

CONTRÔLE CONTINU 1, ALGÈBRE IV
SESSION SPÉCIALE

Problème 1 (8 points)

Pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on pose :

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Question (1) Donner la matrice de la forme polaire de q dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Question (2) Donner la signature de q .

Problème 2 (8 points)

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

et q la forme quadratique dont la forme polaire a pour matrice M dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Question (1) Calculer $q(x_1, x_2)$.

Question (2) Donner une base orthonormée de \mathbb{R}^2 pour q .

Question (3) Donner une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP = I_2$.

Problème 3 (4 points)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et q une forme quadratique sur E , de signature $(1, 1)$. Soit v un vecteur isotrope non-nul pour q , montrer qu'il existe un vecteur $u \in E$ isotrope pour q tel que u et v ne soient pas colinéaires.