis que  $\phi' := \phi|_V$  est un isomorphisme  $V \rightarrow V$ . **1 point**

*Question (2.a)* Soit  $\alpha$  un endomorphisme quelconque de  $E$ . Montrer que  $\beta = \alpha^* \circ \alpha$  est autoadjoint positif. **1 point**

*Question (2.b)* Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres strictement positives de  $\beta$  (comptées avec multiplicité). On pose :

$$\det'(\alpha) = \sqrt{\prod_{i=1}^r \lambda_i}.$$

Montrer que si  $\alpha$  est autoadjoint alors  $\det'(\alpha)$  est égal à la valeur absolue du déterminant de l'isomorphisme  $\ker(\alpha)^\perp \rightarrow \ker(\alpha)^\perp$  défini en (1). **1 point**

*Question (3)* Soient  $\pi, \pi'$  des projecteurs orthogonaux. Calculer  $\det'(2\pi)$  en fonction du rang de  $\pi$  et donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\det'(2\pi \circ \pi') = \det'(2\pi) \cdot \det'(\pi')$ . **1 point**