

CONTRÔLE CONTINU 2, ALGÈBRE IV

MARDI 25 AVRIL 2017

SUJET A

Problème 1 (12 points)

Soit ϕ l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question (1) Justifier qu'il existe une base orthonormée B de \mathbb{R}^3 telle que $\text{Mat}_B(\phi)$ est diagonale.

Question (2) Donner une base de $\ker(\phi)$.

Question (3) Donner une base orthonormée C de l'orthogonal P de $\ker(\phi)$.

Question (4) Donner la matrice de $\phi|_P$ dans C .

Problème 2 (4 points)

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

et q la forme quadratique hermitienne dont la forme polaire a pour matrice M dans la base canonique de \mathbb{C}^2 . Montrer que q est définie positive.

Problème 3 (4 points)

Dans \mathbb{R}^2 muni de son produit scalaire canonique on considère

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Donner l'expression en coordonnées des isométries suivantes de \mathbb{R}^2 :

1. ρ telle que $\rho(e_1) = v$ et $\det(\rho) = 1$;
2. σ telle que $\sigma(e_1) = v$ et $\det(\sigma) = -1$.

CONTRÔLE CONTINU 2, ALGÈBRE IV

MARDI 25 AVRIL 2017

SUJET B

Problème 1 (12 points)

Soit ϕ l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Question (1) Justifier qu'il existe une base orthonormée B de \mathbb{R}^3 telle que $\text{Mat}_B(\phi)$ est diagonale.

Question (2) Donner une base de $\ker(\phi)$.

Question (3) Donner une base orthonormée C de l'orthogonal P de $\ker(\phi)$.

Question (4) Donner la matrice de $\phi|_P$ dans C .

Problème 2 (4 points)

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

et q la forme quadratique hermitienne dont la forme polaire a pour matrice M dans la base canonique de \mathbb{C}^2 . Montrer que q est définie positive.

Problème 3 (4 points)

Dans \mathbb{R}^2 muni de son produit scalaire canonique on considère

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Donner l'expression en coordonnées des isométries suivantes de \mathbb{R}^2 :

1. ρ telle que $\rho(e_1) = v$ et $\det(\rho) = 1$;
2. σ telle que $\sigma(e_1) = v$ et $\det(\sigma) = -1$.

CONTRÔLE CONTINU 2, ALGÈBRE IV

MARDI 25 AVRIL 2017

SUJET C

Problème 1 (12 points)

Soit ϕ l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question (1) Justifier qu'il existe une base orthonormée B de \mathbb{R}^3 telle que $\text{Mat}_B(\phi)$ est diagonale.

Question (2) Donner une base de $\ker(\phi)$.

Question (3) Donner une base orthonormée C de l'orthogonal P de $\ker(\phi)$.

Question (4) Donner la matrice de $\phi|_P$ dans C .

Problème 2 (4 points)

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$$

et q la forme quadratique hermitienne dont la forme polaire a pour matrice M dans la base canonique de \mathbb{C}^2 . Montrer que q est définie positive.

Problème 3 (4 points)

Dans \mathbb{R}^2 muni de son produit scalaire canonique on considère

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donner l'expression en coordonnées des isométries suivantes de \mathbb{R}^2 :

1. ρ telle que $\rho(e_1) = v$ et $\det(\rho) = 1$;
2. σ telle que $\sigma(e_1) = v$ et $\det(\sigma) = -1$.