

CORRIGÉ CC2 SUJET A

Problème 1

Soit ϕ l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question (1) Justifier qu'il existe une base orthonormée B de \mathbb{R}^3 telle que $\text{Mat}_B(\phi)$ est diagonale.

Réponse La matrice de ϕ dans la base canonique est symétrique, donc (puisque cette dernière est orthonormée) ϕ est autoadjointe. Par le théorème spectral elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

Question (2) Donner une base de $\ker(\phi)$.

Réponse Le noyau $\ker(\phi)$ est de dimension 1 et engendré par $v = (1, 1, 1)$.

Question (3) Donner une base orthonormée C de l'orthogonal P de $\ker(\phi)$.

Réponse On a $u \in \ker(\phi^\perp)$ si et seulement si $\langle u, v \rangle = 0$, et si $u = (x, y, z)$ ceci revient à $x + y + z = 0$. L'orthogonal de $\ker(\phi)$ est donc le plan d'équation $x + y + z = 0$. Une base de ce dernier est par exemple (f_1, f_2) où

$$f_1 = (1, -1, 0), f_2 = (0, -1, 1).$$

En appliquant le procédé de Gram-Schmidt on obtient la base orthogonale $(f_1, f_2 - (\langle f_1, f_2 \rangle / \|f_1\|^2) f_1)$, c'est-à-dire

$$(1, -1, 0), \frac{1}{2}(-1, -1, 2)$$

et en normalisant on obtient finalement $C = (e_1, e_2)$ avec

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0), e_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(-1, -1, 2).$$

Question (4) Donner la matrice de $\phi|_P$ dans C .

Réponse On a

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(2, -3, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{5}{2}(1, -1, 0) + \frac{1}{2}(-1, -1, 2) \right) \\ &= \frac{5}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi(e_2) &= \frac{\sqrt{6}}{6}(0, -3, 3) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\frac{3}{2}(1, -1, 0) + \frac{3}{2}(-1, -1, -2) \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_2 \end{aligned}$$

donc on a

$$\text{Mat}_C(\phi|_P) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme (e_1, e_2) est une base orthonormée de P on peut aussi calculer les coefficients en utilisant la formule $\langle \phi(e_i), e_j \rangle$ pour le coefficient (i, j) .

Remarque : on vérifie que le polynôme caractéristique de ϕ est $-X(X^2 - 4X + 3)$ et que celui de $\phi|_P$ est $X^2 - 4X + 3$.

Problème 2

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

et q la forme quadratique hermitienne dont la forme polaire a pour matrice M dans la base canonique de \mathbb{C}^2 . Montrer que q est définie positive.

Réponse Si $u = (z_1, z_2)$ on applique l'algorithme de Gauss :

$$\begin{aligned} h(u) &= |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{iz_2}) + 2|z_2|^2 \\ &= |z_1 + iz_2|^2 + |z_2|^2 \end{aligned}$$

et on voit donc que h est définie positive.

Problème 3

Dans \mathbb{R}^2 muni de son produit scalaire canonique on considère

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Donner l'expression en coordonnées des isométries suivantes de \mathbb{R}^2 :

1. ρ telle que $\rho(e_1) = v$ et $\det(\rho) = 1$;
2. σ telle que $\sigma(e_1) = v$ et $\det(\sigma) = -1$.

Réponse Soit $e_2 = (0, 1)$ et $B = (e_1, e_2)$ qui est une base orthonormée. Dans les deux cas $\rho(e_2)$ est un vecteur orthogonal à $\rho(e_1)$ et de norme 1 et on a donc

$$\phi(e_2) = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

pour $\phi = \rho$ ou $\phi = \sigma$. En calculant le déterminant on obtient :

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 1, \quad \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = -1$$

et donc le signe est $-$ pour $\phi = \rho$ et $+$ pour $\phi = \sigma$. On a donc :

$$\rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}x - y \\ x - \sqrt{3}y \end{pmatrix}$$

et

$$\sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}x + y \\ x + \sqrt{3}y \end{pmatrix}.$$