

FEUILLE D'EXERCICES n° 2 :
BARYCENTRES ET CONVEXITÉ

1. BARYCENTRES

Exercice 1

On suppose que $\sum_i t_i = 0$. Décrire l'ensemble des points $x \in \mathcal{E}$ vérifiant

$$\sum_i t_i \overrightarrow{xx_i} = 0.$$

Exercice 2

(2.a) Soit \mathcal{E} un espace affine, soit $S \subset \mathcal{E}$. Montrer que S est un sous-espace affine si et seulement si, pour toute paire de points $x, y \in \mathcal{E}$, $x \neq y$, la droite (xy) est contenue dans S .

(2.b) Dédurre de la question précédente que S est un sous-espace affine si et seulement si elle contient tous les barycentres de ses points.

Exercice 3

Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension 3 et $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{E}$ une base affine de \mathcal{E} . Soient encore m_1, \dots, m_6 les milieux respectifs des segments $[x_1x_2]$, $[x_3x_4]$, $[x_1x_3]$, $[x_2x_4]$, $[x_1x_4]$ et $[x_2x_3]$.

Montrer que le « centre de gravité » $g = \frac{1}{4}x_1 + \dots + \frac{1}{4}x_4$ est égal à l'intersection des droites (m_1m_2) , (m_3m_4) et (m_5m_6) (en particulier ceci montre que ces droites sont concourantes).

2. COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

Exercice 4

(4.a) Soit \mathcal{P} un plan affine, \mathcal{B} une base affine de \mathcal{P} et (t_1, t_2, t_3) les coordonnées barycentriques dans \mathcal{B} . Montrer qu'un sous-ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ est une droite affine si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \neq b$ ou $b \neq c$ tels que

$$\mathcal{D} = \{at_1 + bt_2 + ct_3 = 0\}.$$

(4.b) Montrer que deux droites définies respectivement par $at_1 + bt_2 + ct_3 = 0$ et $a't_1 + b't_2 + c't_3 = 0$ sont parallèles si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

est nul.

(4.c) Soit $a''t_1 + b''t_2 + c''t_3 = 0$ définissant une troisième droite de \mathcal{P} . Montrer que les trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

(4.d) (Théorème de Ceva) Soient (x, y, z) une base affine de \mathcal{P} . Soient x' (resp. y' , resp z') un point de (yz) différent de z et y (resp. un point de (xz) différent de x et z , resp. un point de (xy) différent de x et y). Montrer que les droites (xx') , (yy') et (zz') sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{x'y}}{\overrightarrow{x'z}} \cdot \frac{\overrightarrow{y'z}}{\overrightarrow{y'x}} \cdot \frac{\overrightarrow{z'x}}{\overrightarrow{z'y}} = -1$$

(si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires on note $\overrightarrow{u}/\overrightarrow{v}$ l'unique nombre réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$).

Exercice 5

Soit \mathcal{P} un plan affine et soit $\mathcal{B} = (x, y, z)$ une base affine de \mathcal{P} . Soit g l'isobarycentre de x, y, z et soit h le point de coordonnées barycentriques $(1, 1, -1)$ dans \mathcal{B} .

(5.a) Justifiez que $g \neq h$ et donnez une équation de la droite (gh) en coordonnées dans \mathcal{B} .

(5.b) Soit p un point de \mathcal{P} de coordonnées (a, b, c) . Donnez en fonction de a, b et c une équation de la droite passant par p et parallèle à (gh) .

Exercice 6

(6.a) Soient x, y, z trois points d'un plan affine \mathcal{P} , de coordonnées barycentriques $(x_i), (y_i), (z_i)$. Montrer que x, y, z sont alignés si et seulement si le

déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

est nul.

(6.b) (Théorème de Menelaüs) Soient (x, y, z) une base affine de \mathcal{P} . Soient x' (resp. z' , resp z') un point de (yz) différent de z et y (resp. un point de (xz) différent de x et z , resp. un point de (xy) différent de x et y). Montrez que x', y' et z' sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overrightarrow{x'y}}{\overrightarrow{x'z}} \cdot \frac{\overrightarrow{y'z}}{\overrightarrow{y'x}} \cdot \frac{\overrightarrow{z'x}}{\overrightarrow{z'y}} = 1.$$

3. PARTIES CONVEXES

Exercice 7

(7.a) Si $x, y \in \mathcal{E}$ l'enveloppe convexe de $\{x, y\}$ est appelée segment de x à y et notée $[xy]$. Montrer que

$$[xy] = \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}.$$

Montrer plus généralement que si $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'enveloppe convexe de S est égale à l'ensemble $\{\sum_i t_i x_i : t_i \in [0, 1], \sum_i t_i = 1\}$.

(7.b) Montrer que \mathcal{C} est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ le segment $[x, y]$ est contenu dans \mathcal{C} .

Exercice 8

(Théorème de Carathéodory) Soit \mathcal{E} un espace affine réel de dimension finie n et soit (x_1, \dots, x_p) une famille finie de points de \mathcal{E} . Soit \mathcal{C} l'enveloppe convexe des x_i et soit Γ l'ensemble des points de \mathcal{E} pouvant s'écrire comme le barycentre d'une famille d'au plus $n + 1$ points parmi les x_i , affectés de coefficients positifs. On dispose d'une inclusion naturelle $\Gamma \subset \mathcal{C}$; le but de ce qui suit est de prouver l'inclusion réciproque. On procède par récurrence sur p .

(8.a) Que dire si $p \leq n + 1$?

(8.b) On suppose que $p > n + 1$ et que la propriété a été démontrée au rang p . Soit $x \in \mathcal{C}$; on écrit $x = \sum \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ quel que soit i et $\sum \lambda_i = 1$.

Prouver qu'il existe j tel que A_j soit un barycentre des A_i pour $i \neq j$; on renumérote éventuellement les A_i de sorte que $j = 1$ et l'on écrit $A_1 = \sum_{i \geq 2} t_i x_i$ avec $\sum t_i = 1$. On pose $\mu_1 = 1$ et $\mu_i = -t_i$ pour tout $i > 1$.

(8.c) Montrez qu'il est licite d'écrire pour tout ℓ tel que $\mu_\ell \neq 0$ l'égalité :

$$x_\ell = \sum_{i \neq \ell} -\frac{\mu_i}{\mu_\ell} x_i.$$

(8.d) Soit ℓ tel que $\mu_\ell \neq 0$. Donnez une expression de x comme barycentre des x_i pour $i \neq \ell$; montrez qu'il est possible de choisir ℓ de sorte que les coefficients apparaissant dans cette écriture soient tous positifs, et conclure.

4. POINTS EXTRÉMAUX

Exercice 9

(9.a) Vérifier que \mathcal{C} est convexe et déterminer ses points extrémaux dans les cas suivants :

- $\mathcal{C} = \{v \in \mathbb{R}^d : \forall i, -1 \leq v_i \leq 1\}$;
- $\mathcal{C} = x_0 + \{\vec{v} \in E : \|\vec{v}\| \leq 1\}$ pour un $x_0 \in \mathcal{C}$;
- \mathcal{C} est l'enveloppe convexe de $\{x_1, \dots, x_n\}$ où x_1, \dots, x_n sont affinement indépendants.

(9.b) Dans chacun des cas ci-dessus, montrer que \mathcal{C} est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

(9.c) Montrer que le sous-ensemble $[0, +\infty[$ de l'espace affine \mathbb{R} est convexe mais n'est pas égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.