

# Feuille d'exercices n° 2 :

## Formes quadratiques

### 1. RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES

#### Exercice 1

Pour chacune des formes quadratiques suivantes donner sa forme polaire, puis des coordonnées dans lesquelles la forme est diagonale et la base de  $E$  correspondante :

- (1)  $E = \mathbb{K}^2$ ,  $q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$  ;
- (2)  $E = \mathbb{K}^2$ ,  $q(x_1, x_2) = x_1x_2$  ;
- (3)  $E = \mathbb{K}^3$ ,  $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$  ;
- (4)  $E = \mathbb{K}_1[T]$ ,  $q(f, g) = \int_{-1}^1 tf(t)g(t)dt$ .

#### Exercice 2

Soit  $b$  la forme bilinéaire sur  $\mathbb{K}^4$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 & 0 & -6 \\ -6 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $b$  est symétrique et donner une base du noyau de  $b$ . Appliquer l'algorithme de Gauss à la forme quadratique définie par  $q(v) = b(v, v)$  et comparer les résultats.

#### Exercice 3

Soit  $E = M_2(\mathbb{R})$  et  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (3.a) Montrer que  $A \mapsto \det(A)$  est une forme quadratique sur  $E$ .
- (3.b) Soit  $A \in E$ . Montrer que  $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$  et en déduire une expression pour la forme polaire de  $\det$ .
- (3.c) Donner une équation puis une base de l'orthogonal  $F$  de  $\mathbb{K} \cdot I_2$  pour  $\det$  dans laquelle  $\det$  est diagonale.

#### Exercice 4

Donner la signature des formes quadratiques suivantes sur  $\mathbb{R}^d$  :

- (1)  $d = 2$ ,  $q = x_1x_2 + x_2^2$  ;
- (2)  $d = 3$ ,  $q = x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3$  ;

$$(3) \quad d = 3, q = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2;$$

$$(4) \quad d = 4, q = -3x_1^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 - x_3^2 + 4x_3x_4 - x_4^2.$$

Pour 3 donner aussi une base orthonormée.

## 2. GÉNÉRALITÉS SUR LES FORMES QUADRATIQUES

### Exercice 5

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

(5.a) On suppose que  $\dim(E) \geq 3$ . Soient  $\ell, m$  deux formes linéaires sur  $E$  et  $q(v) = \ell(v)m(v)$ . Montrer que la forme polaire de  $q$  est dégénérée.

(5.b) Que se passe-t-il si  $\dim(E) = 2$  ?

### Exercice 6

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$  et  $b$  sa forme polaire.

(6.a) Si  $\dim(E) = 2$  et  $q$  a un vecteur isotrope montrer qu'il existe une base  $B$  de  $E$  dans laquelle

$$\text{Mat}_B(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(6.b) Sous les mêmes hypothèses montrer que pour tout  $a \in \mathbb{K}$  il existe un  $v \in E$  tel que  $q(v) = a$ .

(6.c) On suppose maintenant que  $\dim(E) \geq 2$ . Montrer en utilisant la question précédente que si  $q$  a un vecteur isotrope (non-nul) alors il existe une base  $B$  de  $E$  composée de vecteurs isotropes pour  $q$ .

### Exercice 7

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie.

(7.a) Soit  $q$  une forme quadratique non-dégénérée sur  $E$ , de signature  $(p, q)$ . Soit  $F$  un sous-espace totalement isotrope maximal pour  $q$ . Montrer que  $\dim(F) = \min(p, q)$ .

(7.b) Dédire de la question précédente que si une forme quadratique sur  $E$  admet un sous-espace totalement isotrope de dimension  $> \dim(E)/2$  alors elle est dégénérée.

### Exercice 8

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n \geq 1$  et  $q$  une forme quadratique sur  $E$ .

(8.a) Soit  $K$  un sous-ensemble compact dans  $E$  contenant au moins un vecteur non-nul. Montrer que si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \exists v \in K : q(\lambda v) = 1$$

alors  $q$  admet des vecteurs isotropes non-nuls.

(8.b) En déduire que si  $q$  est de signature  $(n, 0)$  ou  $(0, n)$  alors le sous-ensemble  $\{v \in E : q(v) = 1\}$  est compact.

(8.c) Que peut-on dire dans les autres cas ?

**Exercice 9**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$  et  $H$  un sous-espace de dimension  $n - 1$ . Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$  de signature  $(p, q)$ . Quelles sont les possibilités pour la signature de la forme  $q|_H$  ?

**3. QUADRIQUES****Exercice 10**

Soit  $q$  une forme quadratique de signature  $(1, 1)$  sur  $\mathbb{R}^2$ . On note  $C = \{v \in \mathbb{R}^2 : q(v) = 0\}$ ,  $Q = \{v \in \mathbb{R}^2 : Q(v) = 1\}$  et  $\|(v_1, v_2)\|_\infty = \max(|v_1|, |v_2|)$ . Montrer que

$$\lim_{v \in Q, \|v\|_\infty \rightarrow +\infty} \left( \sup_{u \in C} \|v - u\|_\infty \right) = 0.$$

Dessiner  $C$  et  $Q$ .

**Exercice 11**

Soit  $q$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

(11.a) Vérifier que  $q$  est non-dégénérée et donner sa signature.

(11.b) Discuter de la connexité de la quadrique

$$Q_a = \{v \in \mathbb{R}^3 : q(v) = a\}$$

selon les valeurs de  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . Que se passe-t-il quand  $a = 0$  ?

(11.c) Soit  $C$  l'ensemble des vecteurs isotropes de  $q$ . Pour  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  on note

$$\|v\|_\infty = \max_{i=1,2,3} |v_i|.$$

Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  on a :

$$\lim_{\|v\|_\infty \rightarrow +\infty, v \in Q_a} \left( \sup_{u \in C} \|v - u\|_\infty \right) = 0$$

(on pourra utiliser l'exercice 3.10). Donner une interprétation géométrique de ce fait (on appelle  $C$  le *cône asymptotique* à  $Q_a$ ).

(11.d) Dessiner  $C, Q_1$  et  $Q_{-1}$ .

(11.e) Soient  $Q = Q_1$  et  $x \in Q$ . Montrer que<sup>1</sup> le plan tangent  $P = T_x Q$  à  $Q$  en  $x$  est donné par :

$$P = x + \{v \in \mathbb{R}^3 : b(x, v) = 0\}.$$

Montrer que  $Q \cap P$  est composé de deux droites dont on donnera des vecteurs directeurs. On les notera  $D_+(x) = \mathbb{R}v_+$  et  $D_-(x) = \mathbb{R}v_-$  où  $v_\pm$  pointent vers le haut et  $(x, v_+, v_-)$  est une base directe de  $\mathbb{R}^3$ .

(11.f) On note  $x_\theta = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ . Montrer que  $Q$  est l'union disjointe des droites  $D_+(x_\theta)$  (respectivement  $D_-(x_\theta)$ ) pour  $\theta \in [0, 2\pi[$  et en déduire une paramétrisation de  $Q$ .

---

1. Si la notion de plan tangent n'a pas été vue en calcul différentiel prendre ceci comme la définition.

**Exercice 12**

(12.a) Montrer que si  $q$  est une forme quadratique de signature  $(n, 1)$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  alors la quadrique  $Q = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : q(v) = 1\}$  est connexe.

(12.b) Donner la signature, puis dessiner les vecteurs isotropes de la forme quadratique dét restreinte à  $F$  (voir l'exercice 1.4 pour la notation). Dédire de la question précédente que l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  de déterminant 1 est connexe.

**Exercice 13**

(13.a) Soit  $q$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^3$  donnée par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3$$

Donner la signature et le noyau de  $q$ . Soit  $\ell(x_1, x_2, x_3) = x_2$ ; on pose  $Q = \{v \in \mathbb{R}^3 : q(v) = \ell(v)\}$ . Dessiner les projections des intersections  $Q \cap \ell^{-1}(\{a\})$  en fonction de  $a$ .

(13.b) Soit  $C$  le cône isotrope de  $q$ , montrer que

$$\lim_{\|v\|_\infty \rightarrow +\infty, v \in Q} \left( \sup_{u \in C} \frac{\|v - u\|_\infty}{\|v\|_\infty} \right) = 0.$$

(13.c) Dédire des questions précédentes l'allure de  $q$  (on appelle souvent une telle quadrique une "selle").

(13.d) Refaire les questions précédentes avec  $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ .

(13.e) Que se passe-t-il si  $\ell = x_1$ ? si  $q = x_1 x_2 + x_1 x_3$  et  $\ell = x_2 + x_3$ , ou  $\ell = x_1 + x_2 + x_3$ ?