

EXAMEN DE SECONDE SESSION, ALGÈBRE 4
JEUDI 29 JUIN 2017

Problème 1 (4 points)

Donner la signature et une base orthogonale de la forme quadratique q définie par :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Problème 2 (8 points)

On note $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique B est orthonormée. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et ϕ l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est A .

Question (1) Justifier qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale.

Question (2) Donner une base de $\ker(\phi - \text{Id})$.

Question (3) Soit V l'orthogonal dans E de $\ker(\phi - \text{Id})$. Donner une base orthonormée de V .

Question (4.a) On suppose que $W \subset E$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et que (e_1, e_2) en est une base orthonormée. Montrer que le projeté orthogonal de $v \in E$ sur W est donné par :

$$\langle e_1, v \rangle e_1 + \langle e_2, v \rangle e_2.$$

Question (4.b) Soit π la projection orthogonale de E sur V . Donner la matrice de π dans la base B .

Question (5.a) Soit $\psi = \pi \circ \phi \circ \pi$. Montrer que ψ est autoadjoint.

Question (5.b) Montrer que $\psi(v) = 0$ si $v \in \ker(\phi - \text{Id})$ et $\psi(v) = \phi(v)$ si $v \in V$.

Question (5.c) Calculer le spectre de ψ , et en déduire celui de ϕ .

Problème 3 (4 points)

Soit E le sous-espace des fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ engendré par les fonctions 1 (fonction constante égale à 1), sin et cos. Pour $f, g \in E$ on pose :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Question (1.a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et donner sa matrice dans la base $B_0 = (1, \sin, \cos)$.

Question (1.b) Dédurre de la question précédente que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E et donner une base orthonormée B de E .

Question (2) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit une application linéaire $\rho_\alpha : E \rightarrow E$ par :

$$\rho_\alpha(f)(t) = f(t - \alpha).$$

Montrer que ρ_α est une isométrie de E et donner sa matrice dans la base B' (on pourra utiliser les formules d'addition pour sin et cos).

Question (3) Soit $E_{\mathbb{C}}$ le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par 1, sin, cos. Donner les valeurs et vecteurs propres de ρ_α dans $E_{\mathbb{C}}$.

Problème 4 (4 points)

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Question (1) Soit $\phi : E \rightarrow E$ un endomorphisme autoadjoint. Soit V l'orthogonal dans E de $\ker(\phi)$. Montrer que $\phi(V) \subset V$, puis que $\phi' := \phi|_V$ est un isomorphisme $V \rightarrow V$.

Question (2.a) Soit α un endomorphisme quelconque de E . Montrer que $\beta = \alpha^* \circ \alpha$ est autoadjoint positif.

Question (2.b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres strictement positives de β (comptées avec multiplicité). On pose :

$$\det'(\alpha) = \left(\prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{1/2}.$$

Montrer que si α est autoadjoint alors $\det'(\alpha)$ est égal à la valeur absolue du déterminant de l'isomorphisme $\ker(\alpha)^\perp \rightarrow \ker(\alpha)^\perp$ défini en (1).

Question (3) Soient π, π' des projecteurs orthogonaux. Calculer $\det'(2\pi)$ en fonction du rang de π et donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\det'(2\pi \circ \pi') = \det'(2\pi) \cdot \det'(\pi')$.