

EXAMEN FINAL, GÉOMÉTRIE II, MERCREDI 28 JUIN 2017

La qualité de la rédaction sera prise en compte. Il est possible d'admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes, et les questions étoilées sont hors barème.

Problème 1 (5 points)

On travaille dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien. Soient les points

$$x_i = ((-1)^{\lfloor i/2 \rfloor}, (-1)^{\lfloor (i+1)/2 \rfloor})$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$. Soient s_1, s_2 les symétries d'axes (x_2x_3) et (x_1x_4) respectivement, et s_3, s_4 celles d'axes (x_2x_4) et (x_1x_3) .

Question (1) Montrer que :

$$s_1(x, y) = (-2 - x, y), s_2(x, y) = (2 - x, y) \text{ et } s_3(x, y) = (y, x).$$

Question (2) Soient $t = s_2 \circ s_1$ et $s = s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

Question (2.a) Donner des expressions en coordonnées pour t et s .

Question (2.b) Montrer que s est une symétrie glissée dont on donnera le vecteur et l'axe.

Question (3) On oriente \mathcal{E} par la base canonique. Soit $r = s_4 \circ s$.

Question (3.a) Sans calcul, justifier que r est une rotation et donner son angle.

Question (3.b) Donner les coordonnées du centre de r .

Problème 2 (5 points)

Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit g_a l'application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de partie linéaire γ , telle que la matrice de γ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 soit

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $g_a(0, 0, 0) = (a, a + 1, a)$.

Question (1.a) Montrer que g_a est une isométrie de \mathcal{E} .

Question (1.b) Calculer $\ker(\gamma - \text{Id})$ et en déduire que g_a est directe.

Question (2) Pour quelles valeurs de a est-ce-que g_a est une rotation ?

Question (3) Donner le vecteur et l'axe de g_0 .

Problème 3 (4 points)

Dans tout l'exercice \mathcal{E} est un espace affine.

Question (1) Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Question (2.a) On suppose $\dim(\mathcal{E}) = 2$. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ linéairement indépendants, $x \in \mathcal{E}$ et $y = x + \vec{u}$, $z = x + \vec{v}$ et $t = y + \vec{v}$. Montrer que (xt) et (yz) s'intersectent en leur milieu.

Question (2.b) On suppose $\dim(\mathcal{E}) = 3$. Soient $\vec{v}_i \in E, i = 1, 2, 3$ linéairement indépendants, $x_0 \in \mathcal{E}$ et x_1, \dots, x_7 définis par :

$$x_i = x_0 + \vec{v}_i, \quad x_7 = x_0 + \sum_{i=1}^3 \vec{v}_i, \quad x_{7-i} = x_7 - \vec{v}_i.$$

Montrer que les droites $(x_i x_{7-i})$ sont concourantes en un point dont on donnera les coordonnées dans le repère $(x_0, (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3))$.

Problème 4 (6 points)

*Question (1) ** Vérifier que

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \left(X^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} X + 1 \right) \left(X^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} X - 1 \right)$$

et en déduire que $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$ et que $\cos(\pi/5) = (\sqrt{5} + 1)/4$

Soient \mathcal{E} un plan euclidien et x_1, \dots, x_5 les sommets d'un pentagone régulier \mathcal{C} de \mathcal{E} , de longueur d'arête 1 (ordonnées pour que x_i, x_{i+1} soient adjacents).

Question (2) Montrer que $\ell = d(x_1, x_3)$ est donné par $\ell = (\sqrt{5} + 1)/2$, en déduire qu'elle est une racine de $X^2 - X - 1$.

Question (3) Soit $x = \ell^{-1}x_3 + \ell^{-2}x_1$ (noter que $\ell^{-2} + \ell^{-1} = 1$).

Question (3.a) Calculer $d(x, x_1)$ et $d(x, x_3)$.

Question (3.b) Montrer que le triangle $\{x_4, x, x_3\}$ est similaire à $\{x_1, x_3, x_4\}$ et donner le rapport de similitude (*indication : considérer l'angle en x_3 et les deux côtés adjacents*). En déduire que que $d(x, x_4) = 1$.

Question (3.c) Montrer que $\{x, x_1, x_4\}$ et $\{x_2, x_3, x_1\}$ sont isométriques.

Question (4.a) Calculer en fonction de ℓ l'aire du triangle $\{x_1, x_3, x_4\}$.

Question (4.b) En déduire l'aire des triangles $\{x_4, x, x_3\}$ et $\{x, x_1, x_4\}$ puis celle de \mathcal{C} .

Question (5) Calculer la longueur d'arête d'un pentagone inscrit dans un cercle de rayon 1 et en déduire son aire.