

EXAMEN PARTIEL, GÉOMÉTRIE II

MERCREDI 15 MARS 2017

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Il est possible d'admettre le résultat d'une question s'il est nécessaire pour traiter les suivantes.

Problème 1 (4 points)

Question (1) Soient \mathcal{E}, \mathcal{F} deux espaces affines et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine. Soit ϕ la partie linéaire de f . On note $d = \dim(\mathcal{E})$ et $e = \dim(\ker(\phi))$. Donner les dimensions des sous-espaces affines suivants (on donnera une démonstration complète) :

1. $f^{-1}(\{y\})$ où $y \in f(\mathcal{E})$;
2. $f(\mathcal{E})$.

Question (2) Soit \mathcal{E} un espace affine et E son espace directeur. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \subset \mathcal{E}$ des sous-espaces affines de directions F, F' .

Question (2.a) Soient $x \in \mathcal{F}, x' \in \mathcal{F}'$. On suppose que $\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in F$ et $\overrightarrow{w} \in F'$. Montrer que le point $x + \overrightarrow{v}$ appartient à $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$.

Question (2.b) On suppose que $E = F \oplus F'$; montrer en utilisant la question précédente que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ et donner sa dimension.

Problème 2 (8 points)

Dans tout l'exercice \mathcal{E} est un espace affine et E son espace directeur.

Question (1.a) Montrer que pour une application linéaire $\pi : E \rightarrow E$ les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\pi \circ \pi = \pi$;
2. $E = \ker(\pi) \oplus \text{Im}(\pi)$ et $\pi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \text{Im}(\pi)$.

Question (1.b) Montrer que si π satisfait l'une des conditions ci-dessus alors $\text{Im}(\pi) = \ker(\pi - \text{Id}_E)$.

Question (2) Soit π satisfaisant à l'une des conditions de la question précédente et $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine dont π est la partie linéaire.

Question (2.a) Soit $x \in \mathcal{E}$; montrer que p a un point fixe dans \mathcal{E} si et seulement si $\overrightarrow{xp(x)} \in \ker(\pi)$.

Question (2.b) Montrer alors que l'ensemble des points fixes de p est égal à $p(\mathcal{E})$.

Question (3) Soit p comme à la question précédente; montrer que p a un point fixe dans \mathcal{E} si et seulement si $p \circ p = p$.

Question (4) On suppose que $\dim(\mathcal{E}) = 3$. Soit B une base de E . Soient :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

et π l'application linéaire dont la matrice dans B est P . On suppose que $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une application affine de partie linéaire π , telle que $\overrightarrow{xp(x)}$ ait pour coordonnées dans la base B le triplet $(1, -2, -2)$. Montrer que l'ensemble des points fixes de p est non vide et en donner un repère.

Problème 3 (8 points)

Dans tout l'exercice \mathcal{E} est un espace affine de dimension 2 et (x, y, z) est une base affine de \mathcal{E} . Les coordonnées barycentriques seront toujours prises dans cette base.

Question (1) Soient $y' \in (xz)$ et $z' \in (xy)$, $y', z' \neq x$. Montrer que les droites (yz) et $(y'z')$ sont parallèles si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées barycentriques respectives de y' et z' sont $(t, 0, 1-t)$ et $(t, 1-t, 0)$.

Question (2.a) Montrer que le système linéaire

$$\begin{cases} t & -s & & = 0 \\ t & & +u & = 1 \\ & -s & +u & = 0 \end{cases}$$

a une unique solution et la calculer.

Question (2.b) Dédurre des deux questions précédentes qu'il existe un unique triplet $(x', y', z') \in \mathcal{E}^3$ tel que :

1. $x' \in (yz)$, $y' \in (xz)$ et $z' \in (xy)$;
2. la droite (xy) (respectivement $(yz), (zx)$) est parallèle à $(x'y')$ (respectivement $(y'z'), (z'x')$).

Donner les coordonnées barycentriques de x', y', z' .

Question (3.a) Soit h une homothétie de centre x_0 et de rapport λ . Montrer que $h(x)$ est le barycentre $(1-\lambda)x_0 + \lambda x$.

Question (3.b) Soit h l'homothétie de centre $x_0 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z$ et rapport $-\frac{1}{2}$. Montrer que $h(x)$ (respectivement $h(y), h(z)$) est le milieu de $[yz]$ (respectivement $[zx], [xy]$).

Question (3.c) Donner une expression en coordonnées barycentriques pour h .