

## CONTRÔLE CONTINU 1, ALGÈBRE IV

MARDI 14 MARS 2016

SUJET A

**Problème 1 (8 points)**

Pour  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  on pose :

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

*Question (1)* Donner la matrice de la forme polaire de  $q$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

*Question (2)* Donner la signature de  $q$ .

**Problème 2 (8 points)**

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $q$  la forme quadratique dont la forme polaire a pour matrice  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

*Question (1)* Calculer  $q(x_1, x_2)$ .

*Question (2)* Donner une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$  pour  $q$ .

*Question (3)* Donner une matrice  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que  ${}^tPMP = I_2$ .

**Problème 3 (4 points)**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $q$  une forme quadratique sur  $E$ ,  $v \in E$ ,  $v \neq 0$  et  $F$  l'orthogonal de  $v$  pour  $q$ . Donner, en la justifiant par une démonstration, une condition nécessaire et suffisante sur  $v$  pour que  $E = \mathbb{R} \cdot v + F$ . **Pour cette question la qualité de la rédaction sera fortement prise en compte.**

## CONTRÔLE CONTINU 1, ALGÈBRE IV

MARDI 14 MARS 2016

SUJET B

**Problème 1 (8 points)**

Pour  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  on pose :

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

*Question (1)* Donner la matrice de la forme polaire de  $q$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

*Question (2)* Donner la signature de  $q$ .

**Problème 2 (8 points)**

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et  $q$  la forme quadratique dont la forme polaire a pour matrice  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

*Question (1)* Calculer  $q(x_1, x_2)$ .

*Question (2)* Donner une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$  pour  $q$ .

*Question (3)* Donner une matrice  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que  ${}^tPMP = I_2$ .

**Problème 3 (4 points)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $b$  une forme bilinéaire sur  $E$ . Montrer que si  $F$  est un supplémentaire de  $\ker(b)$  dans  $E$  alors  $b|_{F \times F}$  est non-dégénérée. **Pour cette question la qualité de la rédaction sera fortement prise en compte.**

## CONTRÔLE CONTINU 1, ALGÈBRE IV

MARDI 14 MARS 2016

## SUJET C

**Problème 1 (8 points)**

Pour  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  on pose :

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

*Question (1)* Donner la matrice de la forme polaire de  $q$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

*Question (2)* Donner la signature de  $q$ .

**Problème 2 (8 points)**

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $q$  la forme quadratique dont la forme polaire a pour matrice  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

*Question (1)* Calculer  $q(x_1, x_2)$ .

*Question (2)* Donner une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$  pour  $q$ .

*Question (3)* Donner une matrice  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que  ${}^tPMP = I_2$ .

**Problème 3 (4 points)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4 et  $q$  une forme quadratique de signature  $(2, 2)$  sur  $E$ . Soit  $v \in E$  tel que  $q(v) < 0$  et  $F$  l'orthogonal de  $v$  pour  $q$ . Montrer que  $q|_F$  est de signature  $(2, 1)$ . **Pour cette question la qualité de la rédaction sera fortement prise en compte.**