

Soient $x, y, z \in \mathcal{E}$ non-alignés. Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 les droites (xy) et (xz) et soit $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ les bissectrices des demi-droites $x + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{xy}, x + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{xz}$ et $x - \mathbb{R}_+ \overrightarrow{xy}, x + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{xz}$ respectivement. Soit :

$$S = \{x' \in \mathcal{E} : d(x', \mathcal{D}_1) = d(x', \mathcal{D}_2)\}.$$

Alors

$$S = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'.$$

On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{xz}$. Soit $x' \in \mathcal{E}$; on note $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{xx'}$ et α, β les angles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$. On a

$$\begin{aligned} x' \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \alpha = \beta \\ x' \in \mathcal{D}' &\Leftrightarrow (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \pi + \alpha = \beta. \end{aligned}$$

Soit π_1, π_2 les projections orthogonales sur D_1, D_2 . On a :

$$d(x', \mathcal{D}_1) = d(x', p_1(x')) = \|\overrightarrow{w} - \pi(\overrightarrow{w})\|$$

et d'autre part

$$\pi(\overrightarrow{w}) = \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned} d(x', \mathcal{D}_1) &= \sqrt{\left\| \overrightarrow{w} - \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u} \right\|^2} \\ &= \sqrt{\|\overrightarrow{w}\|^2 - 2 \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} + \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^4} \|\overrightarrow{u}\|^2} \\ &= \sqrt{\|\overrightarrow{w}\|^2 - \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2}} = \|w\| \sqrt{1 - \cos(\alpha)^2}. \end{aligned}$$

De même on voit que :

$$d(x', \mathcal{D}_2) = \|w\| \sqrt{1 - \cos(\beta)^2}$$

et il suit que

$$x' \in S \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \pm \cos(\beta),$$

c'est-à-dire $\beta = \pm \alpha$ ou $\beta = \pi \pm \alpha$. Comme x, y, z ne sont pas alignés on ne peut pas avoir $\beta = -\alpha$ ou $\beta = \pi - \alpha$ et il suit donc que $x' \in S$ si et seulement si $\alpha = \beta$ ou $\alpha = \pi + \beta$, c'est-à-dire $x \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ d'après le premier paragraphe.

Montrer que les bissectrices du triangle $\{x, y, z\}$ sont concourantes.

Soit x' le point d'intersection des bissectrices $\mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z$ issues de y et z . D'après le sens direct de la question précédente on a $d(x', (yx)) = d(x', (yz))$ et $d(x', (zx)) = d(x', (zy))$ d'où il suit que $d(x', (xy)) = d(x', (xz))$. D'après le sens réciproque on a donc $x' \in \mathcal{D}_x \cup \mathcal{D}'_x$ (où \mathcal{D}_x est la bissectrice de T en x et \mathcal{D}'_x la droite orthogonale à \mathcal{D}_x passant par x).

Il faut montrer que l'on a en fait $x' \in \mathcal{D}_x$. Soient :

$$C_y^+ = \mathbb{R}_+ \overrightarrow{yx} + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{yz}, C_z^+ = \mathbb{R}_+ \overrightarrow{zx} + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{zy}, C_y^- = -C_y^+ \text{ et } C_z^- = -C_z^+.$$

On note aussi $\mathcal{C}_y^+ = y + C_y^+$, etc. On a

$$\mathcal{D}_y \cap \mathcal{D}_z \subset (\mathcal{C}_y^+ \cup \mathcal{C}_y^-) \cap (\mathcal{C}_z^+ \cup \mathcal{C}_z^-)$$

et d'autre part $\mathcal{C}_y^- \cap \mathcal{C}_z^- = \emptyset$, $\mathcal{C}_y^- \cap \mathcal{C}_z^+ = y + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{zy}$ et $\mathcal{C}_y^+ \cap \mathcal{C}_z^- = z + \mathbb{R}_+ \overrightarrow{yz}$. Comme le point x' n'est pas sur la droite (yz) il suit que $x' \in \mathcal{C}_y^+ \cap \mathcal{C}_z^+$ (qui est l'enveloppe convexe de x, y, z). Comme \mathcal{D}'_x n'intersecte pas $\mathcal{C}_y^+ \cap \mathcal{C}_z^+$ en-dehors de x on a bien $x' \in \mathcal{D}_x$.

Remarque : Les droites $\mathcal{D}_x, \mathcal{D}'_y, \mathcal{D}'_z$ (resp. $\mathcal{D}_y, \mathcal{D}'_z, \mathcal{D}'_x, \mathcal{D}_z, \mathcal{D}'_x, \mathcal{D}'_y$) sont aussi concourantes ; leurs points d'intersection sont les centres des « cercles exinscrits » de T .