

EXAMEN FINAL, GÉOMÉTRIE II
JEUDI 7 MAI 2015
DURÉE : 3 HEURES

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés pendant toute la durée de l'épreuve. **La qualité de rédaction entrera pour une part substantielle dans la notation.** Tout énoncé du cours utilisé doit être énoncé clairement.

Les questions indiquées par un $*$ sont facultatives (et apportent des points supplémentaires si traitées). Il est possible d'admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Barème indicatif (hors bonus) : problème I : 5 points, problème II : 6 points, problème III : 6 points, problème IV : 5 points.

Problème I

Dans tout le problème \mathcal{E} est un plan euclidien orienté.

Question (1) (Question de cours) Soient \mathcal{C} un polygone convexe de \mathcal{E} et x_1, \dots, x_n ses sommets (indexés de sorte que ses côtés soient les $[x_i x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, 5$ et $[x_6 x_1]$), α_i l'angle de \mathcal{C} en x_i .

Question (1.a) Quelles sont les conditions (sur les x_i et α_i) pour que \mathcal{C} soit régulier ?

Question (1.b) Soit G le sous-groupe de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ contenant les isométries préservant \mathcal{C} ; donner une condition nécessaire et suffisante sur G pour que \mathcal{C} soit régulier.

Dans la suite de l'exercice on suppose que \mathcal{C} est régulier et $n = 6$.

Question (2.a) Montrer que pour $i = 1, \dots, 6$ on a $\alpha_i = 2\pi/3$.

Question (2.b) Soit T_1 le triangle de sommets x_1, x_2, x_3 . Quelle sont les mesures des angles de T_1 en x_1 et x_3 ?

Question (2.c) Soit T_2 le triangle de sommets x_1, x_3, x_4 . Quelle sont les mesures des angles de T_2 en x_1, x_3 et x_4 ?

Question (2.d) On suppose dans la suite que $d(x_1, x_2) = 1$. Calculer $d(x_1, x_3)$.

Question (2.e) Calculer les aires de T_1 et T_2 . En déduire l'aire de \mathcal{C} .

*Question (3) ** On suppose que x_1, \dots, x_6 sont tous sur un même cercle de rayon 1. Calculer $d(x_1, x_2)$ et en déduire (avec les questions précédentes) l'aire de \mathcal{C} .

Problème II

Question (1.a) Calculer $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$ (on exprimera le résultat à l'aide de radicaux).

Question (1.b) Soit E un plan vectoriel euclidien orienté, $B = (e_1, e_2)$ une base orthonormée *indirecte* de \mathcal{E} . Soit ρ la rotation de E d'angle $\pi/8$; donner la matrice de ρ dans B .

Question (1.c) Soit F un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de F . Donner la matrice dans B de la rotation ρ d'axe $\mathbb{R}e_2$ orienté par e_2 et d'angle $\pi/8$.

Question (2) Soient

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et φ l'application linéaire $E \rightarrow E$ dont la matrice dans B est R . Calculer $\ker(\varphi - \text{Id})$ (en donner une base en coordonnées dans B), en déduire que φ est une rotation et donner son angle au signe près.

Question (3) Soit $\vec{v} = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ et soit f l'application affine $E \rightarrow E$ définie par

$$f(x) = o + \varphi(\vec{ox}) + \vec{v}.$$

Montrer que f est un vissage, et calculer son vecteur et son axe.

Problème III

Dans ce problème \mathcal{E} est un plan euclidien, $\mathcal{R} = (o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$ un repère orthonormé de \mathcal{E} et x_1, x_2 les coordonnées dans \mathcal{R} .

Question (1) Donner le type et (le cas échéant) le centre des coniques C_1, C_2 et C_3 d'équations respectives (dans \mathcal{R}) :

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 1 = 0 ;$$

$$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 1 = 0 ;$$

$$3x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 5 = 0.$$

Question (2) Soit C la conique d'équation dans \mathcal{R} :

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \sqrt{3}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 3x_1 + 1 = 0.$$

Donner un repère \mathcal{R}' de \mathcal{E} tel que l'équation de C dans \mathcal{R}' soit de la forme $a_1y_1^2 + a_2y_2^2 - 1$ (où (y_1, y_2) sont les coordonnées dans \mathcal{R}') et calculer a_1 et a_2 . Dessiner C en indiquant les axes de coordonnées de \mathcal{R} .

Question (3.a) Soit \mathcal{D} la droite $o + 2\vec{e}_1 + \mathbb{R}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$. Donner le type et une équation dans \mathcal{R} de la conique de foyer o , directrice \mathcal{D} et excentricité $\sqrt{2}/2$.

Question (3.b) Soit C la conique d'équation

$$x_1^2 + 4x_2^2 - 1 = 0.$$

En donner l'excentricité, et les deux couples foyer/directrice.

Problème IV

Dans ce problème \mathcal{E} est un espace affine de dimension 3, E sa direction, $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E et $\mathcal{R} = (o, B)$ est un repère de \mathcal{E} .

Question (1) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 5/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et φ l'application linéaire dont la matrice dans B est M .

Question (1.a) Calculer le polynôme caractéristique de φ , montrer que 1 en est une racine et donner les autres racines.

Question (1.b) Donner des bases pour les sous-espaces $V = \ker(\varphi - \text{Id})$ et $W = \ker(\varphi - \lambda \text{Id})$ (où λ est l'autre valeur propre de φ).

*Question (2) ** *Question (2.a)* Montrer que $2\text{Id} - \varphi$ est la projection sur V parallèlement à W .

Question (3) Soit $\vec{v} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ et soit f l'endomorphisme affine de \mathcal{E} donné par

$$f(x) = o + \vec{v} + \varphi(\vec{ox}).$$

Question (3.a) Montrer que f n'a pas de point fixe dans \mathcal{E} .

Question (3.b) Soient $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ et $g(x) = f(x) - \vec{u}$. Calculer l'ensemble des points fixes de g .