

EXAMEN, ALGÈBRE IV

VENDREDI 12 MAI 2017

Problème 1 (8 points)

Dans tout le problème on notera :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

et ϕ l'application linéaire $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A .

Question (1.a) Justifier que A est diagonalisable en base orthonormée sur \mathbb{R} .

Question (1.b) Calculer le polynôme caractéristique de A .

Question (2) Donner des bases pour les sous-espaces $\ker(\phi)$ et $\ker(\phi - 2\text{Id})$ de \mathbb{R}^4 .

Question (3.a) Soit $V = \ker(\phi) + \ker(\phi - 2\text{Id})$. Donner une base orthonormée du sous-espace $W = V^\perp$.

Question (3.b) Justifier que $\phi(W) \subset W$ et donner la matrice de $\phi|_W$ dans la base de W obtenue précédemment.

Question (4) Donner le spectre de ϕ et une base orthonormée de \mathbb{R}^4 constituée de vecteurs propres pour ϕ .

Question (5) Montrer que la fonction q sur \mathbb{R}^4 définie par $q(v) = \langle \phi(v), v \rangle$ est une forme quadratique. Quelle est sa signature ?

Problème 2 (6 points)

Question (1) Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur \mathbb{R}^3 définie par :

$$\langle u, v \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

si $u = (x_1, x_2, x_3)$ et $v = (y_1, y_2, y_3)$. Montrer que la forme quadratique associée est définie positive. Donner une base orthonormée de \mathbb{R}^3 pour cette forme.

Question (2) Soit ω l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Question (2.a) Donner la matrice de ω dans une base de \mathbb{R}^3 orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Question (2.b) Montrer que ω est une isométrie de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Question (2.c) Calculer $\ker(\omega - \text{Id})$ et donner la forme réduite de ω .

Question (3) Donner une base de \mathbb{C}^3 diagonalisant ω .

Problème 3 (6 points)

Question (1) Soit E un espace euclidien de dimension 2 et B une base orthonormée. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que si $u, v \in E$ alors

$$\det_B(u, v) \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Question (2) On suppose maintenant que E est euclidien de dimension $n \geq 2$ et que B en est une base orthonormée.

Question (2.a) Vérifier que si v_1, \dots, v_n est une base de E et pour $i = 2, \dots, n$ on se donne $w_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$ alors

$$\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det_B(v_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n).$$

Question (2.b) Justifier que si (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormée de E alors

$$|\det_B(u_1, \dots, u_n)| = 1.$$

Question (3.a) Soient $v \in E$ et $V \subset E$ un sous-espace vectoriel. Soit w le projeté orthogonal de v sur V . Montrer que $\|w\| \leq \|v\|$.

Question (3.b) En utilisant le procédé de Gram–Schmidt et les questions précédentes montrer que pour tous $v_1, \dots, v_n \in E$ on a :

$$|\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdots \|v_n\|.$$

Question (3.c) Que peut-on dire sur le cas d'égalité dans l'inégalité ci-dessus ?