

CONTRÔLE CONTINU 1, ALGÈBRE IV

MARDI 14 MARS 2016

SUJET A

Problème 1 (8 points)

Pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on pose :

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Question (1) Donner la matrice de la forme polaire de q dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Question (2) Donner la signature de q .

Problème 2 (8 points)

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et q la forme quadratique dont la forme polaire a pour matrice M dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Question (1) Calculer $q(x_1, x_2)$.

Question (2) Donner une base orthonormée de \mathbb{R}^2 pour q .

Question (3) Donner une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP = I_2$.

Problème 3 (4 points)

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel, q une forme quadratique sur E , $v \in E$, $v \neq 0$ et F l'orthogonal de v pour q . Donner, en la justifiant par une démonstration, une condition nécessaire et suffisante sur v pour que $E = \mathbb{R} \cdot v + F$. **Pour cette question la qualité de la rédaction sera fortement prise en compte.**