

Feuille d'exercices n° 5 :

Isométries des espaces euclidiens et hermitiens

Exercice 1

(1.a) Soit E un espace euclidien de dimension 2, B une base orthonormée de E et ρ l'application linéaire $E \rightarrow E$ dont la matrice dans B est

$$\text{Mat}_B(\rho) = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que ρ est une isométrie de E et qu'elle n'a pas de vecteur fixe dans E . Donner $\theta \in [0, \pi]$ tel que les valeurs propres de ϕ dans $E_{\mathbb{C}}$ soient $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$.

(1.b) Soit σ l'application linéaire $E \rightarrow E$ dont la matrice dans B est :

$$\text{Mat}_B(\sigma) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que σ est une isométrie de E calculer les valeurs et espaces propres pour σ .

(1.c) Même question pour

$$\text{Mat}_B(\sigma) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

(2.a) Soit E un espace euclidien de dimension 2, B une base orthonormée de E . Soient σ_1, σ_2 les applications linéaires données par leurs matrices dans B :

$$\text{Mat}_B(\sigma_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_B(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner les vecteurs propres de σ_1 . Que peut-on dire de $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$?

(2.b) Donner une isométrie τ de E telle que $\tau^2 = \rho$. Est-ce que τ est uniquement déterminée ? Montrer que $\rho\sigma_2 = \tau\sigma_2\tau^{-1}$ et retrouver ainsi les vecteurs propres de σ_1 .

Exercice 3

Soit $E_{\mathbb{R}}$ un espace vectoriel euclidien et $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié hermitien et soit B une base orthonormée de $E_{\mathbb{R}}$. Soit ρ l'application linéaire $E_{\mathbb{R}} \rightarrow E_{\mathbb{R}}$ dont la matrice dans B est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $\rho_{\mathbb{C}}$ son extension \mathbb{C} -linéaire à $E_{\mathbb{C}}$. Donner une base orthonormale de $E_{\mathbb{C}}$ diagonalisant $\rho_{\mathbb{C}}$.

Exercice 4

(4.a) Soit E un espace euclidien de dimension 2, B une base orthonormée de E et ρ l'application

linéaire $E \rightarrow E$ dont la matrice dans B est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner la forme réduite de ρ .

(4.b) Même question pour les applications dont les matrices dans B sont :

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 5

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E . Pour $\theta \in]0, \pi[$ on note B_θ la base

$$(\cos(\theta)e_1 - \sin(\theta)e_2, \sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2, e_3).$$

Vérifier que c'est aussi une base orthonormée directe de E . Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et soient ρ, ρ_θ les applications linéaires $E \rightarrow E$ déterminées par $\text{Mat}_B(\rho) = A$ et $\text{Mat}_{B_\theta}(\rho_\theta) = A$. Montrer que $\rho_\theta \circ \rho$ est une rotation et calculer son angle (au signe près) en fonction de θ .

Exercice 6

(6.a) Soit ρ l'application linéaire $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par :

$$\rho \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 8 & -6 & 5 \\ -6 & 11 & -2 & -8 \\ 8 & 2 & 11 & -6 \\ -5 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Montrer (ou admettre) que le polynôme caractéristique de ρ est égal à $(X^2 - 6X/5 + 1)(X^2 - 8X/5 + 1)$. En déduire que ρ n'a pas de vecteur propre dans E .

(6.b) Calculer des bases de $\ker(\rho^2 - 6/5\rho + \text{Id})$ et $\ker(\rho^2 - 8/5\rho + \text{Id})$ et en déduire une base orthonormée de E dans laquelle ρ a une forme réduite.

(6.c) Soit $\rho' : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par :

$$\rho' \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 & -3 \\ -3 & -4 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

On identifie $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ via $(x, y, x', y') \mapsto (x + iy, x' + iy')$. Montrer qu'alors ρ' est une application \mathbb{C} -linéaire et donner sa matrice dans la \mathbb{C} -base (e_1, e_3) .

(6.d) Montrer que ρ est une isométrie de \mathbb{C}^2 (muni de sa structure hermitienne canonique). La diagonaliser dans \mathbb{C}^2 et en déduire sa forme réduite dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 7

(7.a) Montrer que le groupe $\text{SO}(2)$ est abélien (c'est-à-dire que $\forall g, h \in \text{SO}(2) : gh = hg$). En déduire que $\Sigma : g \mapsto g^{-1}$ est un endomorphisme de $\text{SO}(2)$.

(7.b) Montrer que si $\sigma \in O(2) \setminus \text{SO}(2)$ alors

$$\forall g \in \text{SO}(2) : \sigma g \sigma^{-1} = \Sigma(g).$$

(7.c) Pour $v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$ on pose :

$$G_v = \{g \in \text{SO}(3) : g(v) = v\}.$$

Montrer que G_v est un sous-groupe de $\text{SO}(3)$.

(7.d) Montrer que pour $h \in \text{SO}(3)$ on a $hG_vh^{-1} = G_{hv}$. En déduire que pour $v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ les groupes G_v, G_w sont isomorphes.

(7.e) Soit $v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$ et u, w tels que (v, u, w) soit une base orthonormée de \mathbb{R}^3 et $\det(u, v, w) = 1$. Montrer que

$$\phi_v(g) = \text{Mat}_{(u,w)}(g|_P)$$

définit un morphisme de groupes $\Phi_v : G_v \rightarrow \text{SO}(2)$ qui ne dépend pas de u, w . Vérifier que c'est un isomorphisme.

(7.f) Montrer que $\Phi_{-v} \circ \Phi_v^{-1} = \Sigma$.