

## Feuille d'exercices n° 4 :

### Espaces hermitiens

#### Exercice 1

Montrer que les formes hermitiennes dont les matrices dans la base canonique de  $\mathbb{C}^d$  sont :

$$d = 2, \begin{pmatrix} 3 & -2i+1 \\ 2i+1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } d = 3, \begin{pmatrix} 2 & -i+1 & i \\ i+1 & 3 & i-1 \\ -i & -i-1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont définies positives. Donner pour chacune une base orthonormée de  $\mathbb{C}^d$ .

#### Exercice 2

Donner une base orthonormée de  $F^\perp$  dans les cas suivants.

(1)  $E = \mathbb{C}^3$ ,  $h(z, w) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3$ ,  $v = (1, 1, 1)$

(2)  $E = \mathbb{C}^2$ ,  $h(z, w) = z_1\bar{w}_1 - iz_1\bar{w}_2 + iz_2\bar{w}_2 + 2z_2\bar{w}_2$ ,  $v = (1, 0)$ .

(3)  $E = \mathbb{C}^3$ ,

$$h(z, w) = z_1\bar{w}_1 + 5z_2\bar{w}_2 + 2iz_2\bar{w}_3 - 2iz_3\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3,$$

$$v = (1, 0, 0) \text{ et } v = (0, 1, 0).$$

#### Exercice 3

Soient  $A, B$  des matrices hermitiennes. Montrer que  $\text{tr}(AB) \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $AB$  est aussi hermitienne si et seulement si  $AB = BA$ .

#### Exercice 4

Donner une démonstration directe du théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints d'un espace hermitien de dimension 2 en calculant les projecteurs sur les espaces propres.

#### Exercice 5

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -i & -2i \\ i & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit  $\phi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^3$  dont  $M$  est la matrice dans la base canonique. On munit  $\mathbb{C}^3$  de sa structure canonique d'espace hermitien.

(5.a) Donner une base de  $\ker(\phi)$  et une base orthonormée de  $\ker(\phi)^\perp$ .

(5.b) Donner une base orthogonale de  $E$  diagonalisant  $\phi$  (on pourra utiliser l'exercice 4).

## EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

**Exercice 6**

(6.a) Soit  $\phi$  un endomorphisme d'un espace hermitien  $E, \langle, \rangle$ . On suppose que :

$$(*) \quad \forall u, v \in E : \langle \phi(u), v \rangle = -\overline{\langle u, \phi(v) \rangle}.$$

Montrer que si  $F \subset E$  est un sous-espace vectoriel tel que  $\phi(F) \subset F$  alors on a aussi  $\phi(F^\perp) \subset F^\perp$ .

(6.b) On suppose que :

$$\forall v \in E : \langle \phi(v), v \rangle = 0.$$

Montrer que  $\phi$  vérifie (\*). Montrer aussi que 0 est la seule valeur propre de  $\phi$ ; en déduire avec la question précédente que  $\phi = 0$ .

(6.c) On suppose maintenant que  $\langle \phi(v), v \rangle \in \mathbb{R}$  pour tout  $v \in E$ . On suppose que  $\phi(F) \subset F$ . En développant  $\langle \phi(u + iv), u + iv \rangle$  pour  $u \in F, v \in F^\perp$  montrer que  $\phi(F^\perp) \subset F^\perp$ . En déduire que  $\phi$  est autoadjoint.

**Exercice 7**

(7.a) Soit  $(E, h)$  un espace hermitien. On considère  $E$  comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ; montrer que la forme  $\mathbb{R}$ -bilinéaire  $b$  définie sur  $E$  par :

$$b(u, v) = \operatorname{Im}(h(u, v))$$

est antisymétrique et non-dégénérée.

(7.b) Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée (pour  $h$ ) de  $E$  sur  $\mathbb{C}$ . Donner la matrice de  $b$  dans la base  $(e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n)$  de  $E$  sur  $\mathbb{R}$ .