

FEUILLE D'EXERCICES n° 2 :
APPLICATIONS AFFINES, ISOMÉTRIES, CONVEXITÉ

1. APPLICATIONS AFFINES

Exercice 1

(1.a) On voit \mathcal{E} comme le sous-espace affine $\mathcal{E} \times \{1\}$ de $\mathcal{F} = \mathcal{E} \times \mathbb{R}$. Soit $(x_0, (e_1, \dots, e_d))$ un repère de \mathcal{E} , e_{d+1} le vecteur $(0, 1) \in E \times \mathbb{R} = F$. Montrer que $B' = (e_1, \dots, e_d, e_{d+1})$ est une base de F .

(1.b) On garde la notation de la question précédente. Soit f une application affine de \mathcal{E} , que l'on écrit $\phi + \vec{v}$ avec origine x_0 . Soit ψ l'application linéaire de F définie par $\psi(e_i) = \phi(e_i)$, $i = 1, \dots, d$ et $\psi(e_{d+1}) = e_{d+1} + \vec{v}$. Montrer que la matrice de ψ dans B' est égale à la matrice de f dans (x_0, B) , que $\psi(\mathcal{E} \times \{1\}) \subset \mathcal{E} \times \{1\}$ et que $\psi|_{\mathcal{E} \times \{1\}} = f$.

(1.c) Montrer que si (x_0, B) est un repère de \mathcal{E} et f, h des endomorphismes affines de \mathcal{E} dont les matrices dans (x_0, B) sont respectivement A, B alors la matrice de $f \circ h$ dans (x_0, B) est AB .

(1.d) On fixe un repère (x, B) de \mathcal{E} . Montrer que l'application

$$f \mapsto \text{Mat}_{(x, B)}(f)$$

définit un morphisme de groupes injectif du groupe affine de \mathbb{R}^d vers le groupe linéaire $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$. Montrer aussi que

$$\phi + \vec{w} \mapsto \phi$$

définit un morphisme du groupe affine vers $\text{GL}(E)$. Quel est le noyau de ce dernier ?

Exercice 2

Soit \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace affine de dimension 2 et soit E son espace directeur. Soit $x_0 \in \mathcal{E}$, soit (e_1, e_2) une base de E et soit \mathcal{R} le repère (x_0, e_1, e_2) de \mathcal{E} .

(2.a) Soit f l'application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} donnée en coordonnées dans le repère \mathcal{R} par la formule

$$(x, y) \mapsto (2x - 3y + 5, 7x - 2y + 3).$$

Donner la matrice de f dans \mathcal{R} .

(2.b) Soit x'_0 le point de \mathcal{E} de coordonnées $(2, -1)$; posons $e'_1 = e_1 - 2e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$. Vérifiez que (e'_1, e'_2) est une base de E . Soit \mathcal{R}' le repère (x'_0, e'_1, e'_2) de \mathcal{E} ; donner la matrice de passage de \mathcal{R} à \mathcal{R}' ; en déduire la matrice de f dans le repère \mathcal{R}' , puis une définition de f par une formule en coordonnées dans le repère \mathcal{R}' .

(2.c) Trouver le repère $\mathcal{R}'' = (x''_0, e''_1, e''_2)$ de \mathcal{E} caractérisé par la propriété suivante : si M est un point de \mathcal{E} de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} , ses coordonnées dans \mathcal{R}'' sont $(x - y + 3, 2x + y - 6)$.

(2.d) Trouver un repère \mathcal{R}''' de \mathcal{E} dans lequel f peut être définie par une formule sans termes constants.

Exercice 3

Soit ϕ l'endomorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 défini par

$$(x, y) \mapsto (x + y, y).$$

Montrer que ϕ n'est pas diagonalisable sur \mathbb{C} . Trouver un endomorphisme affine f de \mathbb{R}^2 dont la partie linéaire est ϕ et qui ait un point fixe dans \mathbb{R}^2 , et un endomorphisme f' dont la partie linéaire est aussi ϕ mais qui n'a pas de point fixe dans \mathbb{R}^2 .

2. ISOMÉTRIES

Exercice 4

Montrer que si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont des bases affines orthonormales de \mathcal{E} alors il existe une unique isométrie f de \mathcal{E} telle que $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$.

Exercice 5

Montrer que si une application affine f de \mathcal{E} dans lui-même vérifie $\forall x, y \in \mathcal{E} : d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, alors f est une isométrie affine de \mathcal{E} .

Exercice 6

Soit $E = M_2(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB).$$

(6.a) Calculer

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(6.b) Soient $A, B \in O_2(\mathbb{R})$. Montrer que les endomorphismes linéaires de E définis par

$$M \mapsto AM, \quad M \mapsto MB, \quad , M \mapsto AMB$$

sont des isométries de E .

Exercice 7

(7.a) Montrer que si t, t' sont des translations et s'il existe un point $x \in \mathcal{E}$ tel que $t(x) = t'(x)$ alors $t = t'$

(7.b) Soit g une transformation affine inversible de \mathcal{E} et $\vec{v} \in E$. Montrer que $g \circ t_{\vec{v}} \circ g^{-1}$ est égale à $t_{\vec{g}(\vec{v})}$.

* (7.c) Dédurre de la question précédente que l'ensemble des translations de \mathcal{E} (y compris l'identité) est un sous-groupe distingué du groupe affine de \mathcal{E} . Montrer que le quotient est isomorphe à $GL(E)$.

Exercice 8

* (8.a) Montrer qu'une application affine f est une symétrie si et seulement si c'est une involution (c'est-à-dire que $f \circ f = \text{Id}$). (Indications : montrer que la partie linéaire est une symétrie vectorielle, puis que le fait que f soit une involution implique qu'elle a un point fixe.)

(8.b) Montrer que la symétrie s par rapport à \mathcal{F} parallèlement à F' est une isométrie affine si et seulement si F et F' sont orthogonaux.

Exercice 9

(9.a) Montrer que si E est un espace vectoriel euclidien de dimension $\dim(E) \geq 2$ et $r > 0$ alors E est engendré comme groupe abélien par le sous-ensemble

$$\{\vec{v} \in E : \|\vec{v}\| = r\}$$

(faire une démonstration par récurrence ; pour $\dim(E) = 2$ montrer d'abord que le groupe engendré par ces vecteurs contient $t\vec{v}$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $\|\vec{v}\| = r$).

(9.b) Montrer que si $\vec{v}, \vec{v}' \in E$ ont même norme il existe une réflexion vectorielle σ de E telle que $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}'$.

* (9.c) Montrer que le groupe orthogonal de E est engendré par les réflexions.

(9.d) Dédurre des questions précédentes que si \mathcal{E} est un espace affine euclidien de direction E , t une translation non-triviale de \mathcal{E} et $x_0 \in \mathcal{E}$ alors le groupe des isométries de \mathcal{E} est engendré par t et les réflexions fixant x_0 .

(9.e) Montrer que le groupe des isométries de \mathcal{E} est engendré par les réflexions.

Exercice 10

(10.a) Vérifier l'existence et l'unicité dans la définition d'une projection affine.

(10.b) Montrer que si p est une projection affine elle est orthogonale si et seulement si on a

$$d(p(x), p(y)) \leq d(x, y)$$

pour tous $x, y \in \mathcal{E}$ (traiter d'abord l'analogue vectoriel).

3. RÉDUCTION DES ISOMÉTRIES VECTORIELLES

Exercice 11

(11.a) Montrer que si $\dim(E)$ est paire et ϕ est une isométrie indirecte de E alors ϕ a un vecteur fixe non-nul (i.e. il existe $\vec{v} \in E, \vec{v} \neq 0$ avec $\phi\vec{v} = \vec{v}$).

(11.b) Montrer que si $\dim(E)$ est impaire et ϕ est une isométrie directe de E alors ϕ a un vecteur fixe non-nul.

Exercice 12

(12.a) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4, $B = \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$ une base orthonormale de E et ρ l'application linéaire dont la matrice dans B est

$$\text{Mat}_B(\rho) = R = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Constater que ρ est une isométrie de E , montrer qu'il existe une infinité de bases orthonormales de E dans lesquelles la matrice de ρ est égale à R (ceci montre qu'en général la décomposition en espaces stables d'une isométrie n'est pas unique).

(12.b) Soit R la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 2/3 & 8/15 & -2/5 & 1/3 \\ -2/5 & 11/15 & -2/15 & -8/15 \\ 8/15 & 2/15 & 11/15 & -2/5 \\ -1/3 & 2/5 & 8/15 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Constater que R est une isométrie ; calculer son polynôme caractéristique et montrer que ce dernier est égal à $(X^2 - 6X/5 + 1)(X^2 - 8X/5 + 1)$. Soit ρ l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est R ; donner une base orthonormale de \mathbb{R}^4 dans laquelle ρ ait une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ et donner les valeurs de θ_1 et θ_2 .

4. CONVEXITÉ

Exercice 13

Montrer que le barycentre x_0 des points x_i avec les coefficients t_i (où $\sum_i t_i = 1$) est caractérisé par la propriété

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{x_0 x_i} = 0.$$

(13.a) Montrer que si $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ vérifient $\sum_i t_i \neq 0$ il existe un unique point $x_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant (4.1). Que se passe-t'il si $\sum_i t_i = 0$?

Exercice 14

(14.a) Si $x, y \in \mathcal{E}$ l'enveloppe convexe de $\{x, y\}$ est appelée segment de x à y et notée $[xy]$. Montrer que

$$[xy] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}.$$

Montrer plus généralement que si $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'enveloppe convexe de S est égale à l'ensemble $\{\sum_i t_i x_i : t_i \in [0, 1], \sum_i t_i = 1\}$.

(14.b) Montrer que \mathcal{C} est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ le segment $[x, y]$ est contenu dans \mathcal{C} .

Exercice 15

(15.a) Vérifier que \mathcal{C} est convexe et déterminer ses points extrémaux dans les cas suivants :

- $\mathcal{C} = \{v \in \mathbb{R}^d : \forall i, -1 \leq v_i \leq 1\}$;
- $\mathcal{C} = x_0 + \{\vec{v} \in E : \|\vec{v}\| \leq 1\}$ pour un $x_0 \in \mathcal{E}$;
- \mathcal{C} est l'enveloppe convexe de $\{x_1, \dots, x_n\}$ où x_1, \dots, x_n sont affinement indépendants.

(15.b) Dans chacun des cas ci-dessus, montrer que \mathcal{C} est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

(15.c) Montrer que le sous-ensemble $[0, +\infty[$ de l'espace affine \mathbb{R} est convexe mais n'est pas égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.