

Feuille d'exercices n° 1 :

Formes bilinéaires

1. FORMES LINÉAIRES

Exercice 1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note $e^i : E \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par $e^i(v) = x_i$ si $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ (la i -ème coordonnée de v dans B).

(1.a) Donner une formule pour e^1, e^2 dans les cas suivants :

- $E = \mathbb{R}^n$ et B est la base canonique ;
- $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (2, 1)$ et $e_2 = (1, 1)$;
- $E = \mathbb{R}^3$ et la matrice des coordonnées de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1.b) En général, montrer que e^i est une application linéaire.

(1.c) Montrer que (e^1, \dots, e^n) est une base de l'espace dual E^* (*base duale* de B).

Exercice 2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $\dim(E) = n$.

(2.a) Montrer que $F \subset E$ est un sous-espace de dimension $n - 1$ si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle ℓ sur E telle que $F = \ker(\ell)$.

(2.b) Soit (ℓ_1, \dots, ℓ_k) une famille libre dans E^* . Montrer que l'application linéaire $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ définie par $\phi(v) = (\ell_1(v), \dots, \ell_k(v))$ est surjective (*on pourra montrer que le fait que son image soit contenue dans un sous-espace vectoriel strict contredit la liberté de ℓ_1, \dots, ℓ_k*).

(2.c) Soit F le sous-ensemble défini par :

$$F = \{v \in E : \forall i = 1, \dots, k : \ell_i(v) = 0\} = \bigcap_{i=1}^k \ker(\ell_i).$$

Déduire de la question précédente que F est un sous-espace vectoriel et que $\dim(F) = n - k$. Donner une interprétation géométrique de ce fait pour $n = 2, k = 2$ et $n = 3, k = 2, 3$.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$ un entier ; on note $E = M_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n sur \mathbb{K} .

(3.a) Pour $A = (a_{ij}) \in E$ on définit la *trace* de A par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Vérifier que tr définit une forme linéaire sur E .

(3.b) On note $e_{kl} \in E$ la matrice dont le coefficient à la ligne k et colonne l est 1, et tous les autres 0. Montrer que $B = (e_{11}, \dots, e_{1n}, e_{21}, \dots, e_{nn})$ est une base de E .

(3.c) Calculer $\text{tr}(e_{kl}A)$ et $\text{tr}(Ae_{kl})$ pour $A = (a_{ij}) \in E$ et $k, l = 1, \dots, n$. En déduire que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour toutes $A, B \in E$.

(3.d) Montrer que les applications $A \mapsto \text{tr}(e_{kl}A)$ pour $k, l = 1, \dots, n$ forment une base de l'espace dual E^* .

* (3.e) Montrer que toute forme linéaire $\ell \in E^*$ telle que $\forall A, B \in E : \ell(AB) = \ell(BA)$ est un multiple de tr .

2. CALCUL EN COORDONNÉES AVEC LES FORMES BILINÉAIRES

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et b la forme bilinéaire définie par :

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_1 + 6x_3y_2 - 9x_3y_3.$$

(4.a) Donner la matrice de b dans la base canonique.

(4.b) Calculer le noyau de b .

(4.c) Soient :

$$f_1 = (2, 0, 1), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (1, 1, -1).$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et donner la matrice de b dans cette base.

Exercice 5

Soit $d \geq 0$ un entier. On note $E_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}_d[T]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d sur \mathbb{C} .

(5.a) Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} l'application :

$$b : (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

définit une forme bilinéaire sur $E_{\mathbb{K}}$. Donner sa matrice dans la base (e_0, \dots, e_d) .

(5.b) Soit $f \in E_{\mathbb{C}}$. Montrer que l'application $\ell_f : E_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\ell_f(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \overline{f(e^{it})} dt$$

est une forme linéaire sur $E_{\mathbb{C}}$.

(5.c) Si $0 \leq k \leq d$ est un entier on pose $e_k = T^k \in E_{\mathbb{C}}$; on notera aussi $\ell_k = \ell_{e_k}$. Calculer $\ell_k(e_l)$ pour $0 \leq k, l \leq d$ et en déduire que ℓ_0, \dots, ℓ_d est une base de $E_{\mathbb{C}}^*$.

(5.d) Soit $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_d[T]$ et $g \in E_{\mathbb{R}}$. Montrer que l'application $f \mapsto \ell_f(g)$ est une forme \mathbb{R} -linéaire sur $E_{\mathbb{R}}$, en déduire que $b(f, g) = \ell_f(g)$ définit une forme bilinéaire sur $E_{\mathbb{R}}$ et donner sa matrice dans la base (e_0, \dots, e_d) .

Exercice 6

On reprend les notations de l'exercice 1.4

(6.a) Montrer que $A, B \mapsto \text{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire non-dégénérée et symétrique sur E .

(6.b) Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Calculer la dimension du noyau de la forme bilinéaire $\ell_M : (A, B) \mapsto \text{tr}(AMB)$ en fonction du rang de M .

(6.c) Donner la matrice de ℓ_M dans la base (e_{ij}) pour $n = 2$ et

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. GÉNÉRALITÉS SUR LES FORMES BILINÉAIRES**Exercice 7**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et \mathcal{B} l'espace des formes bilinéaires sur E . On note (e^1, \dots, e^n) la base duale de B (cf. l'exercice 1.1).

(7.a) On définit une application :

$$\beta : E^* \times E^* \rightarrow \mathcal{B}, \quad (\ell, m) \mapsto \ell \cdot m$$

où $(\ell \cdot m)(u, v) = \ell(u)m(v)$. Montrer que β n'est pas linéaire et pas injective.

(7.b) Si $\ell = a_1 e^1 + \dots + a_n e^n$ et $m = b_1 e^1 + \dots + b_n e^n$ donner la matrice de $\beta(\ell, m)$ dans la base B et calculer son rang.

(7.c) Montrer que toute forme bilinéaire dont la matrice dans B est de rang 1 est l'image par β d'une paire de vecteurs. En déduire, avec la question précédente, l'image de β , et montrer que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathcal{B} .

(7.d) Montrer que $(\beta(e_i, e_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ est une base de \mathcal{B} .

Exercice 8

(8.a) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et b une forme bilinéaire sur E . On pose :

$$b_1(u, v) = \frac{1}{2} (b(u, v) + b(v, u)), \quad b_2(u, v) = \frac{1}{2} (b(u, v) - b(v, u)).$$

Montrer que b_1, b_2 sont des formes bilinéaires respectivement symétrique et antisymétrique et que $b = b_1 + b_2$.

(8.b) Montrer que l'ensemble \mathcal{S} des formes linéaires symétriques, et celui \mathcal{A} des formes antisymétriques, sont des sous-espaces vectoriels de \mathcal{B} , et que $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \{0\}$. Avec la question précédente, en déduire que $\mathcal{B} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

(8.c) Refaire les questions précédentes en termes de matrices, et montrer additionnellement que $\dim(\mathcal{A}) = n(n-1)/2$ et $\dim(\mathcal{S}) = n(n+1)/2$.

Exercice 9

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et b une forme bilinéaire *antisymétrique, non dégénérée* sur E .

(9.a) On suppose que $\dim(E) = 2$, et soit B une base de E . Calculer $\text{Mat}_B(b)$ et en déduire qu'il existe une base B' telle que

$$\text{Mat}_{B'}(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que se passe-t'il si $\dim(E) = 1$?

(9.b) On suppose maintenant que $\dim(E) = 2n$ avec $n \geq 2$. Soit $e_n \in E$ non nul, montrer qu'il existe $e_{n+1} \in E$ tel que $b(e_n, e_{n+1}) = -1$. Soit $F = \mathbb{K}e_n + \mathbb{K}e_{n+1}$. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$.

(9.c) Dédurre de la question précédente qu'il existe une base $B = (e_1, \dots, e_{2n})$ de E dans laquelle on a :

$$\text{Mat}_B(b) = \begin{pmatrix} 0 & -J_n \\ J_n & 0 \end{pmatrix} \text{ où } J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(9.d) En utilisant un argument similaire, montrer que si $\dim(E)$ est impaire il n'existe pas de forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur E .

4. DUALITÉ

Exercice 10

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. le but de cet exercice est de montrer que si b est une forme bilinéaire sur E telle que

$$(4.1) \quad b(u, v) = 0 \Leftrightarrow b(v, u) = 0$$

alors b est symétrique ou antisymétrique.

(10.a) Donner un exemple de forme ne satisfaisant pas (4.1).

(10.b) Soient ℓ et m deux formes linéaires sur E telles que $\ker(\ell) = \ker(m)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ tel que $\ell = \lambda m$.

(10.c) Montrer que si ϕ est une application linéaire $E \rightarrow E$ telle que $\forall v \in E \exists \mu \in \mathbb{K} : \phi(v) = \mu v$ alors $\phi = \lambda \text{Id}$ pour un $\lambda \in \mathbb{K}$.

(10.d) On définit deux applications linéaires :

$$\Phi_1(v) = b(v, \cdot) \text{ et } \Phi_2(v) = b(\cdot, v).$$

Montrer qu'elles sont inversibles, puis déduire des deux questions précédentes et de (4.1) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ tel que $\forall v \in E : \Phi_2^{-1}(\Phi_1(v)) = \lambda v$.

(10.e) Montrer que $\lambda^2 = 1$ et conclure.

5. ORTHOGONALITÉ

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et soit b la forme bilinéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -12 & -6 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \\ -12 & 4 & 19 & 9 \\ -6 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

(11.a) Montrer que b est non-dégénérée.

(11.b) Donner des équations, puis une base de l'orthogonal pour b du sous-espace $\mathbb{R}^2 \times \{(0, 0)\} \subset E$.

(11.c) Même question pour $F = \{(0)\} \times \mathbb{R}^2 \times \{(0)\}$. Donner en plus la dimension de $F \cap F^\perp$ et en déduire que F contient des vecteurs isotropes non nuls.