

EXAMEN FINAL, GÉOMÉTRIE II

CORRIGÉ

Problème I

Question (1) L'application s est clairement affine et la matrice de sa partie linéaire σ dans la base canonique est $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. On vérifie immédiatement que cette matrice est orthogonale :

$$\frac{1}{5^2}(3^2 + 4^2) = \frac{9+16}{25} = 1, \quad 3 \times 4 + 4 \times (-3) = 0$$

et que son déterminant vaut $(3 \times (-3) - 4 \times 4)/25 = -1$. Il suit que s est une isométrie indirecte, c'est-à-dire une symétrie ou une symétrie glissée.

On calcule facilement que $D = \ker(\sigma - \text{Id}) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: on note \vec{u} le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soient $o = (0, 0)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{os(o)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; la projection orthogonale \vec{w} de \vec{v} sur D se calcule par :

$$\vec{w} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui est non-nul. On voit donc que s est une symétrie glissée d'axe dirigée par D et de vecteur \vec{w} .

Soit $s' = t_{-\vec{w}} \circ s$: on sait que s' est une symétrie dont les points fixes sont l'axe de s . On voit que :

$$s'(x, y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{5}, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{4}{5} \right)$$

et l'axe de s' est donc l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2 &= 5x \\ 4x - 3y - 4 &= 5y \end{cases}$$

c'est-à-dire $(1, 0) + D$.

Question (2.a) L'application r est clairement affine et la matrice de sa partie linéaire dans la base canonique est $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice dans une base directe de la rotation d'angle $-\pi/4$. On calcule facilement que son point fixe est $(1, 1)$.

Question (2.b) On voit que

$$f \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \right) = x^2 + 2y^2 - 1.$$

Voici le détail des calculs : on pose $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2}$, $y' = \frac{-\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(x')^2 &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + (1 - \sqrt{2})^2 + xy + \sqrt{2}(1 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}(1 - \sqrt{2})y \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + (\sqrt{2} - 2)x + (\sqrt{2} - 2)y + 3 - \sqrt{2} \\
(y')^2 &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy + 1 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y \\
x'y' &= \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)xy + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - (1 - \sqrt{2}))x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + 1 - \sqrt{2})y + 1 - \sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + x + (\sqrt{2} - 1)y + 1 - \sqrt{2} \\
(3\sqrt{2} - 4)x' &= (3 - 2\sqrt{2})x + (3 - 2\sqrt{2})y + (3\sqrt{2} - 4)(1 - \sqrt{2}) = (3 - 2\sqrt{2})x + (3 - 2\sqrt{2})y - 10 + 7\sqrt{2} \\
(\sqrt{2} - 4)y' &= (2\sqrt{2} - 1)x + (1 - 2\sqrt{2})y + \sqrt{2} - 4.
\end{aligned}$$

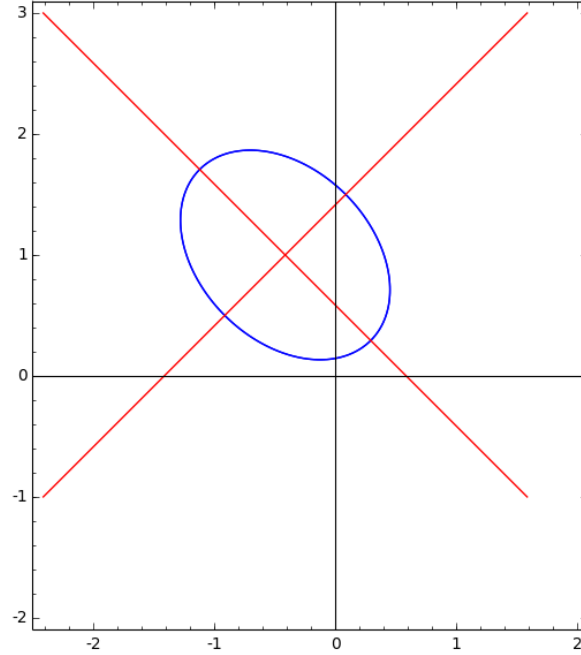
Il vient :

$$\begin{aligned}
f(x', y') &= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)x^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)y^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)xy \\
&\quad + \left(\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 2) - \frac{3}{2}\sqrt{2} + 1 + 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1\right)x \\
&\quad + \left(\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 2) + \frac{3}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + 3 - 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2}\right)y \\
&\quad + \frac{3}{2}(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{3}{2} + 1 - \sqrt{2} - 10 + 7\sqrt{2} + \sqrt{2} - 4 + 6 - 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

On voit que les deuxième et troisième lignes sont nulles et que la quatrième vaut -1 . On a donc finalement :

$$f(r(x, y)) = f(x', y') = x^2 + 2y^2 - 1.$$

Question (2.c) D'après la question précédente C est l'image par r de la courbe d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$: c'est donc une ellipse. Voici un dessin avec les axes en rouge :



Question (2.d) D'après la question (2b) on a

$$f(r(\cos(t), \sqrt{2}\sin(t))) = 0$$

pour $t \in [0, 2\pi]$. Il suit que :

$$t \mapsto r(\cos(t), \sqrt{2}\sin(t))$$

est une paramétrisation de C .

Problème II

Question (1) Le triangle est isocèle en x : en effet l'angle en z vaut $\pi - (2\pi/3 + \pi/6) = \pi/6$ et il a donc les mêmes angles en y et z . Soit ℓ la longueur des côtés $[x, y]$ et $[x, z]$: d'après la loi du cosinus on a

$$\ell^2 = \frac{1}{2 - 2\cos(2\pi/3)} = \frac{1}{3}$$

et il suit que x est le point de coordonnées :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

Question (2) On a :

$$r_1 = s_2 \circ s_1, r_2 = s_1 \circ s_3.$$

Question (3.a) On a :

$$r_3 = s_2 \circ s_1 \circ s_1 \circ s_3 = s_2 \circ s_3$$

et il suit que r_3 est la rotation de centre x et d'angle $-4\pi/3 = 2\pi/3$.

Question (3.b) Soit $t = r_3 \circ r_2^{-2}$: la partie linéaire de t est l'identité puisque la somme des angles des rotations r_3 et r_2^{-2} est nulle, et il suit que t est une translation. On calcule l'image de z par t :

$$t(z) = r_3(z) = (1/2, \sqrt{3}/2).$$

On voit donc que le vecteur de t est $\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

Question (4) Si $w \in \mathbb{C}$ on a $r_1(w) = e^{i\pi/6}w$. On note $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$, on a alors : $r_3(w) = e^{2i\pi/3}(w - w_0) + w_0$. Après calculs il vient :

$$r_3(w) = e^{2i\pi/3}w + 1.$$

Question (5.a) On a $r_1^6 = \text{Id}$ (c'est une rotation d'angle $6 \times 2\pi/3 = 2\pi$) et il suit donc que l'ensemble $S = \{r_1^n(x) : n \geq 0\}$ est égal à $\{x, r_1(x), \dots, r_1^5(x)\}$. Soit \mathcal{C} l'enveloppe convexe de S : c'est un polygone convexe à ≤ 6 sommets. D'autre part S est stable par r_1 et il suit que le groupe d'isométries directes $G_{\mathcal{C}}^+$ préservant \mathcal{C} est de cardinal 6. D'après le résultat du cours sur $|G_{\mathcal{C}}^+|$ il suit que \mathcal{C} a au moins 6 sommets, donc c'est un hexagone dont les sommets sont exactement les points de S .

D'après le même résultat on voit aussi que \mathcal{C} est régulier.

Question (5.b) On a $r_1 \in G_{\mathcal{C}}$. On a aussi $s_2 \in G_{\mathcal{C}}$: en effet $s_2 r_1 s_2 = r_1^{-1}$ et comme s_2 fixe x il suit que pour $k \in \mathbb{Z}$ on a : $s_2(r_1^k(x)) = r_2^{-k}(x)$ et en particulier s_2 préserve S , donc aussi son enveloppe convexe \mathcal{C} .

Le groupe G engendré par r_1 et s_2 est donc un sous-groupe du groupe diédral $G_{\mathcal{C}}$. Ce dernier est de cardinal 12 ; d'autre part r_1 engendre un sous-groupe d'ordre 6 ne contenant pas s_2 (une symétrie ne peut pas être égale à un produit de rotations). Il suit que $|G|$ est un nombre divisant 12 (par le « théorème de Lagrange ») et strictement supérieur à 6, donc $|G| = 12$ et G est le groupe diédral $G_{\mathcal{C}}$.

Problème III

Question (1) La matrice de la partie linéaire ρ de r dans la base canonique est :

$$R = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que c'est une matrice orthogonale. On calcule que $\ker(\rho - \text{Id}) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

qui est de dimension 1. On note $\vec{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; il suit que ρ est une rotation d'axe $D = \mathbb{R} \vec{u}$.

D'autre part, si $\theta \in [0, \pi]$ désigne son angle (au signe près) on voit que :

$$1 + 2 \cos(\theta) = \text{tr}(\rho) = 1$$

et il suit que $\theta = \pi/2$.

Enfin, soit \vec{w} la projection orthogonale du vecteur $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur D . Comme \vec{u} est de norme 1 on a :

$$\vec{w} = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{u} = \frac{10}{27} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche un point fixe de $r' = t_{-\vec{w}} \circ r$: on a

$$r'(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{9} \left(4x_1 + x_2 + 8x_3 - \frac{2}{3}, 7x_1 + 4x_2 - 4x_3 - \frac{2}{3}, -4x_1 + 8x_2 + x_3 + \frac{8}{3} \right)$$

et la recherche d'un point fixe donne le système :

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 8x_3 = \frac{2}{3} \\ 7x_1 - 5x_2 - 4x_3 = \frac{2}{3} \\ -4x_1 + 8x_2 - 8x_3 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

qui a pour solutions $\frac{1}{9}(-2, -4, 0) + D$.

Question (2) Soient $\vec{e}_1 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ et $\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et \vec{e}_3 un vecteur unitaire orthogonal à \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , et soit B la base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Les matrices de ρ et η dans la base B sont alors données par :

$$\text{Mat}_B(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{Mat}_B(\eta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et il vient

$$\text{Mat}_B(\rho \circ \eta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Mat}_B(\eta \circ \rho).$$

On voit donc que $\rho \circ \eta = \eta \circ \rho$ est la rotation d'angle π et d'axe $\mathbb{R}\vec{e}_3$.

Question (3.a) La formule $r(x) = o + \vec{v} + \rho(\vec{ox})$ est une conséquence immédiate de la définition d'un vissage : on sait que $t_{-\vec{v}} \circ r$ fixe l'axe $o + \mathbb{R}\vec{v}$ et on a donc $r(o) = o + \vec{v}$, et comme r est affine de partie linéaire ρ il suit que pour $x \in \mathcal{E}$ on a

$$r(x) = r(o) + \rho(\vec{ox}) = o + \vec{v} + \rho(\vec{ox}).$$

De la même manière on a $h(o + \vec{w}) = o + \vec{w} + \vec{u}$ et il suit que :

$$h(x) = h(o + \vec{w}) + \eta(\vec{ox} - \vec{w}) = o + \vec{w} + \vec{u} + \eta(\vec{ox}) + \vec{w} = o + 2\vec{w} + \vec{u} + \eta(\vec{ox})$$

(on a utilisé le fait que $\eta(\vec{w}) = -\vec{w}$ vu que \vec{w} est orthogonal à l'axe de η).

Question (3.b) D'après la question (2) $r \circ h$ est un vissage ou une rotation d'angle π et d'axe dirigé par $\mathbb{R}\vec{w}$. Il suffit donc de vérifier que l'on a bien

$$r \left(h \left(o + \frac{\vec{v} - \vec{u}}{2} \right) \right) = o + \frac{\vec{v} - \vec{u}}{2} + 2\vec{w}.$$

D'après les expressions obtenues à la question précédente pour r et h on a :

$$\begin{aligned} r(h(x)) &= o + \vec{v} \rho(2\vec{w} + \vec{u} + \eta(\vec{ox})) \\ &= o + (\vec{v} - \vec{u}) + 2\vec{w} + \rho \circ \eta(\vec{ox}). \end{aligned}$$

Comme \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux à l'axe $\mathbb{R}\vec{w}$ de $\rho \circ \eta$ et on a donc $\rho \circ \eta(\vec{v} - \vec{u}) = -(\text{vec}v - \vec{u})$.
Il suit que :

$$\begin{aligned} r\left(h\left(o + \frac{\vec{v} - \vec{u}}{2}\right)\right) &= o + (\vec{v} - \vec{u}) + 2\vec{w} + \rho \circ \eta\left(\frac{\vec{v} - \vec{u}}{2}\right) \\ &= o + (\vec{v} - \vec{u}) + 2\vec{w} - \frac{\vec{v} - \vec{u}}{2} = o + \frac{\vec{v} - \vec{u}}{2} + 2\vec{w}. \end{aligned}$$

Question (3.c) Non. Par exemple si r, h ont un point fixe x en commun (ce qui est un cas où elle commutent l'une à l'autre) on voit que $r' = t_{\vec{e}_3} \circ r$ et h ne commutent pas : en effet on a $r' \circ h(x) = r'(x) = x + \vec{e}_3$ et d'autre part $h \circ r'(x) = h(x + \vec{e}_3) = x - \vec{e}_3$.

Problème IV

Question (1.a) L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ se réécrit $(x + 1/2)^2 = 5/4$ et ses racines sont donc $(\sqrt{5} - 1)/2$ et $-(\sqrt{5} + 1)/2$. Seule la première est positive.

Question (1.b) On développe

$$(X^2 - aX + 1)(X^2 - bX + 1) = X^4 - (a + b)X^3 + (2 + ab)X^2 - (a + b)X + 1.$$

On a $a + b = -1$ et $2 + ab = 2 - a^2 - a = 2 - 1 = 1$ et la factorisation désirée suit.

Question (1.c) On a :

$$\begin{aligned} X^5 - 1 &= (X - 1)(X - e^{2i\pi/5})(X - e^{-2i\pi/5})(X - e^{4i\pi/5})(X - e^{-4i\pi/5}) \\ &= (X - 1)\left(X^2 - (e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5})X + e^{2i\pi/5}e^{-2i\pi/5}\right)\left(X^2 - (e^{4i\pi/5} + e^{-4i\pi/5})X + e^{4i\pi/5}e^{-4i\pi/5}\right) \\ &= (X - 1)\left(X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos(4\pi/5) + 1\right). \end{aligned}$$

D'autre part $X^5 - 1 = (X - 1)(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)$. Par unicité de la décomposition en facteurs des polynômes il suit que

$$(1 + X + X^2 + X^3 + X^4) = (X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1)(X^2 - 2\cos(4\pi/5) + 1)$$

puis par la question précédente que $X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1$ est l'un des polynômes $(X^2 - aX + 1)$ ou $(X^2 - bX + 1)$, c'est-à-dire que $2\cos(2\pi/5) = a$ ou b . Comme $a > 0 > b$ et $\cos(2\pi/5) > 0$ on a finalement $2\cos(2\pi/5) = a$.

Question (2.a) On vérifie que la matrice R est orthogonale : le carré de la norme de chacune des colonnes vaut $a^2 + (a + 1)^2 + 1 = 2(a^2 + a) + 2 = 4$; les produits scalaires entre colonnes valent :

$$\begin{aligned} a(-a - 1) + (a + 1) - a &= -a^2 + 1 - a = 0, \\ a + (a + 1)a - (a + 1) &= a + a^2 - 1 = 0, \\ -(a + 1) + a + a(a + 1) &= -1 + a^2 + a = 0. \end{aligned}$$

Un calcul laissé au lecteur montre que $\det(R) = 1$ et donc que ρ est une rotation.

On vérifie que le vecteur directeur de D donné est bien un vecteur fixe de ρ : si X est la matrice colonne le représentant on a :

$$RX = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & -a-1 & 1 \\ a+1 & 1 & a \\ -1 & a & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a-1+(a+1) \\ 1+a(a+1) \\ a+(a+1)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ (a^2+a-1)+2 \\ (a^2+a-1)+2a+2 \end{pmatrix} = X.$$

Enfin, on a $\text{tr}(\rho) = a+1 = 1+2\cos(2\pi/5)$ d'après la question (1c) et l'angle de ρ au signe près est donc $2\pi/5$.

Question (2.b) On calcule immédiatement que

$$R^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a-1 & -1 & a \\ 1 & -a & a+1 \\ -a & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a d'autre part :

$$R^3 = R^5 \cdot (R^{-1})^2 = ({}^tR)^2 = {}^t(R^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a-1 & 1 & -a \\ -1 & -a & a+1 \\ a & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$R^4 = R^5 \cdot R^{-1} = {}^tR = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & a+1 & -1 \\ -a-1 & 1 & a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Question (3) Les vérifications des égalités $\rho^i(\overrightarrow{ox_1}) = \overrightarrow{ox_i}$ sont laissées à la lectrice. On va montrer que les points x_i sont en conséquences de celles-ci tous contenus dans le plan \mathcal{P} orthogonal à D et passant par x_1 . Soit \overrightarrow{u} la projection orthogonale de $\overrightarrow{ox_1}$ sur D et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ox_1} - \overrightarrow{u}$. On a alors $\rho(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$, d'où il suit que pour $i = 1, \dots, 5$ on a :

$$x_i = o + \overrightarrow{ox_i} = o + \rho^i(\overrightarrow{vec ox_1}) = o + \overrightarrow{u} + \rho^i(\overrightarrow{v}).$$

Vu que \overrightarrow{v} est orthogonal à D les vecteurs $\rho^i(\overrightarrow{v})$ le restent, et l'égalité ci-dessus implique donc que tous les x_i sont contenus dans un même plan orthogonal à D (on peut remarquer que l'on a en fait $\overrightarrow{ox_1} \in D^\perp$ et que ce plan passe donc par o).

Dans ce plan l'ensemble $\{x_1, \dots, x_5\}$ constitue les sommets d'un polygone à au plus 5 sommets ; comme il est de plus stable par une rotation d'angle $2\pi/5$ (au signe près) il forme un pentagone régulier.

Question (4) Soit $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix}$ le vecteur directeur de D donné plus haut. Si $x(t) = o + t\overrightarrow{w} \in \mathcal{D}$

on voit que $d(x_i, x(t))^2 = d(x_1, o)^2 + t^2 \|\overrightarrow{w}\|^2$, et il suit que la fonction :

$$f : t \mapsto d(x_i, x(t))$$

est strictement décroissante (resp. croissante) sur $] -\infty, 0]$ (resp. $[0, +\infty[$) et atteint un minimum valant $d(x_i, o)$. Comme de plus $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = +\infty$ on voit que si on a $d(x_1, o) < d(x_1, x_2)$ alors les points $x_6 = x(t_0)$, $x_7 = x(-t_0)$ sont les uniques solutions au problème, où t_0 est l'unique réel tel que $f(t_0) = d(x_1, x_2) = f(-t_0)$ donné par le théorème des valeurs intermédiaires.

On peut calculer explicitement les distances $d(x_1, x_2)$ et $d(o, x_1)$ pour constater que tel est bien le cas. Une méthode plus élégante est d'utiliser la loi des cosinus : le triangle $\{o, x_1, x_2\}$ est isocèle

en o et son angle θ en ce point est entre $\pi/3$ et $\pi/2$ (il vaut exactement $2\pi/5$), en particulier $\cos(\theta) < 1/2$. Il vient alors, si $\ell = d(o, x_1) = d(o, x_2)$:

$$d(x_1, x_2)^2 = (2 - 2\cos\theta)\ell^2 > (2 - 2 \cdot 1/2)\ell^2 = \ell^2.$$

Question (5.a) Les faces de \mathcal{C} sont les triangles x_j, x_i, x_{i+1} et x_j, x_5, x_1 pour $i = 1, 2, 3, 4$ et $j = 6, 7$. D'après la question précédentes les distances $d(x_i, x_6)$ et $d(x_i, x_{i+1})$ sont égales l'une à l'autre et ces faces sont donc des triangles équilatéraux.

Question (5.b) Le polygone \mathcal{C} a exactement 7 sommets et ne peut donc pas être régulier d'après la classification vue en cours. On peut aussi remarquer que les sommets x_6, x_7 appartiennent chacun à cinq faces distinctes alors que les autres n'appartiennent qu'à quatre.

Question (5.c) On a vu que \mathcal{C} a 7 sommets et 10 faces ; d'après la formule d'Euler sont nombre d'arêtes a vérifie $7 - a + 10 = 2$ et il suit que \mathcal{C} a exactement 15 arêtes.

Question (5.d) Soit G le sous-groupe diédral du groupe d'isométries de \mathcal{P} préservant le pentagone formé par les x_i . Si $g \in G$ on note g^+ (resp. g^-) l'unique isométrie de \mathcal{E} valant g en restriction à \mathcal{P} et $+1$ (resp. -1) en restriction à l'axe de ρ . Alors $G = \{g^+, g^- : g \in G\}$ est un groupe de cardinal 20.

Question (6) Soit y le pied de la hauteur issue de x_1 dans le triangle $\{x_1, x_2, x_6\}$. Comme y est aussi le pied de la hauteur issue de x_3 dans le triangle $\{x_3, x_2, x_6\}$ l'angle dièdre cherché est égal (au signe près) à l'angle α en y du triangle $\{x_1, y, x_3\}$. On va calculer ce dernier en utilisant la formule du cosinus.

On pose :

$$\ell = d(x_1, x_2) = d(x_2, x_3), m = d(x_1, x_3), n = d(x_1, y) = d(x_3, y)$$

de sorte que la loi du cosinus dans $\{x_1, y, x_3\}$ donne $n^2 + n^2 - 2n \cdot n \cdot \cos(\alpha) = m^2$, soit encore :

$$(0.1) \quad \cos(\alpha) = 1 - \frac{m^2}{2n^2}.$$

D'autre part on a $n = \sqrt{3}\ell/2$ (par exemple en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle $\{x_1, x_2, y\}$) et par la loi du cosinus dans $\{x_1, x_2, x_3\}$ on a :

$$m^2 = 2\ell^2 - 2\ell^2 \cos(3\pi/5) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot \ell^2$$

(en effet $\cos(3\pi/5) = \cos(\pi - 2\pi/5) = -\cos(2\pi/5) = (1 - \sqrt{5})/2$). En remplaçant n, m par leurs valeurs dans (0.1) il vient :

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{\ell^2(3 + \sqrt{5})/2}{3\ell^2/2} = 1 - \frac{\sqrt{5} + 3}{3} = \frac{-\sqrt{5}}{3}.$$

Question TP

Les écritures binaires respectives de 7 et 17 sont $7 = 111$ et $17 = 10001$. On calcule que :

— $[m(7, x, 0) \text{ for } x \text{ in } P] = [(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)]$

— $[m(17, x, 0) \text{ for } x \text{ in } P] = [(-3, 5), (-3, 9), (-7, 5), (-7, 9)]$

ce qui donne les dessins :

