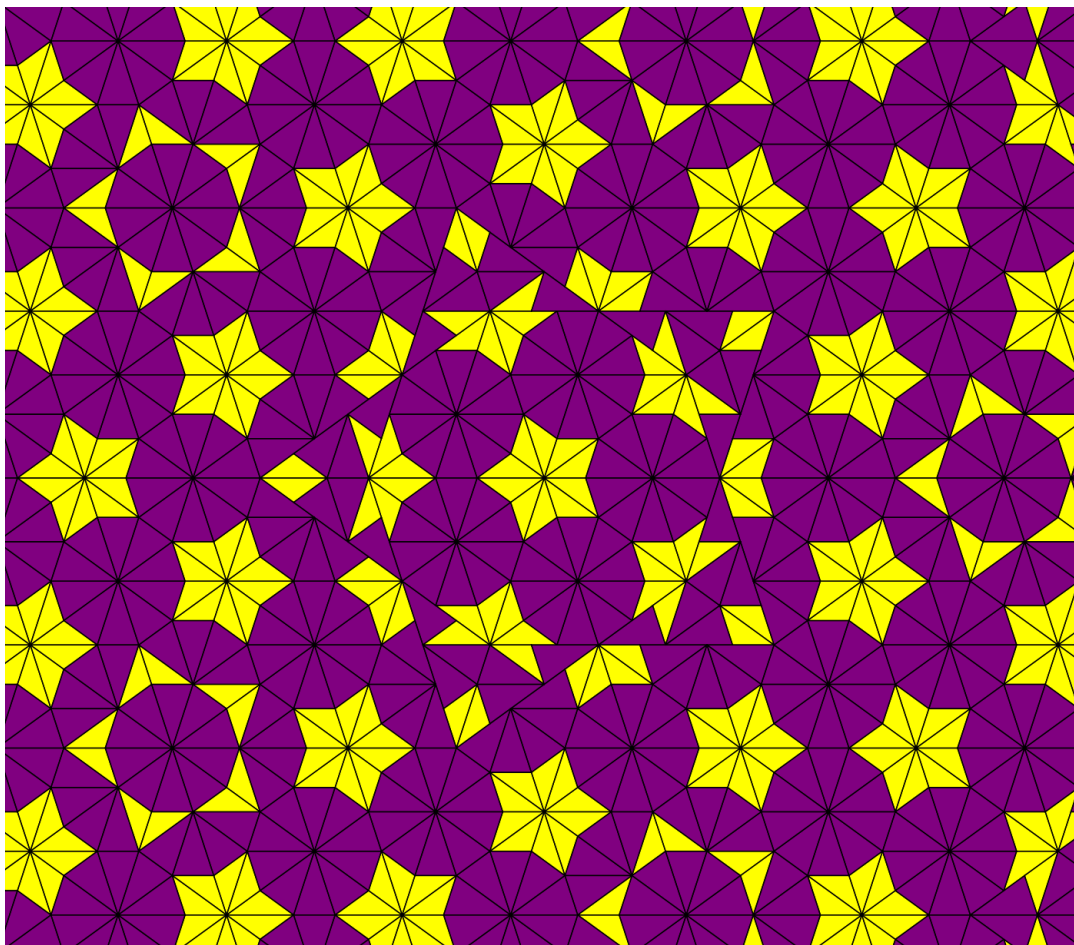


Géométrie II :

Espaces affines euclidiens, géométrie du plan et de l'espace, coniques



Introduction

Ce cours est la continuation du cours « Géométrie I » du premier semestre. Il concerne principalement l'application des notions abstraites vues dans ce dernier (espace vectoriel euclidien, isométrie, espace affine,...) à la géométrie euclidienne plane et de l'espace, et se termine par une brève introduction aux « courbes coniques » (le plus souvent simplement appelées coniques) du plan.

Le sujet de la géométrie plane est sans doute l'un des plus vieux sujets d'études des mathématiques, puisqu'il est présent dès l'invention de la discipline en Grèce classique (les plus vieux théorèmes, au sens d'« énoncé mathématique rigoureusement démontré » sont ceux portant les noms de Thalès et Pythagore)—et même, sous des formes plus empiriques, dans la plupart des cultures antiques (en particulier le « théorème de Pythagore » était connu au moins des Babyloniens et des Egyptiens, voir [vdW]). En effet, même une activité aussi fondamentale que l'agriculture est grandement aidée par une connaissance au moins intuitive de la géométrie plane (pour le tracé des champs, des canaux d'irrigation...et le calcul d'aires). Et il n'est pas possible d'imaginer une architecture avancée (que ce soit celle qui ait mené aux jardins suspendus de Babylone, aux tombeaux et temples égyptiens ou au Parthénon) sans une connaissance au moins empirique des principes fondamentaux de la géométrie. En-dehors de ses applications fondamentales, le sujet a aussi un intérêt intrinsèque comme source de problèmes « récréatifs » (par exemples dans le concours international des Olympiades) et de figures intrigantes (souvent utilisées en architecture ou en design). Les figures de géométrie euclidienne se retrouvent souvent dans la nature (comme abondamment illustré dans le livre [Wy] d'Hermann Weyl). Enfin, on peut le considérer comme le précurseur de plusieurs domaines des mathématiques pures de recherche très actifs aujourd'hui. On ne mentionnera pas ces derniers dans ce cours, mais le lecteur curieux est invité à consulter les références [St],[Co] et le chapitre 19 dans [Be].

On utilisera l'approche « moderne » à la géométrie euclidienne, dans la continuité du cours du premier semestre [Sem1]. Dans ce dernier on a étudié les espaces vectoriels, mais l'objet fondamental en géométrie classique est le point plutôt que le vecteur. Au contraire de l'approche intuitive mise en œuvre dans les cours de second cycle, l'approche rigoureuse utilise les espaces vectoriels pour définir les **espaces affines** (qui sont les espaces dont les éléments représentent les points). Au premier semestre on a également introduit les espaces vectoriels euclidiens. En combinant cette notion avec celle d'espace affine on obtient la catégorie des **espaces affines euclidiens** : l'étude de ces derniers fait apparaître de nombreux phénomènes nouveaux à la fois par rapport aux espaces affines « nus » (dans lesquels on ne peut pas parler de notions liées à la distance, ou métriques) et aux espaces vectoriels euclidiens (dans lesquels l'origine est fixée par les isométries). Le premier chapitre est une étude générale de ces espaces affines euclidiens : on rappelle brièvement les notions vues au premier semestre avant de définir ces derniers. La majeure partie de cette section du cours

traite alors de la description des isométries affines de ces espaces, qui sont les transformations affines conservant la structure métrique. La partie se finit par une brève introduction à la théorie des corps convexes ; la lectrice désireuse d'avoir un aperçu plus complet de cette très belle théorie est invitée à consulter [Be, chapitres 11 et 12] ou le livre (plus avancé) [Si].

Le second chapitre traite de la **géométrie euclidienne plane**, autrement dit l'étude des espaces affines euclidiens de dimension deux. On commence par compléter dans ce cadre plus facile l'étude des isométries de ces espaces. On fait ensuite une liste des propriétés métriques les plus connues des « figures » classiques de la géométrie plane, principalement les polygones. L'étude des groupes de symétrie de ces derniers fait se rejoindre les deux thèmes ci-dessus ; on finit par ailleurs le chapitre par une étude (malheureusement assez partielle) des « groupes de pavés » ou « groupes crystallographiques plans ». Le troisième chapitre embrasse sur la **géométrie de l'espace euclidien de dimension trois** (souvent appelée simplement « géométrie dans l'espace »). Dans ce cadre le groupe des isométries est beaucoup plus riche, et par conséquent notre étude est forcément moins exhaustive qu'en dimension deux. De même l'ensemble des « figures » classiques fait intervenir des objets à la structure (relativement à ce qu'on observe en dimension 2) complexe, les polyèdres. La classification des polyèdres dits « réguliers » sur laquelle culmine ce chapitre est l'un des joyaux des mathématiques grecques, et l'intérêt esthétique, intellectuel voire mystique que ces derniers ont suscités dans les cultures qui ont hérité du bagage intellectuel grec est considérable.

Le dernier chapitre est entièrement consacré aux **courbes coniques**. Il contient des mathématiques légèrement décalées par rapport aux précédents, mais reste dans la ligne de l'étude de la géométrie classique puisque ces courbes remarquables ont été étudiées (et nommées) par Apollonius de Perge. Elles sont demeurées un centre d'intérêt jusqu'à l'époque moderne, et restent un des exemples les plus frappants du fait que des mathématiques « pures » peuvent se révéler liées à des phénomènes concrets puisqu'elles décrivent approximativement les mouvements des corps célestes (suivant la théorie de Newton).

Un dernier thème classique de géométrie euclidienne, qui ne sera pas traité dans ce cours, est celui des « constructions à la règle et au compas ». Pour une référence utile sur le sujet on recommande le chapitre IV du livre [Au] de Michèle Audin. Ce livre et celui de Marcel Berger ont servi de base à ce cours, et le lecteur curieux est invité à les parcourir (ils contiennent aussi de nombreux exercices et problèmes). Un livre plus récent, plus éclectique que celui d'Audin et plus rigoureux que celui de Berger, est [Bo].

Bibliographie

- [Au] Michèle Audin, *Géométrie*, EDP Sciences.
- [Be] Marcel Berger, *Géométrie I et II*, Nathan.
- [Bo] Pascal Boyer, *Algèbre et géométries*, Calvage et Mounet. <http://www.math.univ-paris13.fr/~boyer/calvage.html>
- [Co] Harold Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley.
- [Sem1] François Costantino, *Géométrie I*. <http://www.math.univ-toulouse.fr/~fcostant/NotesDuCoursDeGeometrie.pdf>
- [Si] Carl Ludwig Siegel, *Lectures on the geometry of numbers*, Springer.
- [St] John Stillwell, *The four pillars of geometry*, Springer.
- [vdW] Bartel van der Waerden, *Geometry in ancient civilizations*, Springer.
- [Wy] Hermann Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press.

Table des matières

I	Géométrie affine	5
I.1	Espaces affines réels	5
I.2	Barycentres et convexité	15
I.3	Espaces affines euclidiens	20
I.4	Feuilles d'exercices	24
II	Géométrie plane	34
II.1	*Rappels de trigonométrie	34
II.2	Isométries du plan euclidien	35
II.3	Modèle complexe du plan euclidien	40
II.4	Angles	41
II.5	Triangles	43
II.6	Aire	49
II.7	Similitudes	51
II.8	Polygones convexes et groupes diédraux	54
II.9	*Groupes de pavage	58
II.10	Feuilles d'exercices	60
III	Géométrie dans l'espace	67
III.1	Isométries	67
III.2	Angles dans l'espace	69
III.3	Polyèdres convexes	71
III.4	Feuilles d'exercices	77

Chapitre I

Géométrie affine

I.1 Espaces affines réels

I.1.1 Définition, premières propriétés

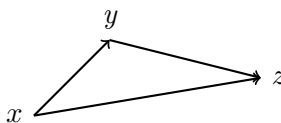
Définition I.1 Soit E est un espace vectoriel réel. Un espace affine de direction E est un ensemble \mathcal{E} muni d'une application

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E, (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$$

vérifiant les axiomes suivants :

(Relation de Chasles) Pour tous $x, y, z \in \mathcal{E}$ on a

$$\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}. \quad (\text{I.1.1})$$



(Bijectivité) Pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$ l'application $\mathcal{E} \rightarrow E$ définie par $x \mapsto \overrightarrow{x_0x}$ est une bijection.

Remarques :

- Si \mathcal{E} est un espace affine de direction E on dira aussi que E est l'espace directeur de \mathcal{E} .
- Dans ces notes on utilisera systématiquement la convention de désigner par la lettre droite (exemple E, F) correspondante l'espace directeur d'un espace affine lui-même désigné par une lettre scripte (dans l'exemple précédent \mathcal{E}, \mathcal{F}). Dans la suite on ne considèrera que des espaces directeurs de dimension finie.
- Si $x \in \mathcal{E}$ et $\vec{v} \in E$ on note $x + \vec{v} = y$ où y est l'unique point de \mathcal{E} tel que $\overrightarrow{xy} = \vec{v}$ (qui existe par la seconde propriété demandée dans la définition).
- On peut donner une définition équivalente en utilisant une opération $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$ (correspondant à $(x, \vec{v}) \mapsto x + \vec{v}$) et des axiomes appropriés, voir l'exercice 2.

Exemples

1. Le premier exemple est $\mathcal{E} = \mathbb{R}^d$, qui est un espace affine de direction $E = \mathbb{R}^d$ via l'application

$$((x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d)) \mapsto (y_1 - x_1, \dots, y_d - x_d).$$

2. Plus généralement, soit E est un espace vectoriel réel ; montrer que l'application $E \times E \rightarrow E$ définie par $(v, w) \mapsto w - v$ munit E d'une structure d'espace affine de direction E .
3. Soient $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ non tous nuls et $b \in \mathbb{R}$. Alors le sous-ensemble :

$$\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1 x_1 + \dots + a_d x_d = b\}$$

est un espace affine de direction le sous-espace vectoriel

$$\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1 x_1 + \dots + a_d x_d = 0\}$$

via la même application qu'à l'exemple (1).

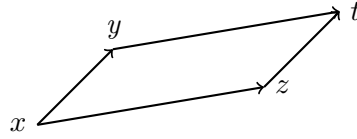
4. On peut généraliser l'exemple précédent comme suit. Soient E, E' des espaces vectoriels réels, ϕ une application linéaire de E vers E' et $v \in E'$. Par restriction de l'exemple (2) on munit le sous-ensemble $\phi^{-1}(\{v\}) \subset E$ d'une structure d'espace affine de direction $\ker(\phi)$.

Propriétés fondamentales

On rassemble dans la proposition suivante quelques-unes des propriétés fondamentales utilisées pour calculer dans les espaces affines, que l'on utilisera sans justification dans la suite.

Proposition I.1 Soient $x, y \in \mathcal{E}$.

- On a $x = y$ dans \mathcal{E} si et seulement si $\vec{xy} = 0$ dans E .
- On a $\vec{yx} = -\vec{xy}$.
- (Egalité du parallélogramme) Soient $z, t \in \mathcal{E}$. On a $\vec{xy} = \vec{zt}$ si et seulement si $\vec{xz} = \vec{yt}$.



Démonstration : La relation de Chasles (I.1.1) implique immédiatement que pour tout $x \in \mathcal{E}$ on a $\vec{xx} = 0$ (en l'appliquant avec $x = y = z$ on obtient en effet $2\vec{xx} = \vec{xx}$). Réciproquement, si $\vec{xy} = 0$ alors par la propriété d'injectivité de l'application $z \mapsto \vec{xz}$ on obtient que x est l'unique préimage du vecteur nul.

L'égalité $\vec{yx} = -\vec{xy}$ suit du calcul suivant :

$$0 = \vec{xx} = \vec{xy} + \vec{yx}$$

où la première égalité suit de la relation de Chasles.

Enfin, pour démontrer l'égalité du parallélogramme il suffit de voir que $\vec{xy} = \vec{zt}$ implique que $\vec{xz} = \vec{yt}$ (on peut en effet échanger les rôles de x, z et y, t).

Pour ceci il suffit d'écrire :

$$\vec{xy} = \vec{xz} + \vec{zy} \text{ et } \vec{zt} = \vec{zy} + \vec{yt}$$

d'où il suit que $\vec{xz} + \vec{zy} = \vec{zy} + \vec{yt}$ puis que $\vec{xz} = \vec{yt}$. □

Dimension et coordonnées

Définition I.2 La dimension $\dim(\mathcal{E})$ de \mathcal{E} est par définition égale à celle de E . Un repère affine de \mathcal{E} est une paire (x, B) où $x \in \mathcal{E}$ et B est une base de E . Les coordonnées affines d'un point $y \in \mathcal{E}$ dans le repère (x, B) sont les coordonnées du vecteur \overrightarrow{xy} dans la base B .

Exemples

- Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}^d$, B est la base canonique de \mathbb{R}^d et $x_0 = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ les coordonnées d'un point $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans le repère (x_0, B) de \mathcal{E} sont $(y_1 - x_1, \dots, y_d - x_d)$.
- Si $\mathcal{E} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\}$, $x_0 = (0, 1)$ et $B = ((1, -1))$ les coordonnées de $(y_1, y_2) \in \mathcal{E}$ dans (x_0, B) sont (y_1) . Dans le repère (x'_0, B') où $x'_0 = (1, 0)$ et $B' = ((-1, 1))$ ses coordonnées sont (y_2) .

I.1.2 Sous-espaces affines, systèmes d'équations affines

L'exemple (4) ci-dessus ci-dessus mène à la notion plus abstraite de sous-espace affine d'un espace affine, analogue dans le cadre affine de celle de sous-espace vectoriel.

Définition I.3 Soit \mathcal{E} un espace affine dirigé par un espace vectoriel E . Un sous-ensemble \mathcal{F} de \mathcal{E} est un sous-espace affine de \mathcal{E} si pour tout $x \in \mathcal{F}$, le sous-ensemble F_x de E défini par

$$F_x = \{\overrightarrow{xy} : y \in \mathcal{F}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

Remarques :

- Pour montrer que \mathcal{F} est un sous-espace affine il suffit de montrer l'existence d'un $x \in \mathcal{F}$ tel que F_x soit un sous-espace vectoriel.
- Par contre, la seule propriété que

$$\{\overrightarrow{xy} : x \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{F}\}$$

soit un sous-espace vectoriel ne suffit pas pour que \mathcal{F} soit un sous-espace affine.

I.1.3 Exemples

1. Dans les exemples (2) et (4) ci-dessus $\mathcal{F} = \phi^{-1}(\{v\})$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} .
2. Si $x, y \in \mathcal{E}$ alors le sous-ensemble $\{x + \lambda \overrightarrow{xy} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} (si $x \neq y$ il est de dimension 1 : on l'appelle droite passant par x et y et on la notera (xy)).

Intersection de sous-espaces affines

Proposition I.2 Soit \mathcal{E} un espace affine et $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux sous-espaces affines de \mathcal{E} . Si l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est non-vide alors c'est un sous-espace affine de \mathcal{E} .

Démonstration : On suppose que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$. Soit $x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$, soient

$$F = \{\overrightarrow{xy} : y \in \mathcal{F}\}, \quad F' = \{\overrightarrow{xz} : z \in \mathcal{F}'\}$$

et $F'' = F \cap F'$. Comme F, F' sont des sous-espaces vectoriels il suit que F'' est lui-même un sous-espace vectoriel de E .

D'autre part on a :

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \{y : \overrightarrow{xy} \in F, \overrightarrow{xy} \in F'\} = \{y : \overrightarrow{xy} \in F \cap F'\}$$

et il suit donc que

$$\{\overrightarrow{xy} : y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}'\} = F''$$

est un sous-espace vectoriel de E , c'est-à-dire (par l'exercice 5, question b) que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} . \square

Sous-espaces affines engendrés par une partie

Définition I.4 Si $S \neq \emptyset$ est un sous-ensemble d'un espace affine \mathcal{E} il existe donc un plus petit sous-espace affine de \mathcal{E} contenant S (l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant S) : on appellera ce dernier le sous-espace affine engendré par S .

Exemples :

1. Si $x \neq y \in \mathcal{E}$ alors le sous-espace affine de \mathcal{E} engendré par $\{x, y\}$ est la droite passant par x et y .
2. Plus généralement, si $x \in S$ on peut écrire le sous-espace affine \mathcal{F} engendré par S sous la forme suivante :

$$\mathcal{F} = \{x + \lambda_1 \overrightarrow{xy_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{xy_n} : n \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_n \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}.$$

En pratique il y a deux façons de décrire les sous-espaces affines, implicite (par équations) et explicite (par paramétrisation) :

- Si l'espace affine ambiant est muni d'un repère, les sous-espaces affines sont les espaces de solutions aux équations affines $Ay = b$ où y (l'inconnue) représente les coordonnées dans ce repère (sous forme d'un vecteur colonne), A est une matrice et b un vecteur colonne (tous deux fixés et de tailles convenables) ;
- Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E et $x \in \mathcal{E}$ alors $x + F$ est un sous-espace affine.

Il est important de savoir passer de l'une à l'autre de ces descriptions pour un sous-espace affine donné.

On a la formule suivante pour la dimension du sous-espace affine \mathcal{F}'' engendré par deux sous-espaces $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ (voir l'exercice 5) :

- Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ alors

$$\dim(\mathcal{F}'') = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{F}') - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}').$$

- Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \emptyset$ alors

$$\dim(\mathcal{F}'') = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{F}') + 1 - \dim(F \cap F').$$

Finalement, on rappelle que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ de \mathcal{E} sont dit parallèles si l'un des deux inclusions $F \subset F'$ ou $F' \subset F$ est vérifiée.

I.1.4 Applications affines

Définition I.5 Soit \mathcal{E}, \mathcal{F} des espaces affines. Une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{F} si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{E}$ l'application $\phi : E \rightarrow F$ définie par

$$\phi(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{f(x)f(y)} \quad (\text{I.1.2})$$

est une application linéaire de E vers F . On appelle alors ϕ la partie linéaire de f .

Il suffit, pour démontrer qu'une application f comme ci-dessus est affine, de vérifier la propriété (I.1.2) pour un seul point $x_0 \in \mathcal{E}$. Démontrons-le : si x est un point quelconque de \mathcal{E} on a alors pour tout $y \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(x)f(y)} &= \overrightarrow{f(x)f(x_0)} + \overrightarrow{f(x_0)f(y)} = \phi(\overrightarrow{xx_0}) + \phi(\overrightarrow{x_0y}) \\ &= \phi(\overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0y}) = \phi(\overrightarrow{xy}). \end{aligned}$$

De manière plus explicite, f est une application affine si et seulement s'il existe une application linéaire $\phi : E \rightarrow F$ et un point $x \in \mathcal{E}$ tels que pour tout $x' \in \mathcal{E}$ on ait :

$$f(x') = f(x) + \phi(\overrightarrow{xx'}). \quad (\text{I.1.3})$$

Le critère suivant est un outil important lorsque l'on calcule avec des applications affines.

Proposition I.3 Si f, g sont des applications affines de \mathcal{E} vers \mathcal{F} , de parties linéaires respectives ϕ, γ , alors elles sont égales entre elles si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- on a $\phi = \gamma$;
- il existe $x \in \mathcal{E}$ tel que $f(x) = g(x)$.

Démonstration : Soit f satisfaisant aux deux conditions ci-dessus, on veut montrer que $f(x) = f(y)$ pour tout $y \in \mathcal{E}$ (ce qui permet de conclure que le sens réciproque de l'énoncé est vrai). On a :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \overrightarrow{f(x)f(y)} \\ &= f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy}) \\ &= g(x) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{xy}) = g(y) \end{aligned}$$

(l'égalité de la deuxième ligne suit de la définition (I.1.2) d'une application affine, la première inégalité à la deuxième ligne suit des hypothèses sur f et g , et la dernière égalité est encore une conséquence de (I.1.2)).

Le sens direct est une tautologie. □

Si l'on a fixé des origines x_0, y_0 pour les espaces affines \mathcal{E} et \mathcal{F} on peut écrire une application affine de \mathcal{E} vers \mathcal{F} sous la forme $f = \phi + \overrightarrow{w}$ où ϕ est une application linéaire $E \rightarrow F$ et $\overrightarrow{w} \in F$. Cette écriture signifie que

$$f(x_0 + \overrightarrow{v}) = y_0 + \overrightarrow{w} + \phi(\overrightarrow{v}).$$

Autrement dit ϕ, \overrightarrow{w} sont déterminés par $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{y_0 f(x_0)}$ et $\phi = \overrightarrow{f}$. Si on change les origines de \mathcal{E}, \mathcal{F} de x_0 en x'_0 et y_0 en y'_0 respectivement on obtient la nouvelle écriture $f = \phi + \overrightarrow{w}'$ où $\overrightarrow{w}' = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{y'_0 y_0} + \phi(\overrightarrow{x_0 x'_0})$.

Propriétés de base

Proposition I.4 Soient $\mathcal{E}_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{f_2} \mathcal{E}_3$ des applications affines.

- L'application $f_2 \circ f_1$ est affine, de partie linéaire $\phi_2 \circ \phi_1$ (où ϕ_1, ϕ_2 sont les parties linéaires respectives de f_1, f_2).
- Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}_1$ est un sous-espace affine alors $f_1(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{E}_2$ est un sous-espace affine de direction $\phi_1(F_1)$.
- Si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{E}_2$ est un sous-espace affine alors la préimage $f_1^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{E}_1$ est soit vide, soit un sous-espace affine, de direction $\phi_1^{-1}(F_2)$.

Démonstration : Soient $x, y \in \mathcal{E}_1$. On note $p = f_2 \circ f_1(x), q = f_2 \circ f_1(y)$, on a :

$$\overrightarrow{pq} = \phi_2(\overrightarrow{f_1(x)f_1(y)}) = \phi_2 \circ \phi_1(\overrightarrow{xy}).$$

L'application $\gamma = \phi_2 \circ \phi_1$ est linéaire de E_1 dans E_2 , de sorte que $f_2 \circ f_1$ est affine de partie linéaire γ .

On fixe $x \in \mathcal{F}_1$ et on note $p = f_1(x)$. Pour démontrer l'énoncé il faut prouver que l'application

$$q \in f_1(\mathcal{F}_1) \mapsto \overrightarrow{pq} \in E_2$$

est une injection d'image $F_2 = \phi_1(F_1)$. Tout d'abord l'image est bien contenue dans F_2 : en effet, si $q = f_1(y)$ on a $\overrightarrow{pq} = \phi_1(\overrightarrow{xy}) \in F_2$. L'application est bien surjective vu que si $\overrightarrow{w} = \phi_1(\overrightarrow{v}) \in F_2$ on a en posant $q = f_1(x + \overrightarrow{v})$ l'égalité

$$\overrightarrow{pq} = \phi_1(\overrightarrow{x(x + \overrightarrow{v})}) = \phi_1(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}.$$

Enfin, l'application est injective puisque c'est la restriction d'une application injective.

La démonstration de la troisième partie est similaire à celle ci-dessus et laissée au lecteur. \square

Proposition I.5 Soient $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ une application affine et $\phi : E \rightarrow F$ sa partie linéaire. L'application f est injective, surjective ou bijective si et seulement si ϕ a la propriété correspondante.

Démonstration : Il suffit évidemment de démontrer l'énoncé pour l'injectivité et la surjectivité.

Supposons que f soit injective et qu'il existe $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E$ tels que $\phi(\overrightarrow{v}) = \phi(\overrightarrow{w})$. Soit $x \in \mathcal{E}$, on pose $y = x + \overrightarrow{v}, z = x + \overrightarrow{w}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(y)f(z)} &= \phi(\overrightarrow{yz}) = \phi(\overrightarrow{yx} + \overrightarrow{xz}) \\ &= \phi(-\overrightarrow{v}) + \phi(\overrightarrow{w}) = 0. \end{aligned}$$

Il suit que $f(y) = f(z)$, donc que $y = z$ puisque f est injective. On a au final $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$, ce qui démontre que ϕ est injective.

Réciproquement, supposons que ϕ est injective. Soient $x, y \in \mathcal{E}$ tels que $f(x) = f(y)$. Il vient :

$$\phi(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{f(x)f(y)} = 0$$

d'où il suit que $\overrightarrow{xy} = 0$ et donc que $x = y$. Ceci prouve que f est injective.

L'équivalence pour la surjectivité se démontre également aisément : si f est surjective et $\vec{w} \in F$ on choisit $p, q \in \mathcal{F}$ tels que $\vec{pq} = \vec{w}$; si $x, y \in \mathcal{E}$ sont des préimages de p, q et $v = \vec{xy}$ il vient $\phi(\vec{v}) = \vec{w}$. Réciproquement, si ϕ est surjective et $q \in \mathcal{F}$, on choisit $x \in \mathcal{E}$ et on pose $p = f(x)$, $\vec{w} = \vec{pq}$. Si \vec{v} est une préimage de \vec{w} il vient alors $f(x + \vec{v}) = q$. \square

*Classification des espaces affines

De la même manière qu'un espace vectoriel réel de dimension (finie) d est linéairement isomorphe à \mathbb{R}^d via le choix d'une base, un espace affine de dimension d est isomorphe à \mathbb{R}^d via le choix d'un repère. On peut exprimer ce fait par l'énoncé suivant, dont la preuve est un corollaire immédiat du résultat vectoriel correspondant.

Théorème I.1 *Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $d \in \mathbb{N}$. Si \mathcal{R} est un repère de \mathcal{E} alors l'application $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui à un point associe ses coordonnées dans \mathcal{R} est un isomorphisme affine.*

En particulier deux espaces affines de même dimension sont affinement isomorphes.

I.1.5 Homothéties et translations

Dans cette section \mathcal{E} est un espace affine de direction E .

Translations

La translation de vecteur \vec{v} est l'application $t_{\vec{v}}$ de \mathcal{E} dans lui-même définie par :

$$t_{\vec{v}}(x) = x + \vec{v}.$$

Il est trivial de vérifier que $t_{\vec{v}}$ est une application affine, dont la partie linéaire est l'identité Id de E .

Homothéties

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0, 1$ et $x \in \mathcal{E}$. L'homothétie de centre x et de rapport λ est l'application h définie comme suit :

$$h(y) = x + \lambda \vec{xy}.$$

C'est une application affine de partie linéaire λId .

Les homothéties et translations sont caractérisées par leur partie linéaire.

Proposition I.6 *Soit f une application affine d'un espace \mathcal{E} dans lui-même et ϕ sa partie linéaire. L'application f est une translation (respectivement une homothétie de rapport $\lambda \neq 0, 1$) si et seulement si $\phi = \text{Id}$ (respectivement $\phi = \lambda \text{Id}$).*

Démonstration : On fixe un point $x_0 \in \mathcal{E}$. Supposons que $\phi = \text{Id}$ et soit $\vec{v} = \vec{x_0 f(x_0)}$. Alors $f = t_{\vec{v}}$: en effet ces deux applications affines ont la même partie linéaire et on a $t_{\vec{v}}(x_0) = x_0 + \vec{x_0 f(x_0)} = f(x_0)$.

On suppose maintenant que $\phi = \lambda \text{Id}$ pour un $\lambda \neq 1$. On pose :

$$x = x_0 + \frac{1}{1-\lambda} \vec{x_0 f(x_0)}.$$

Alors on a $f(x) = x$ d'après le calcul suivant :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \phi(\overrightarrow{x_0x}) = f(x_0) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \overrightarrow{x_0f(x_0)} \\ &= f(x_0) - \overrightarrow{x_0f(x_0)} + \frac{\lambda + (1-\lambda)}{1-\lambda} = x_0 + \frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{x_0f(x_0)} = x. \end{aligned}$$

Il suit que f a la même partie linéaire et un point fixe en commun avec l'homothétie de centre x et de rapport λ et lui est donc égale. \square

En pratique on utilise la preuve ci-dessus pour calculer le point fixe d'une homothétie donnée. On remarque que ce point fixe est unique : en effet, si f est une homothétie de centre x et $f(x') = x'$ alors on a $\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{f(x)f(x')} = \lambda \overrightarrow{xx'}$ donc $\overrightarrow{xx'} = 0$ et $x = x'$.

Applications à la géométrie plane

Ici \mathcal{E} est un plan affine, c'est-à-dire un espace affine de dimension 2. On dit que des droites de \mathcal{E} sont concourantes si leur intersection est non vide (il est facile de voir que deux droites sont concourantes si et seulement si elles ne sont pas parallèles ; pour trois droites ou plus être concourantes est plus rare).

On peut utiliser les homothéties pour démontrer deux théorèmes classiques de géométrie plane : le théorème de Thalès et celui de Desargues.

Théorème I.2 Soient $x, y_1, y_2 \in \mathcal{E}$ formant une base affine de \mathcal{E} . Soient $z_i \in (xy_i)$, $i = 1, 2$ chacun distinct de x . Les droites (y_1y_2) et (z_1z_2) sont parallèles si et seulement s'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{xz_1} = \lambda \overrightarrow{xy_1}, \quad \overrightarrow{xz_2} = \lambda \overrightarrow{xy_2}, \quad \overrightarrow{z_1z_2} = \lambda \overrightarrow{y_1y_2}. \quad (\text{I.1.4})$$

Démonstration : Le sens réciproque est une trivialité si l'on sait que $\overrightarrow{z_1z_2} = \lambda \overrightarrow{y_1y_2}$: en effet, dans ce cas la droite $(z_1z_2) = z_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{z_1z_2} = z_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{xy_2}$ est parallèle à $(y_1y_2) = y_1 + \mathbb{R}\overrightarrow{y_1y_2}$. La relation de Chasles montre qu'il suffit en fait de demander que $\overrightarrow{xz_1} = \lambda \overrightarrow{xy_1}$ et $\overrightarrow{xz_2} = \lambda \overrightarrow{xy_2}$ pour arriver à cette conclusion : en effet, on a alors $\overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{z_1x} - \overrightarrow{z_2x} = \lambda(\overrightarrow{y_1x} - \overrightarrow{y_2x}) = \lambda \overrightarrow{y_1y_2}$.

Réciproquement, supposons que les droites (z_1z_2) et (y_1y_2) sont parallèles l'une à l'autre. Comme $z_1 \in (xy_1)$ il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{xz_1} = \lambda \overrightarrow{xy_1}$. Soit h l'homothétie de centre x et de rapport λ et soit $\mathcal{D} = h((y_1y_2))$.

On a $\mathcal{D} = (z_1z_2)$: en effet ces deux droites ont le point z_1 en commun (vu que $z_1 = h(y_1)$) et ont la même direction (elles sont toutes deux parallèles à (y_1y_2)). Il suit que $z_2 = h(y_2)$: en effet on a $\{y_2\} = (xy_2) \cap (y_1y_2)$, d'où il suit $h(y_2) = (xy_2) \cap \mathcal{D}$, et o, a vu que cette dernière intersection vaut $\{z_2\}$. Finalement, on conclut que :

$$\overrightarrow{xz_2} = \overrightarrow{h(x)h(y_2)} = \lambda \overrightarrow{xy_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{h(y_1)h(y_2)} = \lambda \overrightarrow{y_1y_2}$$

ce qui termine la preuve du théorème. \square

Théorème I.3 Soient $x, y, z, x', y', z' \in \mathcal{E}$ tels que les triplets (x, y, z) et (x', y', z') soient des bases affines de \mathcal{E} . On suppose que les droites (xy) et $(x'y')$ (respectivement (yz) et $(y'z')$, (zx) et $(z'x')$) sont parallèles. Alors les droites (xx') , (yy') et (zz') sont concourantes ou deux à deux parallèles.

Démonstration : On suppose que l'on n'est pas dans le cas où (xx') , (yy') et (zz') sont deux à deux parallèles : il faut alors montrer qu'elles sont concourantes. On peut supposer, quitte à renommer les points, que (xy) n'est pas parallèle à $(x'y')$, ces deux droites s'intersectent alors en un point que l'on note p .

Soit h l'homothétie de centre p telle que $h(x) = x'$ (qui existe car p, x, x' sont alignés). Comme (xy) est parallèle à $(x'y')$ il suit du théorème de Thalès que l'on a aussi $h(y) = y'$. Enfin, on a $h((xz)) = (x'z')$ vu que ce sont deux droites parallèles passant par un même point x' , et de même $h((yz)) = (y'z')$. Il suit de ces deux égalités que $h(z) = h(z')$, ce qui implique en particulier que p, z et z' sont alignés. On a donc $p \in (zz')$, c'est-à-dire que les droites (xx') , (yy') et (zz') sont concourantes. \square

I.1.6 Points fixes des applications affines

La proposition suivante donne des critères suffisants pour l'existence de points fixes pour les applications affines.

Proposition I.7 *Soit f un endomorphisme affine de \mathcal{E} et soit ϕ une application affine de partie linéaire ϕ .*

- (i) *Si $\ker(\phi - \text{Id}) = \{0\}$ alors f a un unique point fixe dans \mathcal{E} .*
- (ii) *Supposons maintenant ϕ diagonalisable sur \mathbb{C} . Soient $x_0 \in \mathcal{E}$, $\vec{v} = \overrightarrow{x_0 f(x_0)}$, $F = \ker(\phi - \text{Id})$ et $F' = \text{Im}(\phi - \text{Id})$. Alors on a $E = F + F'$ et $F \cap F' = \{0\}$, et f a un point fixe $x \in \mathcal{E}$ si et seulement si la projection de \vec{v} sur F parallèlement à F' est nulle. L'ensemble des points fixes de f est alors exactement le sous-espace affine $x + \ker(\phi - \text{Id})$.*

Démonstration : On choisit $x_0 \in \mathcal{E}$ et on pose $\vec{v} = \overrightarrow{x_0 f(x_0)}$. On suppose que l'on a $\ker(\phi - \text{Id}) = \{0\}$, alors comme E est de dimension finie l'application linéaire $\phi - \text{Id}$ est bijective de E dans E ; en particulier il existe un $\vec{u} \in E$ tel que $(\phi - \text{Id})(\vec{u}) = -\vec{v}$. On pose $x = x_0 + \vec{u}$; il vient

$$f(x) = x_0 + \vec{v} + \phi(\vec{u}) = x_0 + \vec{v} + \vec{u} - \vec{v} = x_0 + \vec{u} = x$$

donc x est un point fixe de f . Si $x' \in \mathcal{E}$ on a alors :

$$f(x') = f(x) + \phi(\overrightarrow{xx'}) = x + \phi(\overrightarrow{xx'})$$

et on a donc $f(x') = x'$ si et seulement si $\phi(\overrightarrow{xx'}) = \overrightarrow{xx'}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{xx'} \in \ker(\phi - \text{Id})$. Il suit que $\overrightarrow{xx'} = 0$, ce qui montre que x est le seul point fixe de f et finit de démontrer le point (i) de la proposition.

Démontrons maintenant le point (ii). Le fait que F et F' soient en somme directe suit du fait que ϕ est diagonalisable sur \mathbb{C} , d'après la théorie de la réduction. L'hypothèse $\pi(\vec{v}) = 0$ signifie que $\vec{v} \in F'$; il suit qu'il existe un \vec{w} tel que $\vec{v} = \phi(\vec{w}) - \vec{w}$. Le même calcul que ci-dessus montre alors que le point $x = x_0 + \vec{v}$ est un point fixe de f . Comme ceci est valide pour tout tel \vec{w} on obtient en fait que f fixe point à point le sous-espace affine $x + \ker(\phi - \text{Id})$.

Montrons enfin que $x' \in \mathcal{E}$ est un point fixe de f si et seulement si $\overrightarrow{xx'} \in \ker(\phi - \text{Id})$, ce qui terminera la démonstration du point (ii). On a : $f(x') = x + \phi(\overrightarrow{xx'})$ donc $f(x') = x'$ si et seulement si $\phi(\overrightarrow{xx'}) = \overrightarrow{xx'}$, ce que l'on voulait démontrer. \square

*Plus sur les points fixes

On va énoncer ici un critère nécessaire et suffisant pour qu'une application affine ait un point fixe. Rappelons que si ϕ est un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E de dimension finie et $\lambda \in \mathbb{R}$ l'espace caractéristique V_λ de ϕ associé à λ est par définition

$$V_\lambda = \bigcup_{k \geq 1} \ker((\phi - \lambda \text{Id})^k)$$

(noter que c'est un espace vectoriel puisque pour $k \in \mathbb{N}$ on a $\ker((\phi - \lambda \text{Id})^k) \subset \ker((\phi - \lambda \text{Id})^{k+1})$). Si λ est une valeur propre réelle de ϕ l'espace caractéristique V_λ est non-nul et admet un unique supplémentaire dans E qui soit stable par ϕ (ceci suit du théorème de Cayley–Hamilton et du lemme des noyaux).

Proposition I.8 *Soit $f = \phi + v$ un endomorphisme affine de \mathcal{E} et V_1 l'espace caractéristique de ϕ pour la valeur propre 1; soit encore F le supplémentaire ϕ -stable de V_1 dans E et π la projection sur V_1 parallèlement à F .*

- Si $V_1 = \ker(\phi - \text{Id})$ alors f a un point fixe si et seulement si $\pi(v) = 0$.
- Si l'inclusion $\ker(\phi - \text{Id}) \subset V_1$ est stricte alors f a un point fixe si et seulement si $\pi(v) \in \ker(\phi - \text{Id}) \cap \text{im}(\phi - \text{Id})$

Démonstration : En suivant la preuve de la proposition I.7 on se ramène au cas d'une application $f = \phi + \vec{v}$ telle que la partie linéaire ϕ ait 1 pour seule valeur propre. \square

En pratique on utilise la réduction de Jordan pour vérifier l'hypothèse.

I.1.7 *Compléments sur les applications affines

*Groupe affine

Proposition I.9 *Soit \mathcal{E} un espace affine. L'ensemble des bijections affines de \mathcal{E} est un sous-groupe du groupe des bijections de \mathcal{E} .*

Démonstration : Il existe au moins une bijection affine de \mathcal{E} (l'identité). La composée de deux bijections affines est encore affine d'après la proposition I.4. Enfin, si f est une application affine bijective alors sa partie linéaire ϕ est une application linéaire bijective donc inversible (d'après la proposition I.5). Soit f^{-1} l'application inverse de f : alors f^{-1} est affine de partie linéaire ϕ^{-1} . En effet, soient $x, y \in \mathcal{E}$. On a $\overrightarrow{xy} = \phi(\overrightarrow{f^{-1}(x)f^{-1}(y)})$ vu que f est affine de partie linéaire ϕ . En appliquant ϕ^{-1} aux deux côtés de cette égalité il suit que $\overrightarrow{\phi^{-1}(xy)} = \overrightarrow{f^{-1}(x)f^{-1}(y)}$. \square

*Matrices des applications affines

Si f est une application affine entre deux espaces affines \mathcal{E} et \mathcal{F} , et si $\mathcal{R} = (x, B)$ et $\mathcal{S} = (y, C)$ sont des repères de \mathcal{E} et \mathcal{F} respectivement, alors la matrice de f dans les repères donnés est par définition :

$$\text{Mat}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_B^C(\phi) & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où v est la matrice colonne contenant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{yf(x)}$ dans la base C . Ces matrices vérifient les propriétés suivantes :

- L'application $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{S}}(f)$ est injective.
- On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(f) \circ \text{Mat}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{S}}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{S}}(f \circ g).$$

- Si f est inversible alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{R}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{S}}(f)^{-1}.$$

On a enfin la formule suivant pour les changements de repère : si $\mathcal{R} = (x, B)$ et $\mathcal{R}' = (x', B')$ sont deux repères de \mathcal{E} , P la matrice inverse de la matrice des coordonnées des vecteurs de B' dans B et v le vecteur colonne des coordonnées de $\overrightarrow{xx'}$ dans B' alors on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{S}}(f) = \begin{pmatrix} P^{-1} & -Pv \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{R}}(f) \cdot \begin{pmatrix} P & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I.2 Barycentres et convexité

I.2.1 Barycentres

Proposition I.10 Si $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}$ sont des points deux à deux distincts et $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sum_i t_i \neq 0$ il existe un unique $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que l'on ait :

$$\sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{x_0 x_i} = 0. \quad (\text{I.2.1})$$

De plus, si $\sum_i t_i = 1$ on a

$$\sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{xx_i} = \overrightarrow{xx_0} \quad (\text{I.2.2})$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$.

Démonstration : On suppose dans toute cette preuve que $\sum_i t_i = 1$: si ce n'est pas le cas on peut remplacer t_i par $t_i / (t_1 + \dots + t_n)$, ce qui ne change pas l'équation (I.2.1). On fixe un point $x \in \mathcal{E}$ et on définit

$$x_0 = x + \sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{xx_i}.$$

Alors x_0 vérifie (I.2.1) : on a

$$\sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{x_0 x_i} = \sum_i t_i \overrightarrow{xx_i} + \sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{xx_i} = 0.$$

Supposons maintenant que $x'_0 \in \mathcal{E}$ vérifie également (I.2.1). Alors on a :

$$0 = \sum_i t_i \overrightarrow{x'_0 x_i} = \overrightarrow{x'_0 x} + \sum_i t_i \overrightarrow{xx_i}$$

de sorte que $\overrightarrow{xx'_0} = \sum_i t_i \overrightarrow{xx_i} = \overrightarrow{xx_0}$ et donc $x_0 = x'_0$.

Enfin, comme x ci-dessus est arbitraire on obtient (par l'unicité) que x_0 vérifie bien l'équation (I.2.2). \square

Définition I.6 On appelle le point x_0 défini dans la proposition ci-dessus le barycentre des points x_i avec les coefficients t_i , ou le barycentre des (x_i, t_i) . Si l'on a $\sum_i t_i = 1$ on utilisera dans la suite la notation

$$x_0 = \sum_{i=1}^n t_i x_i \quad (\text{I.2.3})$$

pour le désigner. Si tous les t_i sont égaux (et valent donc tous $1/n$) on l'appelle l'isobarycentre des points x_i .

Le barycentre est facile à calculer en coordonnées dans un repère (noter l'hypothèse sur les t_i), comme précisé dans la proposition suivante.

Proposition I.11 Soit \mathcal{R} un repère de \mathcal{E} et $d = \dim(\mathcal{E})$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}$ et $t_i \in \mathbb{R}$. On suppose que $\sum_i t_i = 1$. On note (x_i^1, \dots, x_i^d) les coordonnées de x_i dans \mathcal{R} . Le barycentre des (x_i, t_i) est alors le point x_0 dont les coordonnées dans \mathcal{R} sont

$$\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i^1, \dots, \sum_{i=1}^n t_i x_i^d \right).$$

Démonstration : Si x est l'origine du repère le vecteur $\overrightarrow{x_0 x}$ est égal à $\sum_i t_i \overrightarrow{x_i x}$, et les coordonnées de ce dernier sont celles données dans l'énoncé. \square

La propriété suivante est souvent appelée « associativité du barycentre ».

Proposition I.12 Soient des points $x_i^j \in \mathcal{E}$ (pour $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n_j$), des réels t_i^j vérifiant : $\forall j : \sum_i t_i^j = 1$ et des réels s_1, \dots, s_k tels que $\sum_j s_j = 1$. Alors on a :

$$\sum_{j=1}^k s_j \left(\sum_{i=1}^{n_j} t_i^j x_i^j \right) = \sum_{i,j} s_j t_i^j x_i^j. \quad (\text{I.2.4})$$

Démonstration : On note $y_j = \sum_{i=1}^{n_j} t_i^j x_i^j$. Soit x_0 le côté droit de (I.2.4) ; il faut montrer que l'on a

$$\sum_{j=1}^k s_j \overrightarrow{x_0 y_j} = 0$$

à partir de la relation

$$\sum s_j t_i^j \overrightarrow{x_0 x_i^j} = 0 \quad (\text{I.2.5})$$

définissant x_0 . Par définition de y_j on a pour tout j l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n_j} t_i^j \overrightarrow{y_j x_i^j} = 0$$

et il vient en remplaçant $\overrightarrow{x_0 x_i^j}$ par $\overrightarrow{x_0 y_j^j} + \overrightarrow{y_j x_i^j}$ dans (I.2.5) :

$$0 = \sum_j s_j \left(\sum_i t_i^j \right) \overrightarrow{x_0 y_j^j} + \sum_j s_j \left(\sum_{i=1}^{n_j} t_i^j y_j x_i^j \right) = \sum_j s_j \overrightarrow{x_0 y_j^j}$$

ce qui est ce que l'on voulait démontrer. \square

Par exemple, si $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ et $1 \leq m < n$ et $\alpha = \sum_{i=1}^m t_i$ on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^n t_i x_i = \alpha \left(\sum_{i=1}^m \frac{t_i}{\alpha} x_i \right) + (1 - \alpha) \left(\sum_{i=m+1}^n \frac{t_i}{1 - \alpha} \right).$$

Les barycentres se comportent bien vis-à-vis des applications affines.

Proposition I.13 Soit f une application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $\sum_i t_i \neq 0$ et x_0 le barycentre des (x_i, t_i) . Le point $f(x_0)$ est le barycentre des $f(x_i), t_i$.

Démonstration : Soit ϕ la partie linéaire de f . On a :

$$\sum_i t_i \overrightarrow{f(x_0) f(x_i)} = \sum_i t_i \phi(\overrightarrow{x_0 x_i}) = \phi \left(\sum_i t_i \overrightarrow{x_0 x_i} \right) = 0$$

et il suit que $f(x_0)$ est bien le barycentre des $f(x_i), t_i$. \square

I.2.2 Coordonnées barycentriques

Définition I.7 Une base affine de \mathcal{E} est un ensemble \mathcal{B} de points de \mathcal{E} tels que pour tout $x \in \mathcal{B}$ le sous-ensemble B de E défini par

$$B = \{\overrightarrow{xy} : y \in \mathcal{B}, y \neq x\}$$

soit une base de E .

Si \mathcal{B} est une base affine d'un espace affine \mathcal{E} de dimension n alors on a $|\mathcal{B}| = |B| + 1 = \dim \mathcal{E} + 1$. Si \mathcal{B} est une base affine de \mathcal{E} et $x \in \mathcal{B}$ on voit que (x, B) est un repère affine de \mathcal{E} ; réciproquement, si (x, B) est un repère affine de \mathcal{E} alors

$$\mathcal{B} := \{x + v : v \in B\} \cup \{x\}$$

est une base affine de \mathcal{E} .

Les coordonnées barycentriques sont les systèmes de coordonnées associés aux bases affines d'un espace affine. Pour les définir on utilise la proposition suivante.

Proposition I.14 Soit $H = \{(t_1, \dots, t_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : \sum_i t_i = 1\}$. Si x_1, \dots, x_{d+1} est une base affine de \mathcal{E} alors l'application

$$b : H \rightarrow \mathcal{E}, v \mapsto \sum_{i=1}^{d+1} t_i x_i$$

est une bijection affine.

Démonstration : On va utiliser le repère $\mathcal{R} = (x_1, (\overrightarrow{x_1 x_i}))$ pour la démonstration. Si $x \in \mathcal{E}$ a pour coordonnées dans \mathcal{R} le d -uplet (t_2, \dots, t_{d+1}) alors on a $x = x_1 + \sum_{i=2}^{d+1} t_i \overrightarrow{x_1 x_i}$ et il suit (en posant $\alpha = \sum_i t_i$) que :

$$b(x) = (1 - \alpha, t_2, \dots, t_{d+1}). \quad (\text{I.2.6})$$

Comme les coordonnées dans \mathcal{R} donnent une bijection affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^d$ et que l'application

$$(t_2, \dots, t_{d+1}) \mapsto (1 - \alpha, t_2, \dots, t_{d+1})$$

est une bijection affine de \mathbb{R}^d sur H le résultat suit. \square

Définition I.8 Les coordonnées barycentriques d'un point de \mathcal{E} sont les coordonnées dans le repère canonique de \mathbb{R}^{d+1} de sa préimage par cette application.

L'exemple le plus simple de coordonnées barycentriques est le suivant : on considère \mathbb{R} comme un espace affine. On prend comme base affine $(0, 1)$. Alors les coordonnées barycentriques de $t \in \mathbb{R}$ sont $(1 - t, t)$.

Il n'est pas surprenant que les coordonnées barycentriques se comportent bien vis-à-vis des barycentres.

Proposition I.15 Soit \mathcal{B} une base affine de \mathcal{E} . Si y_1, \dots, y_n ont pour coordonnées barycentriques dans \mathcal{B} les $(d+1)$ -uplets $(y_i^1, \dots, y_i^{d+1})$ et $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ alors les coordonnées barycentriques dans \mathcal{B} de $\sum_i t_i y_i$ sont

$$\left(\sum_{i=1}^n t_i y_i^1, \dots, \sum_{i=1}^n t_i y_i^{d+1} \right).$$

Démonstration : Si $s^i = (s_1^i, \dots, s_{d+1}^i) \in H$ pour $i = 1, \dots, n$ alors le barycentre des (s^i, t_i) est $(\sum_i t_i s_1^i, \dots, \sum_i t_i s_{d+1}^i)$ par la proposition I.11. Le résultat suit par la proposition I.13 et le fait que b soit affine. \square

I.2.3 *Parties convexes et polyèdres

Convexité

Définition I.9 Un sous-ensemble \mathcal{C} de \mathcal{E} est dit convexe si pour tout sous-ensemble fini de points $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{C}$, pour tous $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_i t_i = 1$ le barycentre des x_i avec coefficients t_i appartient à \mathcal{C} .

Il est évident qu'une intersection de parties convexes est elle-même convexe ; ceci permet de poser la définition suivante.

Définition I.10 Pour un sous-ensemble $S \subset \mathcal{E}$, l'enveloppe convexe de S est la plus petite partie convexe de \mathcal{E} contenant S , autrement dit l'intersection de tous les convexes de \mathcal{E} contenant S .

L'associativité du barycentre permet de montrer que l'enveloppe convexe de S peut être construite à partir de S en prenant les barycentres à coefficients positifs de toutes les parties finies, autrement dit qu'elle est égale à :

$$\left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in S, t_1, \dots, t_n \in [0, +\infty[: \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}.$$

En fait on peut se contenter des barycentres d'au plus $d + 1$ points, comme montré par le résultat suivant (“Théorème de Carathéodory”) dont la démonstration ne sera pas donnée ici mais est contenue dans les exercices.

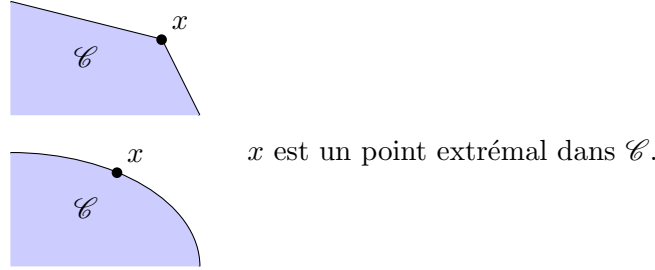
Théorème I.4 *Si $\dim(\mathcal{E}) = d$, S est une partie quelconque de \mathcal{E} et \mathcal{C} son enveloppe convexe alors on a :*

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} t_i x_i : x_i \in S, t_i \in [0, 1], \sum_i t_i = 1 \right\}.$$

Points extrémaux

Si $x, y \in \mathcal{E}$ le segment $[xy]$ est l'enveloppe convexe de $\{x, y\}$, autrement dit $[xy] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$.

Définition I.11 *Soit \mathcal{C} une partie convexe de \mathcal{E} . Un point $x \in \mathcal{C}$ est un point extrémal de \mathcal{C} si pour tous $y, z \in \mathcal{C}$ tels que $x \in [yz]$ on a $x = y$ ou $x = z$.*



L'utilité de la notion de point extrémal provient du résultat suivant (dû à Minkowski mais souvent appelé “théorème de Krein–Milman”), que l'on ne démontrera pas dans ce cours.

Théorème I.5 *Si \mathcal{C} est une partie convexe bornée de \mathcal{E} alors elle est égale à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Polyèdres

Définition I.12 *Soit \mathcal{E} un espace affine. Un polyèdre de \mathcal{E} est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de \mathcal{E} .*

On peut utiliser le théorème de Minkowski dans la démonstration de la description suivante des polyèdres : on va procéder directement vu que dans ce cas particulier le théorème est très facile à démontrer. Un *demi-espace fermé* de \mathcal{E} est un sous-ensemble de la forme

$$\{x \in \mathcal{E} : f(x) \geq 0\}$$

où f est une forme affine sur \mathcal{E} (c'est-à-dire une application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$).

Théorème I.6 *Si \mathcal{P} est un polyèdre de \mathcal{E} alors il est égal à une intersection finie de demi-espaces. Réciproquement, une telle intersection n'a qu'un nombre fini de points extrémaux, et si elle est compacte alors elle est égale à leur enveloppe convexe (en particulier c'est un polyèdre).*

Démonstration : Commençons par démontrer le résultat en dimension 1 : on peut supposer que $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, et le résultat s'exprime sous la forme de l'égalité triviale $[x, y] =]-\infty, y] \cap [x, +\infty[$. On va ensuite procéder par récurrence.

On suppose maintenant que $\dim \mathcal{E} \geq 2$ et que

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{E} : f_i(x) \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r\} ;$$

on note $\mathcal{H}_i = \{x : f_i(x) = 0\}$ et $\mathcal{P}_i = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{P}$. Il est trivial de voir que \mathcal{P}_i est l'intersection dans \mathcal{H}_i d'un nombre fini de demi-espaces, en particulier par l'hypothèse de récurrence il n'a qu'un nombre fini de points extrémaux, dont il est l'enveloppe convexe s'il est compact. On notera \mathcal{S} l'union des points extrémaux des \mathcal{P}_i : c'est un ensemble fini. Comme un point extrémal de \mathcal{P} est un point extrémal de tous les \mathcal{P}_i auxquels il appartient il suit que l'ensemble des points extrémaux de \mathcal{P} est contenu dans \mathcal{S} et est donc fini. Il reste à montrer que si \mathcal{P} est compact alors il est égal à l'enveloppe convexe de \mathcal{S} : comme il est convexe et contient \mathcal{S} l'inclusion de cette dernière dans \mathcal{P} est immédiate.

Supposons maintenant que $x \in \mathcal{P}$. Soit \mathcal{D} n'importe quelle droite passant par x . Soit $I = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$; c'est un intervalle compact non-vidé (puisque x y est) de \mathcal{D} , qui est donc égal à $[y, z]$ pour deux points x, y qui sont chacun sur (au moins) l'un des \mathcal{P}_i . Par l'hypothèse de récurrence z, y sont chacun dans l'enveloppe convexe de \mathcal{S} , et il suit que $[y, z]$ est inclus dans celle-ci, et en particulier que x y est aussi. Il suit que \mathcal{P} est contenu dans, donc égal à, l'enveloppe convexe de \mathcal{S} .

On suppose maintenant que \mathcal{P} est l'enveloppe convexe des points x_1, \dots, x_r : sans perdre de généralité on peut supposer que l'espace affine engendré par ces derniers est égal à \mathcal{E} . Pour tout $x \in \mathcal{E}$ l'application $f \mapsto f(x)$ définit une forme affine sur l'espace affine \mathcal{E}^* des formes affines sur \mathcal{E} . Il suit que

$$\mathcal{P}^* = \{f \in \mathcal{E}^* : 0 \leq f(x_i) \leq 1 \text{ pour } i = 1, \dots, r\} ;$$

est une intersection de demi-espaces de \mathcal{E}^* . On peut vérifier qu'elle est compacte (ceci suit du fait que les x_i engendrent \mathcal{E}) et non-vidé (elle contient les formes constantes 0 et 1). Par le sens réciproque du théorème (que l'on a démontré ci-dessus) il suit que \mathcal{P}^* est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de formes f_1, \dots, f_s : on va démontrer que \mathcal{P} est l'intersection des demi-espaces qu'elles définissent ; il est évident que \mathcal{P} est contenu dans cette dernière.

Un ensemble convexe est égal à l'intersection des demi-espaces qui le contiennent (une démonstration de ceci sera donnée dans les exercices de la section suivante). Ceci admis le sens direct du théorème suit immédiatement : en effet, soit $y \notin \mathcal{P}$. Il existe un demi-espace \mathcal{H} contenant \mathcal{P} mais pas y . Soit f une forme affine telle que \mathcal{H} soit défini par une équation $f \geq 0$. Comme \mathcal{P} est compact il existe un $\lambda \in]0, +\infty[$ tel que $0 \leq f(x) \leq \lambda$ pour tout $x \in \mathcal{P}$. Soit $g = \lambda^{-1}f$: on a $g \in \mathcal{P}^*$ mais $g(y) < 0$, en particulier (comme $g = \sum_i t_i f_i$ pour des $t_i \in [0, 1]$) on a $f_i(y) < 0$ pour au moins l'une des f_i et il suit que y n'est pas dans le polyèdre défini par les f_i . \square

I.3 Espaces affines euclidiens

I.3.1 Définition

Rappels sur les espaces vectoriels euclidiens

On se contentera ici de brefs rappels sur les espaces vectoriels euclidiens et on refère à [Sem1, Chapitre 6] pour un exposé plus complet sur le sujet.

Un *espace vectoriel euclidien* est un espace vectoriel réel E de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie positive (un *produit scalaire* selon la terminologie usuelle)—cette dernière propriété signifiant que pour tout $\vec{v} \in E$ le nombre $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ soit positif, et nul si et seulement si \vec{v} lui-même est nul (le nombre réel positif $\|\vec{v}\|$ défini par $\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ est alors appelé la *norme* de \vec{v}). Le produit scalaire satisfait *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \text{ si } \vec{v} \neq 0 \text{ et } \vec{w} \notin \mathbb{R}_+ \vec{v}. \quad (\text{I.3.1})$$

D'autre part la propriété de bilinéarité du produit scalaire implique immédiatement que

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \|\vec{w}\|^2. \quad (\text{I.3.2})$$

On déduit de cette dernière identité et de l'inégalité (I.3.1) *l'inégalité triangulaire* pour la norme :

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in E \quad \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|. \quad (\text{I.3.3})$$

Espaces affines euclidiens

Venons-en enfin à la définition des objets que l'on étudiera dans cette deuxième partie du cours, principalement en dimensions 2 et 3.

Définition I.13 Soit \mathcal{E} un espace affine et E son espace directeur. Si l'on munit E d'une structure d'espace vectoriel euclidien on dir alors que \mathcal{E} est un espace affine euclidien.

Soit alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $E \times E$, induisant une norme $\|\cdot\|$ sur E . La distance euclidienne sur \mathcal{E} est la fonction d sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ définie comme suit :

$$d(x, y) = \|\vec{xy}\|.$$

Si E est un espace vectoriel euclidien alors l'espace affine sous-jacent à E est naturellement un espace affine euclidien.

La fonction distance vérifie les propriétés usuelles d'une distance (telle qu'on la définit en topologie) : le fait que le produit scalaire soit défini positif implique que $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$, comme $\|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\|$ pour tout $\vec{v} \in E$ on a $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in \mathcal{E}$, et enfin l'inégalité triangulaire (I.3.3) pour la norme $\|\cdot\|$ permet de déduire l'inégalité triangulaire pour d , qui est l'inégalité

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

pour tout triplet de points $x, y, z \in \mathcal{E}$. Il suit que (E, d) est un espace métrique au sens topologique du terme.

Définition I.14 On dira qu'un repère (x, B) (respectivement une base affine $\mathcal{B} = (x_0, \dots, x_d)$) de \mathcal{E} est un repère (respectivement une base affine) orthonormale si la base $B = (e_1, \dots, e_n)$ (respectivement la base de E donnée par les $e_i = \vec{x_0x_i}$ pour $i = 1, \dots, d$) est orthonormale, autrement dit si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ ou 1 selon que $i \neq j$ ou non.

Attention, pour une base affine l'orthonormalité dépend de l'ordre des points (cf. l'exercice 27). L'existence de bases orthonormées des espaces vectoriels euclidiens implique immédiatement l'existence de repères et bases affines orthonormés des espaces affines euclidiens.

Définition I.15 On dira que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ de \mathcal{E} sont orthogonaux dans \mathcal{E} s'ils ont une intersection non-vide et leurs espaces directeurs F, F' le sont dans E (c'est-à-dire que $\langle \vec{v}, \vec{v'} \rangle = 0$ pour tous $\vec{v} \in F, \vec{v'} \in F'$).

Noter que contrairement au cas vectoriel, la notion d'orthogonal d'un sous-espace affine n'est pas bien définie : il faut préciser en plus un point du sous-espace.

I.3.2 Isométries

Définition

A partir de maintenant \mathcal{E} est un espace affine euclidien de direction E . On définit les isométries de \mathcal{E} en fonction de leur partie linéaire : on rappelle qu'une application linéaire $E \rightarrow E$ est une isométrie si et seulement si on a $\langle \phi(\vec{u}), \phi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$.

Définition I.16 Soit f une application affine ; on dit f est une isométrie affine si :

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Parmi les applications affines que l'on a déjà introduites un exemple d'isométrie est donné par les translations ; les homothéties ne sont jamais des isométries.

Le fait que les isométries vectorielles soient toujours bijectives (ce qui suit immédiatement de la non-dégénérescence du produit scalaire, ou encore plus directement de la condition qu'il soit défini positif) implique le fait suivant via la proposition I.5.

Proposition I.16 Une isométrie d'un espace affine est bijective.

On peut caractériser les isométries par leur partie linéaire parmi les applications affines (l'hypothèse que f est affine dans la proposition suivante n'est en fait pas nécessaire mais elle simplifie beaucoup la démonstration).

Proposition I.17 Soit d la distance sur \mathcal{E} . Un application affine f de \mathcal{E} dans lui même de partie linéaire ϕ . C'est une isométrie affine si et seulement si ϕ est une isométrie linéaire.

Démonstration : Supposons que f est une isométrie affine. Soient $x, y \in \mathcal{E}$; on a :

$$d(f(x), f(y)) = \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\| = \|\phi(\overrightarrow{xy})\| = \|\overrightarrow{xy}\| = d(x, y).$$

Réciproquement, si f est une application affine telle que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{E}$. Alors sa partie linéaire ϕ est une isométrie ; en effet on a pour tout $\vec{v} \in E$:

$$\begin{aligned} \|\phi(\vec{v})\| &= \|\overrightarrow{f(x)f(x+\vec{v})}\| \\ &= d(f(x), f(x+\vec{v})) = d(x, x+\vec{v}) = \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

et on sait qu'une application linéaire est une isométrie d'un espace euclidien si et seulement si elle préserve sa norme (voir l'exercice 33). \square

*Symétries

Les symétries sont des applications affines particulières que l'on peut définir grâce à la proposition suivante (on rappelle que la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à F' est l'unique application linéaire σ telle que $\sigma|_F = \text{Id}_F$ et $\sigma|_{F'} = -\text{Id}_{F'}$).

Proposition I.18 Soit \mathcal{E} un espace affine ; soient \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathcal{E} et F' un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus F'$. Il existe une unique application affine $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ telle que :

- (i) la partie linéaire de s est la symétrie vectorielle de E par rapport à F parallèlement à F' ;
- (ii) s fixe \mathcal{F} point par point.

Démonstration : Montrons d'abord qu'une telle application existe : étant donnés \mathcal{F}, F' comme ci-dessus, définissons une application s comme suit : soit σ la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à F' (rappelons que c'est l'unique application linéaire sur E qui soit égale à Id sur F et à $-\text{Id}$ sur F'). Fixons un point $x_0 \in \mathcal{F}$, et posons pour tout $x \in \mathcal{E}$:

$$s(x) = x_0 + \sigma(\overrightarrow{x_0x}).$$

Le fait que la partie linéaire de s soit égale à σ est une conséquence directe de cette définition : si $x, y \in \mathcal{E}$ on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{s(x)s(y)} &= \overrightarrow{s(x)x_0} + \overrightarrow{x_0s(y)} = -\sigma(\overrightarrow{x_0x}) + \sigma(\overrightarrow{x_0y}) \\ &= \sigma(\overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{x_0y}) = \sigma(\overrightarrow{xy}). \end{aligned}$$

De même il est évident que s fixe \mathcal{F} : si $x \in \mathcal{F}$ alors $\overrightarrow{x_0x} \in F$ et par conséquent $\sigma(\overrightarrow{x_0x}) = \overrightarrow{x_0x}$. Il suit que :

$$s(x) = x_0 + \overrightarrow{x_0x} = x.$$

L'unicité est semblablement facile à démontrer : si s, s' sont deux applications vérifiant les conditions (i) et (ii) alors elles ont même partie linéaire (à cause de (i)), et il suit de (ii) que pour n'importe quel $x \in \mathcal{F}$ on a $s(x) = x = s'(x)$. Les applications affines s et s' sont donc égales par la proposition I.3. \square

Définition I.17 Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}, F'$ comme ci-dessus. La symétrie par rapport à \mathcal{F} parallèlement à F' est l'endomorphisme affine s de \mathcal{E} défini par la proposition.

Si \mathcal{E} est euclidien on dit que s est une symétrie orthogonale si F et F' sont orthogonaux.

Le résultat suivant est démontré dans l'exercice 35

Proposition I.19 Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien. Une symétrie est une isométrie de \mathcal{E} si et seulement si elle est orthogonale.

Points fixes des isométries

On peut simplifier l'énoncé de la proposition I.7 dans le cas des isométries.

Proposition I.20 Soit f une isométrie de \mathcal{E} , de partie linéaire ϕ . Soient $F = \ker(\phi - \text{Id})$ et π la projection orthogonale (linéaire) sur F . Soit $x_0 \in \mathcal{E}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{x_0f(x_0)}$. Alors f a un point fixe si et seulement si $\pi(\vec{w}) = 0$.

Démonstration : Ceci suit immédiatement de la proposition I.7 en observant que ϕ est diagonalisable sur \mathbb{C} (toute isométrie l'est) et de ce que F^\perp est un supplémentaire stable de F (en effet, si $\vec{u} \in F^\perp$ et $\vec{v} \in F$ on a $\phi(\vec{v}) = \vec{v}$ et comme ϕ est isométrique il suit que :

$$\langle \phi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \phi(\vec{u}), \phi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

donc on a bien $\phi(\vec{u}) \in F^\perp$. \square

*Groupe des isométries affines

Rappelons que le *groupe affine* de \mathcal{E} est l'ensemble des applications affines bijectives de \mathcal{E} dans lui-même dont la loi de groupe est donnée par la composition d'applications.

Proposition I.21 *L'ensemble des isométries de \mathcal{E} forme un sous-groupe du groupe affine de \mathcal{E} .*

Démonstration : Il suffit de vérifier les deux points suivants :

- (i) Une isométrie de \mathcal{E} a une partie linéaire inversible, et l'inverse de cette dernière est elle-même une isométrie ;
- (i) La composition d'isométries reste une isométrie.

Chacun est trivial et laissé à la lectrice. □

*Classification des espaces affines euclidiens

On dit qu'une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ entre deux espaces affines euclidiens est un *plongement isométrique* si sa partie linéaire ϕ vérifie $\langle \phi(\vec{v}), \phi(\vec{u}) \rangle_F = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_E$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ (ceci implique facilement que ϕ , donc aussi f , est injective). On dit que c'est une isométrie si c'est de plus une surjection ; de manière équivalente $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{F}$. Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions et de l'existence de repères orthonormés.

Théorème I.7 *Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien de dimension d . Soit \mathcal{R} un repère orthonormé de \mathcal{E} ; alors l'application de \mathcal{E} dans \mathbb{R}^d (le second muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien) qui à un point associe ses coordonnées dans \mathcal{R} est une isométrie.*

En particulier deux espaces affines euclidiens sont isométriques si et seulement s'ils ont la même dimension.

I.4 Feuilles d'exercices

I.4.1 Espaces affines réels

Espaces affines

Exercice I.1

(1.a) Soit E est un espace vectoriel réel ; montrer que l'application $E \times E \rightarrow E$ définie par $(v, w) \mapsto w - v$ munit E d'une structure d'espace affine de direction E .

(1.b) Soient E, E' des espaces vectoriels réels, ϕ une application linéaire de E vers E' et $v \in E'$. Munir le sous-ensemble $\phi^{-1}(\{v\})$ d'une structure d'espace affine de direction $\ker(\phi)$.

Exercice I.2

Montrer que la définition d'espace affine donnée dans le cours est équivalente à la définition suivante : une structure d'espace affine de direction E sur un ensemble \mathcal{E} est la donnée d'une application $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$, notée $(x, \vec{v}) \mapsto x + \vec{v}$, telle que $(x + \vec{v}) + \vec{u} = x + (\vec{v} + \vec{u})$ et pour tout $x \in \mathcal{E}$, l'application $\vec{v} \mapsto x + \vec{v}$ est une bijection $E \rightarrow \mathcal{E}$.

Exercice I.3

(3.a) Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine canonique (cf. l'exercice 1). Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$

la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}$. Donner les coordonnées affines d'un point $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans le repère (x, B) .

(3.b) Soit $B' = (e_1, e_2 + e_1, \dots, e_n + e_1)$. Montrer que B' est une base de E et donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in E$ dans la base B' .

(3.c) Donner les coordonnées affines d'un point y dans le repère (x, B') .

(3.d) Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, $x = (1, 2, 3)$ et B la base :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donner les coordonnées de $(y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{E}$ dans le repère (x, B) .

Exercice I.4

Soient \mathcal{E} un espace affine et $x, y, z, t \in \mathcal{E}$. Montrer que x, z et y, t ont même milieu si et seulement si $\vec{xy} = \vec{tz}$.

Sous-espaces affines, systèmes d'équations affines

Exercice I.5

(5.a) Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} . Pour $x \in \mathcal{E}$ on pose :

$$F_x = \{\vec{xy} : y \in \mathcal{F}\}.$$

Montrer que F_x ne dépend pas de x . On note $F = F_x$, montrer que \mathcal{F} est un espace affine de direction F .

(5.b) Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, montrer que \mathcal{F} est un sous-espace affine si et seulement s'il existe un $x \in \mathcal{E}$ tel que F_x soit un sous-espace vectoriel de E .

(5.c) Soit \mathcal{E} un espace affine d'espace directeur E et soit \mathcal{F} une partie de \mathcal{E} telle $\{\vec{xy} : x \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{F}\}$ soit un sous-espace vectoriel de E . La partie \mathcal{F} est-elle nécessairement un sous-espace affine de \mathcal{E} ?

Exercice I.6

Soient $S \subset \mathcal{E}$, $x \in S$ et \mathcal{F} le sous-espace affine engendré par S . Montrer que la direction de \mathcal{F} est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\{\vec{xy} : y \in S\}$.

Exercice I.7

(7.a) Montrer que si $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sont des sous-espaces affines de \mathcal{E} alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} si et seulement si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ ou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

(7.b) Montrer que si $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sont des sous-espaces affines d'un espace affine \mathcal{E} tels que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$, et \mathcal{F}'' est le sous-espace affine engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ on a

$$\dim(\mathcal{F}'') = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{F}') - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}').$$

(7.c) Dans le cas où $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \emptyset$ montrer que l'on a :

$$\dim(\mathcal{F}'') = \dim(F + F') + 1 = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{F}') - \dim(F \cap F') + 1.$$

(7.d) Discuter les configurations possibles de deux droites dans un espace affine de dimension 3.

Exercice I.8

Soient a et b deux nombres réels et soit \mathcal{F} le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases};$$

montrer que \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathbb{R}^3 (on en donnera un point et l'espace directeur; la réponse dépend en partie de a et b); quelle est sa dimension?

Exercice I.9

Soit $u \in \mathbb{R}$. Vérifier que les deux sous-ensembles \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathbb{R}^4 respectivement définis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = u \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + 2z + t = 1 \\ x - y + 2z + 3t = 2u \end{cases}$$

sont des sous-espaces affines de \mathbb{R}^4 , dont on donnera pour chacun un point, l'espace directeur et la dimension. Pour quelle valeur de u s'intersectent-ils? Donner alors un point, l'espace directeur et la dimension de l'intersection.

Exercice I.10

A quelle condition sur le réel t les quatre points

$$(1; 1; t), (2; 3; 2t), (3; 1 - t; t - 1), (2; 3; 3 + t)$$

de \mathbb{R}^3 sont-ils affinement indépendants? Pour chaque valeur de t pour lequel ils ne le sont pas, donnez la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

Exercice I.11

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 3 et soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites de \mathcal{E} non parallèles et d'intersection vide.

(11.a) Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 3 et soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites de \mathcal{E} non parallèles et d'intersection vide. Montrez qu'il existe un unique plan \mathcal{P} contenant \mathcal{D} et parallèle à \mathcal{D}' ; on définit de même \mathcal{P}' .

(11.b) Soit $x \in \mathcal{E}$. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) il existe une droite Δ contenant x et rencontrant \mathcal{D} et \mathcal{D}' ;
- (b) $x \in (\mathcal{E} - (\mathcal{P} \cup \mathcal{P}')) \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$.

Applications affines

Exercice I.12

Soient t une translation de vecteur \vec{v} , h, h' des homothéties de rapports respectifs λ, λ' et de centres respectifs x, x' .

(12.a) Montrer que $h \circ t, t \circ h$ sont des homothéties de rapport λ (on calculera le centre de chacune).

(12.b) On suppose que $\lambda \cdot \lambda' \neq 1$. Montrer que $h \circ h'$ est une homothétie de rapport $\lambda \cdot \lambda'$, dont on donnera le centre.

(12.c) Quelle est la nature de $h \circ h'$ quand $\lambda \cdot \lambda' = 1$?

Exercice I.13

(13.a) Montrer que si t, t' sont des translations et s'il existe un point $x \in \mathcal{E}$ tel que $t(x) = t'(x)$ alors $t = t'$

(13.b) Soit g une transformation affine inversible de \mathcal{E} et $\vec{v} \in E$. Montrer que $g \circ t_{\vec{v}} \circ g^{-1}$ est égale à $t_{\vec{g}(\vec{v})}$.

* (13.c) Dédurre de la question précédente que l'ensemble des translations de \mathcal{E} (y compris l'identité) est un sous-groupe distingué du groupe affine de \mathcal{E} . Montrer que le quotient est isomorphe à $GL(E)$.

Exercice I.14

Soit \mathcal{E} un espace affine. On dit qu'une application affine p de \mathcal{E} dans lui-même est une projection s'il existe un sous-espace affine \mathcal{F} de \mathcal{E} et un sous-espace vectoriel D de E tels que $F \oplus D = E$, et que l'on ait $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$ et $\forall x \in \mathcal{E} : \overrightarrow{xp(x)} \in D$.

(14.a) Montrer que la partie linéaire π de p est une projection vectorielle (on rappelle que ceci est équivalent à ce que $E = \ker(\pi) + \ker(\pi - \text{Id})$).

(14.b) Etant donnés \mathcal{F}, D comme ci-dessus, construire un p vérifiant les hypothèses et montrer qu'il est unique.

(14.c) Montrer qu'une application affine $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une projection si et seulement si on a $p \circ p = p$.

Points fixes des applications affines

Exercice I.15

Soit \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace affine de dimension 2 et soit E son espace directeur. Soit $x_0 \in \mathcal{E}$, soit (e_1, e_2) une base de E et soit \mathcal{R} le repère (x_0, e_1, e_2) de \mathcal{E} . Soit f l'application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} donnée en coordonnées dans le repère \mathcal{R} par la formule

$$(x, y) \mapsto (2x - 3y + 5, 7x - 2y + 3).$$

(15.a) Quelle est la dimension de l'espace des points fixes de f ?

(15.b) Soient x'_0 le point de \mathcal{E} de coordonnées $(2, -1)$ dans \mathcal{R} , $e'_1 = e_1 - 2e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$. Vérifiez que (e'_1, e'_2) est une base de E . Soit \mathcal{R}' le repère (x'_0, e'_1, e'_2) de \mathcal{E} . Donner une formule en coordonnées dans le repère \mathcal{R}' pour f .

(15.c) Trouver le repère $\mathcal{R}'' = (x''_0, e''_1, e''_2)$ de \mathcal{E} caractérisé par la propriété suivante : si x est un point de \mathcal{E} de coordonnées (x_1, x_2) dans \mathcal{R} , ses coordonnées dans \mathcal{R}'' sont $(x_1 - x_2 + 3, 2x_1 + x_2 - 6)$.

(15.d) Trouver un repère \mathcal{R}''' de \mathcal{E} dans lequel f peut être définie par une formule sans termes constants.

Exercice I.16

Soit \mathcal{E} un plan affine et (x_0, B) un repère de \mathcal{E} . Soit ϕ l'application linéaire de E dont la matrice dans B est

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

et f l'application affine de partie linéaire ϕ et telle que $f(x_0)$ soit de coordonnées $(1, a)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f ait un point fixe et calculer ce dernier quand il existe.

Exercice I.17

Soit ϕ l'endomorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 défini par

$$(x, y) \mapsto (x + y, y).$$

Montrer que ϕ n'est pas diagonalisable sur \mathbb{C} . Trouver un endomorphisme affine f de \mathbb{R}^2 dont la partie linéaire est ϕ et qui ait un point fixe dans \mathbb{R}^2 , et un endomorphisme f' dont la partie linéaire est aussi ϕ mais qui n'a pas de point fixe dans \mathbb{R}^2 .

I.4.2 Convexité et barycentres

Barycentres

Exercice I.18

On suppose que $\sum_i t_i = 0$. Décrire l'ensemble des points $x \in \mathcal{E}$ vérifiant

$$\sum_i t_i \overrightarrow{xx_i} = 0.$$

Exercice I.19

(19.a) Soit \mathcal{E} un espace affine, soit $S \subset \mathcal{E}$. Montrer que S est un sous-espace affine si et seulement si, pour toute paire de points $x, y \in \mathcal{E}$, $x \neq y$, la droite (xy) est contenue dans S .

(19.b) Dédurre de la question précédente que S est un sous-espace affine si et seulement si elle contient tous les barycentres de ses points.

Exercice I.20

Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension 3 et $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{E}$ une base affine de \mathcal{E} . Soient encore m_1, \dots, m_6 les milieux respectifs des segments $[x_1x_2]$, $[x_3x_4]$, $[x_1x_3]$, $[x_2x_4]$, $[x_1x_4]$ et $[x_2x_3]$.

Montrer que le « centre de gravité » $g = \frac{1}{4}x_1 + \dots + \frac{1}{4}x_4$ est égal à l'intersection des droites (m_1m_2) , (m_3m_4) et (m_5m_6) (en particulier ceci montre que ces droites sont concourantes).

Coordonnées barycentriques

Exercice I.21

(21.a) Soit \mathcal{P} un plan affine, \mathcal{B} une base affine de \mathcal{P} et (t_1, t_2, t_3) les coordonnées barycentriques dans \mathcal{B} . Montrer qu'un sous-ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ est une droite affine si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \neq b$ ou $b \neq c$ tels que

$$\mathcal{D} = \{at_1 + bt_2 + ct_3 = 0\}.$$

(21.b) Montrer que deux droites définies respectivement par $at_1 + bt_2 + ct_3 = 0$ et $a't_1 + b't_2 + c't_3 = 0$ sont parallèles si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

est nul.

(21.c) Soit $a''t_1 + b''t_2 + c''t_3 = 0$ définissant une troisième droite de \mathcal{P} . Montrer que les trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

(21.d) (Théorème de Ceva) Soient (x, y, z) une base affine de \mathcal{P} . Soient x' (resp. z' , resp. y') un point de (yz) différent de z et y (resp. un point de (xz) différent de x et z , resp. un point de (xy) différent de x et y). Montrer que les droites (xx') , (yy') et (zz') sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{x'y}}{\overrightarrow{x'z}} \cdot \frac{\overrightarrow{y'z}}{\overrightarrow{y'x}} \cdot \frac{\overrightarrow{z'x}}{\overrightarrow{z'y}} = -1$$

(si \vec{u}, \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires on note \vec{u}/\vec{v} l'unique nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$).

Exercice I.22

Soit \mathcal{P} un plan affine et soit $\mathcal{B} = (x, y, z)$ une base affine de \mathcal{P} . Soit g l'isobarycentre de x, y, z et soit h le point de coordonnées barycentriques $(1, 1, -1)$ dans \mathcal{B} .

(22.a) Justifiez que $g \neq h$ et donnez une équation de la droite (gh) en coordonnées dans \mathcal{B} .

(22.b) Soit p un point de \mathcal{P} de coordonnées (a, b, c) . Donnez en fonction de a, b et c une équation de la droite passant par p et parallèle à (gh) .

Exercice I.23

(23.a) Soient x, y, z trois points d'un plan affine \mathcal{P} , de coordonnées barycentriques $(x_i), (y_i), (z_i)$. Montrer que x, y, z sont alignés si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

est nul.

(23.b) (Théorème de Menelaüs) Soient (x, y, z) une base affine de \mathcal{P} . Soient x' (resp. z' , resp. y') un point de (yz) différent de z et y (resp. un point de (xz) différent de x et z , resp. un point de (xy) différent de x et y). Montrez que x', y' et z' sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overrightarrow{x'y}}{\overrightarrow{x'z}} \cdot \frac{\overrightarrow{y'z}}{\overrightarrow{y'x}} \cdot \frac{\overrightarrow{z'x}}{\overrightarrow{z'y}} = 1.$$

Parties convexes et polyèdres

Exercice I.24

(24.a) Si $x, y \in \mathcal{C}$ l'enveloppe convexe de $\{x, y\}$ est appelée segment de x à y et notée $[xy]$. Montrer que

$$[xy] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}.$$

Montrer plus généralement que si $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'enveloppe convexe de S est égale à l'ensemble $\{\sum_i t_i x_i : t_i \in [0, 1], \sum_i t_i = 1\}$.

(24.b) Montrer que \mathcal{C} est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ le segment $[x, y]$ est contenu dans \mathcal{C} .

Exercice I.25

(Théorème de Carathéodory) Soit \mathcal{E} un espace affine réel de dimension finie n et soit (x_1, \dots, x_p) une famille finie de points de \mathcal{E} . Soit \mathcal{C} l'enveloppe convexe des x_i et soit Γ l'ensemble des points de \mathcal{E} pouvant s'écrire comme le barycentre d'une famille d'au plus $n+1$ points parmi les x_i , affectés de coefficients positifs. On dispose d'une inclusion naturelle $\Gamma \subset \mathcal{C}$; le but de ce qui suit est de prouver l'inclusion réciproque. On procède par récurrence sur p .

(25.a) Que dire si $p \leq n+1$?

(25.b) On suppose que $p > n+1$ et que la propriété a été démontrée au rang p . Soit $x \in \mathcal{C}$; on écrit $x = \sum \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ quel que soit i et $\sum \lambda_i = 1$.

Prouver qu'il existe j tel que A_j soit un barycentre des A_i pour $i \neq j$; on renumérote éventuellement les A_i de sorte que $j = 1$ et l'on écrit $A_1 = \sum_{i \geq 2} t_i x_i$ avec $\sum t_i = 1$. On pose $\mu_1 = 1$ et $\mu_i = -t_i$ pour tout $i > 2$.

(25.c) Montrez qu'il est licite d'écrire pour tout ℓ tel que $\mu_\ell \neq 0$ l'égalité :

$$x_\ell = \sum_{i \neq \ell} -\frac{\mu_i}{\mu_\ell} x_i.$$

(25.d) Soit ℓ tel que $\mu_\ell \neq 0$. Donnez une expression de x comme barycentre des x_i pour $i \neq \ell$; montrez qu'il est possible de choisir ℓ de sorte que les coefficients apparaissant dans cette écriture soient tous positifs, et conclure.

Exercice I.26

(26.a) Vérifier que \mathcal{C} est convexe et déterminer ses points extrémaux dans les cas suivants :

- $\mathcal{C} = \{v \in \mathbb{R}^d : \forall i, -1 \leq v_i \leq 1\}$;
- $\mathcal{C} = x_0 + \{\vec{v} \in E : \|\vec{v}\| \leq 1\}$ pour un $x_0 \in \mathcal{E}$;
- \mathcal{C} est l'enveloppe convexe de $\{x_1, \dots, x_n\}$ où x_1, \dots, x_n sont affinement indépendants.

(26.b) Dans chacun des cas ci-dessus, montrer que \mathcal{C} est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

(26.c) Montrer que le sous-ensemble $[0, +\infty[$ de l'espace affine \mathbb{R} est convexe mais n'est pas égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

I.4.3 Espaces affines euclidiens et isométries

Espaces euclidiens

Exercice I.27

(27.a) Soit $d = \dim \mathcal{E}$. Montrer que $\mathcal{B} = (x_0, \dots, x_d)$ est orthonormale si et seulement si :

- Pour tout $i \geq 1$ on a $d(x_0, x_i) = 1$;
 - Pour tous $i, j \geq 1, i \neq j$ on a $d(x_i, x_j) = \sqrt{2}$.
- (27.b) En déduire que si σ est une permutation sur l'ensemble $\{0, \dots, d\}$ alors la base affine $(x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(d)})$ est orthonormale si et seulement si $\sigma(0) = 0$.

Exercice I.28

(28.a) Soit $n \geq 1$ et E l'espace vectoriel des matrices réelles $n \times n$, que l'on considère comme un espace affine de la façon habituelle. Montrer que l'application

$$(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle := \text{tr}({}^t AB)$$

définit un produit scalaire sur E .

(28.b) Ici $n = 2$. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et F le sous-espace de E engendré par A et B . Donner une base affine du sous-espace affine orthogonal à F passant par A (commencer par donner un système d'équations pour ce sous-espace).

Exercice I.29

(29.a) Soit $E = \mathbb{R}_{\leq d}[X]$ l'espace des polynômes en X à coefficients réels de degré au plus d . Montrer que

$$(p, q) \mapsto \langle p, q \rangle := \int_0^1 f(t)p(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E . On note \mathcal{E} l'espace affine euclidien associé.

(29.b) On suppose $d = 1$. Calculer une base affine orthonormale de \mathcal{E} . Même question pour $d = 2$.

Exercice I.30

Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites dans un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3.

(30.a) On suppose que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont pas parallèles. Montrer qu'il existe une unique droite \mathcal{D} qui soit orthogonale à chacune de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ (on l'appelle « perpendiculaire commune » à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2). (Indication : soit D l'orthogonal de $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$; étudier l'intersection du plan $\mathcal{D}_1 + D$ avec \mathcal{D}_2 .)

(30.b) Que se passe-t-il si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles ?

(30.c) Montrer que si \mathcal{D} est une droite orthogonale à chacune de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $x_i = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_i$ alors

$$d(x_1, x_2) = \inf (d(x, y) : x \in \mathcal{D}_1, y \in \mathcal{D}_2).$$

(30.d) Généraliser les résultats ci-dessus à des sous-espaces arbitraires dans un espace affine euclidien.

Exercice I.31

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien ; soient $C \subset \mathcal{E}$ une partie convexe fermée et $x \in \mathcal{E} \setminus C$.

* (31.a) Montrer que la fonction $y \mapsto d(x, y)$ atteint un minimum sur C .

(31.b) Montrer que ce minimum est atteint en un seul point.

(31.c) On note y_0 le point réalisant le minimum de $d(y, x)$ parmi les $y \in C$ et $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{xy_0}}{\|\overrightarrow{xy_0}\|}$.

En considérant la fonction affine $z \mapsto \langle \vec{v}, \overrightarrow{xz} \rangle + 1/2$ montrer qu'il existe un demi-espace fermé \mathcal{H}^+ de \mathcal{E} tel que $x \notin \mathcal{H}^+$ et $C \subset \mathcal{H}^+$ (on dit que l'hyperplan $\mathcal{H} = \partial \mathcal{H}^+$ sépare x de C).

(31.d) Dédurre de la question précédente qu'un convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Isométries

Exercice I.32

Montrer que si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont des bases affines orthonormales de \mathcal{E} alors il existe une unique isométrie f de \mathcal{E} telle que $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$.

Exercice I.33

Soit E un espace vectoriel euclidien.

(33.a) Montrer que pour $\vec{u}, \vec{v} \in E$ on a :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

(33.b) Dédurre de la question précédente que pour une un endomorphisme linéaire ϕ de E on a :

$$(\forall \vec{v} \in E : \|\phi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|) \Leftrightarrow (\forall \vec{u}, \vec{v} \in E : \langle \phi(\vec{u}), \phi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle).$$

(33.c) Montrer que si une application affine f de \mathcal{E} dans lui-même vérifie $\forall x, y \in \mathcal{E} : d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, alors f est une isométrie affine de \mathcal{E} .

Exercice I.34

Soit $E = M_2(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$

(noter que c'est la spécialisation au cas $n = 2$ du produit scalaire défini dans l'exercice 28). Soient $A, B \in O_2(\mathbb{R})$. Montrer que les endomorphismes linéaires de E définis par

$$M \mapsto AM, \quad M \mapsto MB, \quad , M \mapsto AMB$$

sont des isométries de E .

Exercice I.35

(35.a) Montrer qu'une application affine f est une symétrie si et seulement si c'est une involution (c'est-à-dire que $f \circ f = \text{Id}$).

(35.b) Montrer que la symétrie s par rapport à \mathcal{F} parallèlement à F' est une isométrie affine si et seulement si F et F' sont orthogonaux.

Exercice I.36

(36.a) Montrer que si E est un espace vectoriel euclidien de dimension $\dim(E) \geq 2$ et $r > 0$ alors E est engendré comme groupe abélien par le sous-ensemble

$$\{\vec{v} \in E : \|\vec{v}\| = r\}$$

(faire une démonstration par récurrence ; pour $\dim(E) = 2$ montrer d'abord que le groupe engendré par ces vecteurs contient $t\vec{v}$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $\|\vec{v}\| = r$).

(36.b) Montrer que si $\vec{v}, \vec{v}' \in E$ ont même norme il existe une réflexion vectorielle σ de E telle que $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}'$.

* (36.c) Montrer que le groupe orthogonal de E est engendré par les réflexions.

(36.d) Dédurre des questions précédentes que si \mathcal{E} est un espace affine euclidien de direction E , t une translation non-triviale de \mathcal{E} et $x_0 \in \mathcal{E}$ alors le groupe des isométries de \mathcal{E} est engendré par t et les réflexions fixant x_0 .

(36.e) Montrer que le groupe des isométries de \mathcal{E} est engendré par les réflexions.

Exercice I.37

(37.a) Montrer que si $\dim(E)$ est paire et ϕ est une isométrie indirecte de E alors ϕ a un vecteur fixe non-nul (i.e. il existe $\vec{v} \in E$, $\vec{v} \neq 0$ avec $\phi\vec{v} = \vec{v}$).

(37.b) Montrer que si $\dim(E)$ est impaire et ϕ est une isométrie directe de E alors ϕ a un vecteur fixe non-nul.

Exercice I.38

(38.a) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4, $B = \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$ une base orthonormale de E et ρ l'application linéaire dont la matrice dans B est

$$\text{Mat}_B(\rho) = R = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Constater que ρ est une isométrie de E , montrer qu'il existe une infinité de bases orthonormales de E dans lesquelles la matrice de ρ est égale à R (ceci montre qu'en général la décomposition en espaces stables d'une isométrie n'est pas unique).

(38.b) Soit R la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 2/3 & 8/15 & -2/5 & 1/3 \\ -2/5 & 11/15 & -2/15 & -8/15 \\ 8/15 & 2/15 & 11/15 & -2/5 \\ -1/3 & 2/5 & 8/15 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Constater que R est une isométrie ; calculer son polynôme caractéristique et montrer que ce dernier est égal à $(X^2 - 6X/5 + 1)(X^2 - 8X/5 + 1)$. Soit ρ l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est R ; donner une base orthonormale de \mathbb{R}^4 dans laquelle ρ ait une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ et donner les valeurs de θ_1 et θ_2 .

Chapitre II

Géométrie plane

Dans toute cette section \mathcal{E} désigne un espace affine euclidien de dimension 2, et E son espace directeur.

II.1 *Rappels de trigonométrie

On rappelle qu'il existe une unique fonction dérivable $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\exp'(0) = 1$ et $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$. On note alors $e = \exp(1)$ et

$$\exp(z) = e^z.$$

On définit alors les fonctions \cos, \sin sur \mathbb{R} par

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta}), \sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta}).$$

On rappelle que π est défini comme le plus petit nombre réel strictement positif tel que $\exp(2i\pi) = 1$; de manière équivalente $e^{i\pi} = -1$, et son existence découle donc par exemple du résultat suivant que l'on admettra (mais qui n'est pas difficile à démontrer).

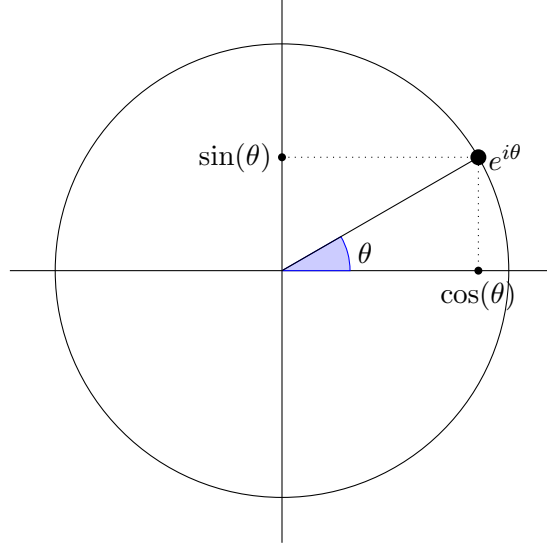
Proposition II.1 *L'image de $i\mathbb{R}$ par l'application \exp est exactement le sous-ensemble*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Ceci équivaut à la propriété suivante : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1,$$

et réciproquement, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = a$, $\sin(\theta) = b$; de plus l'ensemble des nombres réels vérifiant cette propriété est alors exactement $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$. Le schéma suivant (souvent appelé 'cercle trigonométrique') est souvent utile pour se souvenir des propriétés des fonctions \sin et \cos .



La propriété $\exp(i(\theta + \theta')) = \exp(i\theta) \exp(i\theta')$ se traduit immédiatement en les formules d'addition pour les fonctions sin et cos :

$$\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') \quad (\text{II.1.1})$$

$$\sin(\theta + \theta') = \cos(\theta) \sin(\theta') + \sin(\theta) \cos(\theta') \quad (\text{II.1.2})$$

Si $\theta = \theta'$ on obtient les formules de doublement d'angle :

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2, \quad \sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta). \quad (\text{II.1.3})$$

On rappelle que la fonction tan est définie sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$ par $\tan = \sin / \cos$. A partir des formules de doublement d'angle ci-dessus on peut facilement démontrer les formules suivantes :

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad t = \tan(\theta/2), \quad \theta \in]-\pi, \pi[. \quad (\text{II.1.4})$$

II.2 Isométries du plan euclidien

II.2.1 Rappels : classification des isométries vectorielles

Rappelons qu'une orientation du plan est déterminée par le choix d'une base orthonormée (\vec{e}_1, \vec{e}_2) (une autre base de cet espace est alors dite directe ou indirecte selon que la matrice de changement de coordonnées a un déterminant positif ou négatif) et que l'orientation opposée correspond alors à la classe de la base (\vec{e}_2, \vec{e}_1) .

On dit qu'une application linéaire inversible $\phi \in \text{GL}(E)$ est directe ou indirecte selon que l'on a $\det(\phi) > 0$ ou $\det(\phi) < 0$. Les applications directes préservent les classes d'orientation, celles qui sont indirectes les échangent.

Proposition II.2 *Soit ρ une isométrie directe d'un plan vectoriel euclidien E . On suppose de plus que l'on a choisi une orientation sur E ; alors il existe un $\theta \in \mathbb{R}$, déterminé uniquement modulo 2π , tel que dans toute base orthonormée directe (\vec{e}_1, \vec{e}_2) de E on ait*

$$\text{Mat}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\rho) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Soit \vec{e}_1, \vec{e}_2 une base orthonormale directe ; soient a, b l'unique paire de nombres réels tels que l'on ait $\rho(\vec{e}_1) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. Comme ρ est une isométrie on a

$$1 = \|\rho(\vec{e}_1)\|^2 = a^2\|\vec{e}_1\|^2 + 2ab\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle + b^2\|\vec{e}_2\|^2 = a^2 + b^2$$

et par la proposition II.1 il existe donc un $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π , tel que $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$. Si $\rho(\vec{e}_2) = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$ on a par ailleurs :

$$0 = \langle\rho(\vec{e}_1), \rho(\vec{e}_2)\rangle = ac + bd$$

d'où il suit que l'on a $c = -\lambda \sin \theta$ et $d = \lambda \cos \theta$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. L'égalité $\|\rho(\vec{e}_2)\|^2 = 1$ implique que $|\lambda| = 1$, et l'égalité $\det(\rho) = 1$ exprimée dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) implique finalement que $\lambda = 1$. On a donc :

$$\text{Mat}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\rho) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Il reste à voir que si (\vec{e}_1', \vec{e}_2') est une autre base orthonormée directe de E alors la matrice de ρ est la même dans (\vec{e}_1', \vec{e}_2') que dans (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Pour ceci on remarque que la matrice P des coordonnées de (\vec{e}_1', \vec{e}_2') dans (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est la matrice dans (\vec{e}_1, \vec{e}_2) d'une isométrie directe (définie par $\vec{e}_1 \mapsto \vec{e}_1', \vec{e}_2 \mapsto \vec{e}_2'$) : il existe donc un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{(\vec{e}_1', \vec{e}_2')}(\rho) &= P \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cos \theta & -(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \sin \theta \\ (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \sin \theta & (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. \square

Une isométrie directe de E est aussi appelée une *rotation* (vectorielle quand il est besoin de le préciser). On appellera le θ défini par la proposition ci-dessus *l'angle* de la rotation ρ . Ce dernier dépend de l'orientation choisie : si l'on prend l'orientation inverse, l'angle est déterminé par la matrice de ρ dans la base (\vec{e}_2, \vec{e}_1) qui est

$$\text{Mat}_{(\vec{e}_2, \vec{e}_1)}(\rho) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et est donc égal à $-\theta$.

Pour les isométries indirectes on a le résultat suivant.

Proposition II.3 *Soit σ une isométrie vectorielle indirecte de E . Il existe une base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) de E dans laquelle la matrice de σ est*

$$\text{Mat}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Soit \vec{v} un vecteur unitaire quelconque de E . On suppose d'abord que $\sigma(\vec{v}) \neq -\vec{v}$. On va montrer que la base orthonormée (\vec{e}_1, \vec{e}_2) définie par

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{v} + \sigma(\vec{v})\|}(\vec{v} + \sigma(\vec{v})), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\|\vec{v} - \sigma(\vec{v})\|}(\vec{v} - \sigma(\vec{v}))$$

convient (on laisse au lecteur le soin de vérifier que ces deux vecteurs forment bien une base orthonormale). Soit \vec{u} un vecteur unitaire orthogonal à \vec{v} , on écrit :

$$\sigma(\vec{v}) = a\vec{v} + b\vec{u}$$

et il suit (par un calcul similaire au précédent, en utilisant le fait que σ est indirecte) que $a^2 + b^2 = 1$ et aussi que :

$$\sigma(\vec{u}) = b\vec{v} - a\vec{u}.$$

On peut maintenant calculer :

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{v} + \sigma(\vec{v})) &= \sigma(\vec{v}) + a\sigma(\vec{v}) + b\sigma(\vec{u}) \\ &= \sigma(\vec{v}) + a^2\vec{v} + ab\vec{u} + b^2\vec{v} - ab\vec{u} \\ &= \sigma(\vec{v}) + (a^2 + b^2)\vec{v} = \vec{v} + \sigma(\vec{v}). \end{aligned}$$

On a ainsi $\sigma(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$. Comme σ est une isométrie elle préserve l'orthogonal $\mathbb{R}\vec{e}_2$ de \vec{e}_1 , c'est-à-dire qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma(\vec{e}_2) = \lambda\vec{e}_2$. Comme de plus $\|\sigma(\vec{e}_2)\| = \|\vec{e}_2\|$ il vient $|\lambda| = 1$, et vu que $\sigma \neq \text{Id}$ on a forcément $\lambda \neq 1$, d'où finalement $\sigma(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$.

Dans le cas où $\sigma(\vec{v}) = -\vec{v}$, en prenant un vecteur \vec{w} unitaire orthogonal à σ il est évident que la base (\vec{w}, \vec{v}) convient. \square

Noter que les bases orthonormées de E dans lesquelles la matrice de σ est celle donnée ci-dessus sont exactement $(\vec{e}_1, \vec{e}_2), (-\vec{e}_1, \vec{e}_2), (-\vec{e}_1, -\vec{e}_2)$ et $(\vec{e}_1, -\vec{e}_2)$. On aurait pu aussi donner une preuve moins explicite du théorème en observant que le polynôme caractéristique de σ est forcément égal à $X^2 - 1$ (d'où la conclusion suit immédiatement : les espaces propres doivent être orthonormaux puisque σ est une isométrie). On peut aussi donner une preuve plus explicite, en remarquant que la matrice de σ dans une base orthonormée doit être de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dont $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$ et $(-\sin(\theta/2), \cos(\theta/2))$ sont des vecteurs propres.

La droite fixe $\ker(\sigma - \text{Id})$ est souvent appelée *l'axe* de σ .

II.2.2 Isométries affines directes

Proposition II.4 *Toutes les isométries directes dont la partie linéaire est non-triviale (autrement dit qui ne sont pas des translations) de \mathcal{E} ont un point fixe.*

Démonstration : Soit r une isométrie directe différente de l'identité. Soit ρ sa partie linéaire et χ_ρ son polynôme caractéristique. D'après la proposition II.2 on a :

$$\chi_\rho(X) = \begin{vmatrix} X - \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & X - \cos \theta \end{vmatrix} = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

dont 1 n'est une racine que si $e^{i\theta} = 1$, autrement dit $\theta = 0 \pmod{2\pi}$. Sous l'hypothèse que r n'est pas une translation on a donc $\ker(\rho - \text{Id}) = \{0\}$, et il suit par la proposition I.7 que r a nécessairement un point fixe. \square

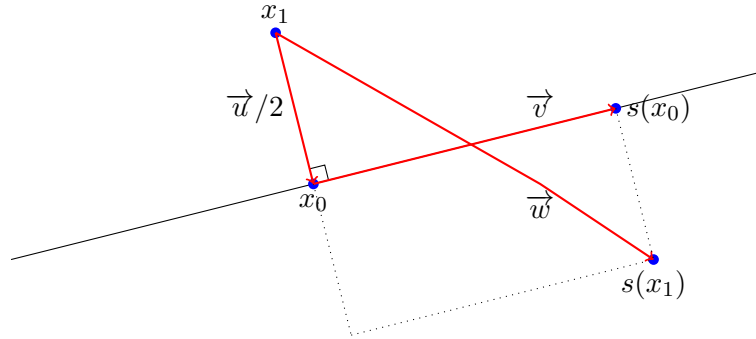
On appelle ainsi une isométrie directe de \mathcal{E} une rotation quand elle n'est pas une translation. Son point fixe sera aussi appelé son *centre*, et quand \mathcal{E} est orienté on désignera par son *angle* celui de sa partie linéaire.

II.2.3 Isométries affines indirectes

Contrairement aux isométries directes, les isométries indirectes peuvent ne pas avoir de point fixe.

Proposition II.5 *Soit s une symétrie indirecte de \mathcal{E} , on note σ sa partie vectorielle et $D = \ker(\sigma - \text{Id})$ la droite des vecteurs fixes de cette dernière. Il existe un point $x_0 \in \mathcal{E}$ et un vecteur $\vec{v} \in D$ tels que s préserve la droite $x_0 + D$, sur laquelle elle agit comme la translation de vecteur \vec{v} (en particulier, si $\vec{v} = 0$ alors s est la symétrie orthogonale affine par rapport à la droite $x_0 + D$).*

Démonstration : On fixe arbitrairement une origine x_1 et on écrit $s(x) = x_1 + \sigma(\overrightarrow{x_1x}) + \vec{w}$. Soit π la projection orthogonale (vectorielle) sur $\ker(\sigma - \text{Id})$; par la proposition I.20 s a un point fixe si et seulement si $\vec{v} = \pi(\vec{w}) = 0$. Dans le cas contraire, soient $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ et $x_0 = x_1 + \vec{u}/2$. La situation est illustrée par cette figure :



On a $\sigma(\vec{u}) = -\vec{u}$ et il suit que pour tout $x \in \mathcal{E}$ on a :

$$\begin{aligned} s(x) &= x_1 + \sigma(\overrightarrow{x_1x}) + \vec{w} = x_0 + \sigma(\overrightarrow{x_0x}) + (\sigma(\overrightarrow{x_0x_1}) + \overrightarrow{x_1x_0}) + \vec{w} \\ &= x_0 + \sigma(\overrightarrow{x_0x}) + \vec{v} \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve. \square

Dans le cas où s n'a pas de point fixe on l'appelle une *symétrie glissée* de vecteur \vec{v} et d'axe $\mathcal{D} = x_0 + D$.

II.2.4 Composition des isométries

Le résultat suivant donne le type de la composée de deux isométries en fonction de leurs angles respectifs (noter qu'il ne donne pas d'information sur la location du centre de la composée, ou son vecteur de translation le cas échéant—se reporter aux exercices pour cela).

Proposition II.6 *Soit \mathcal{E} un plan euclidien orienté. Si r, r' sont des rotations vectorielles de E d'angles respectifs θ et θ' alors $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$ si $\theta + \theta' \neq 0 \pmod{2\pi}$ et une translation sinon.*

Démonstration : Le résultat se ramène immédiatement au cas vectoriel, qui a lui-même été vu dans le cours du premier semestre (on rappelle que sa démonstration se ramène, en utilisant la proposition II.2, aux lois d'addition (II.1.1), (II.1.2) pour le cosinus et le sinus). \square

Pour la composée de symétries on a le résultat suivant :

Proposition II.7 *Soit \mathcal{E} un plan euclidien. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ des droites non-parallèles de \mathcal{E} , \vec{v}, \vec{v}' des vecteurs directeurs respectifs de celles-ci et $\{x_0\} = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$. Soient s, s' les symétries orthogonales de droite fixes respectives \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Soit r une rotation de centre x_0 telle que $r(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$. On a $s' \circ s = r^2$*

Démonstration : Soient \vec{v} un vecteur directeur unitaire de \mathcal{D} , ρ la partie linéaire de r . Il suffit de montrer que $\sigma'(\sigma(\vec{v})) = \rho^2(\vec{v})$. En effet, on sait que $s' \circ s$ est une isométrie directe qui fixe x_0 , et l'isométrie directe dont la partie linéaire envoie un vecteur unitaire donné (ici \vec{v}) sur un autre (ici $\rho^2(\vec{v})$) est uniquement déterminée (dans ce cas c'est donc r^2).

Comme $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$ on a $\vec{v} \neq \pm \rho(\vec{v})$ donc ces deux vecteurs unitaires ne sont pas colinéaires et il suffit de vérifier les deux égalités

$$\langle \sigma'(\vec{v}), \vec{v} \rangle = \langle \rho^2(\vec{v}), \vec{v} \rangle, \quad \langle \sigma'(\vec{v}), \rho(\vec{v}) \rangle = \langle \rho^2(\vec{v}), \rho(\vec{v}) \rangle.$$

Commençons par calculer $\sigma'(\vec{v})$: la projection orthogonale de \vec{v} sur \mathcal{D}' est donnée par $\langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle \rho(\vec{v})$, et si \vec{u} désigne la projection de \vec{v} sur la droite orthogonale à \mathcal{D}' on a ainsi $\vec{u} = \vec{v} - \langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle \rho(\vec{v})$.

Il suit que

$$\sigma'(\vec{v}) = \vec{v} - 2\vec{u} = -\vec{v} + 2\langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle \rho(\vec{v}).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \sigma'(\vec{v}), \rho(\vec{v}) \rangle &= -\langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle + 2\langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle \langle \rho(\vec{v}), \rho(\vec{v}) \rangle \\ &= \langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle = \langle \rho^2(\vec{v}), \rho(\vec{v}) \rangle \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve de la deuxième égalité. Pour prouver la première on remarque l'on a $\text{tr}(\rho) = 2\langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle$ (ceci se calcule immédiatement en remarquant que si ρ_0 désigne la rotation d'angle $\pi/2$, alors $\vec{v}, \rho_0(\vec{v})$ est une base orthonormale de E et on a $\rho_0 \circ \rho = \rho \circ \rho_0$). Par le théorème de Cayley–Hamilton il suit que

$$\rho^2 - \langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle \rho + \text{Id} = 0$$

et en particulier

$$\langle \rho^2(\vec{v}), \vec{v} \rangle = 2\langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle - 1$$

(on remarque que ceci est en fait la loi de doublement d'angle pour le cosinus). Il suit que :

$$\begin{aligned}\langle \sigma'(\vec{v}), \vec{v} \rangle &= 2\langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle^2 - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= 2\langle \rho(\vec{v}), \vec{v} \rangle^2 - 1 = \langle \rho^2(\vec{v}), \vec{v} \rangle\end{aligned}$$

ce qui prouve la première égalité et finit la preuve de la proposition. \square

On remarque que si r_1, r_2 sont deux rotations fixant x et telles que $r(\mathcal{D}) = \mathcal{D}' = r'(\mathcal{D})$ alors $r_1^{-1} \circ r_2$ est une rotation fixant \mathcal{D} , ce qui force $r_1 = \pm r_2$ (c'est-à-dire que les angle de r_1 et r_2 diffèrent d'un multiple entier de π) et montre que si r est choisie comme dans l'énoncé ci-dessus alors r^2 est bien déterminée.

II.3 Modèle complexe du plan euclidien

Dans cette section on suppose que \mathcal{E} est l'espace affine (réel!) \mathbb{C} . On le munit d'une structure euclidienne et d'une orientation en choisissant comme base orthonormée directe $(1, i)$. On voit facilement que le produit scalaire est donné par

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(\bar{w}z)$$

et on a encore $\|z\| = \sqrt{\bar{z}z} = |z|$.

Proposition II.8 *Les isométries directes (respectivement indirectes) de E sont exactement les applications de la forme $z \mapsto e^{i\theta}z$ (respectivement $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$) pour $\theta \in \mathbb{R}$.*

Démonstration : Une application \mathbb{R} -linéaire $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme

$$z \mapsto az + b\bar{z} \tag{II.3.1}$$

pour des complexes a, b (ces applications forment un sous-espace vectoriel de dimension 4 des applications linéaires). Il faut vérifier qu'une telle application est isométrique si et seulement si $|a| = 1, b = 0$ ou $a = 0, |b| = 1$ (on vérifie facilement qu'elles sont alors respectivement directe et indirecte).

L'application (II.3.1) est une isométrie si et seulement si on a

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z|^2 = |az + b\bar{z}|^2 = |a|^2|z|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b}z^2) + |b|^2|z|^2.$$

En prenant $z^2 = i\bar{a}b$ on obtient que $|a|^2 + |b|^2 = 1$, en prenant $z^2 = \bar{a}b$ il suit que $|ab|^2 = 0$. On a donc bien $a = 0$ ou $b = 0$ et l'autre est alors de module 1. \square

On peut aussi démontrer la proposition en observant que $z \mapsto e^{i\theta}z$ (respectivement $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$) est l'application linéaire dont la matrice dans $(1, i)$ est $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (respectivement $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$), c'est-à-dire la rotation d'angle θ (respectivement la symétrie d'axe $e^{i\theta/2}\mathbb{R}$).

En ce qui concerne les isométries affines on a la description suivante.

Proposition II.9 *La rotation de \mathcal{E} de centre z_0 et d'angle θ est l'application $z \mapsto e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$. La symétrie (glissée) d'axe $z_0 + e^{i\theta}\mathbb{R}$ (et de vecteur $re^{i\theta}$, $r > 0$) est l'application $z \mapsto e^{2i\theta}(\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0$ ($z \mapsto e^{2i\theta}(\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0 + re^{i\theta}$).*

II.4 Angles

Dans cette section on suppose que \mathcal{E} est orienté.

Définition II.1 Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E \setminus \{0\}$. Il existe une unique rotation ρ de E telle que

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \rho \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right).$$

L'angle orienté de \vec{u} à \vec{v} , noté (\vec{u}, \vec{v}) , est alors par définition l'angle de ρ (pour l'orientation choisie de E); c'est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Un changement d'orientation transforme évidemment les angles orientés en leurs opposés.

Proposition II.10 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \setminus \{0\}$. On a :

- (i) $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$;
- (ii) $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$;
- (iii) $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{u}) = 2\pi$.
- (iv) Si ϕ est une isométrie directe (respectivement indirecte) de E alors $(\phi(\vec{u}), \phi(\vec{v})) = (\vec{u}, \vec{v})$ (respectivement $-(\vec{u}, \vec{v})$).

Démonstration : Pour simplifier la notation on suppose $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$. Soient ρ, ρ', ρ'' les rotations telles que $\rho(\vec{u}) = \vec{v}$, $\rho'(\vec{v}) = \vec{w}$ et $\rho''(\vec{w}) = \vec{u}$. Le point (i) suit du fait que l'on a $\rho'' = \rho' \circ \rho$, le point (ii) de ce que $\rho^{-1}(\vec{v}) = \vec{u}$ et le point (iii) de $\rho'' \circ \rho' \circ \rho(\vec{u}) = \vec{u}$, d'où il suit que $\rho'' \circ \rho' \circ \rho = \text{Id}$.

Pour le point (iv) on observe que l'on a :

$$\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}(\phi(\vec{u})) = \phi(\vec{v}).$$

Si ϕ est directe on a $\phi \circ \rho = \rho \circ \phi$ et il suit que $(\rho(\phi(\vec{u})), \phi(\vec{v})) = (\phi(\vec{v}), \phi(\vec{u})) = (\phi(\vec{u}), \phi(\vec{v})) = (\vec{u}, \vec{v})$.

Si ϕ est indirecte on observe que $\phi \circ \rho \circ \phi^{-1} = \rho^{-1}$ (ce qui suit par exemple du calcul matriciel

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B(\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \text{Mat}_B(\rho^{-1}) \end{aligned}$$

en choisissant avec la proposition II.3 une base B diagonalisant ϕ) et donc que $(\phi(\vec{u}), \phi(\vec{v})) = -(\vec{u}, \vec{v})$. \square

La proposition suivante permet de déterminer un angle au signe près en fonction du produit scalaire.

Proposition II.11 Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et θ l'angle (\vec{u}, \vec{v}) . On a :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|}.$$

Démonstration : Soit ρ la rotation de E d'angle θ (défini modulo 2π). Par définition de θ il existe un $\lambda \in]0, +\infty[$ tel que l'on ait

$$\rho(\vec{v}) = \lambda \vec{u} \text{ ou } \lambda \rho(\vec{u}) = \vec{v};$$

et on voit immédiatement que :

$$\lambda = \frac{\|\rho(\vec{v})\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}. \quad (\text{II.4.1})$$

Soit $B = (e_1, e_2)$ l'unique base orthonormée directe de E dont le premier vecteur est $e_1 = \vec{v}/\|\vec{v}\|$. Par la proposition II.2 on a :

$$\text{Mat}_B(\rho) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et comme $\vec{u} = \lambda\rho(\vec{v}) = \lambda\|\vec{v}\|\rho(e_1)$ il suit que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle \lambda\|\vec{v}\|(\cos(\theta)e_1 \pm \sin(\theta)e_2), \vec{v} \rangle \\ &= \lambda \cos(\theta)\|\vec{v}\|\langle e_1, \vec{v} \rangle = \lambda \cos(\theta)\|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

L'égalité voulue est alors une conséquence immédiate de (II.4.1). \square

Bissectrices

Définition II.2 Soient $x \in \mathcal{E}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}$. La bissectrice des demi-droites $x + \mathbb{R}_+ \vec{u}, x + \mathbb{R}_+ \vec{v}$ est l'unique droite \mathcal{D} passant par x telle que $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$ pour tout vecteur directeur \vec{w} de \mathcal{D} .

L'unicité d'une telle droite est évidente : si $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ vérifient les hypothèses et \vec{w}, \vec{w}' sont des vecteurs directeurs pour chacune il vient :

$$(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}') + (\vec{w}', \vec{w}) = (\vec{w}', \vec{v}) + (\vec{w}', \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{v}) + 2(\vec{w}', \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + 2(\vec{w}', \vec{w})$$

d'où il suit que $2(\vec{w}, \vec{w}') = 0$, c'est-à-dire que \vec{w} et \vec{w}' sont colinéaires (positivement si l'angle est 0 et négativement s'il est π).

La proposition suivante donne des caractérisations alternatives de la bissectrice (voir aussi l'exercice 13) ; en particulier la première prouve son existence.

Proposition II.12 Avec les notations de la définition ci-dessus, on a :

(i) $\mathcal{D} = x + \mathbb{R}\vec{w}$ où $\vec{w} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$;

(ii) \mathcal{D} est l'unique droite telle que $s(x + \mathbb{R}_+ \vec{u}) = x + \mathbb{R}_+ \vec{v}$, où s est la réflexion d'axe \mathcal{D} .

Démonstration : Pour démontrer que i définit bien la bissectrice il suffit de montrer que $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$. On vérifie facilement avec la proposition II.11 que les cosinus sont égaux. Si les angles sont opposés on obtient que $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, autrement dit \vec{u} et \vec{v} sont positivement colinéaires : en-dehors de ce cas particulier on a donc démontré cette partie de la proposition. Il est laissé à la lectrice de démontrer que la bissectrice de deux demi-droites égales est la droite qu'elles portent.

Pour démontrer que la bissectrice vérifie ii on note s' la symétrie d'axe $x + \mathbb{R}\vec{u}$. $s \circ s'$ est la rotation de centre x et angle $2(\vec{u}, \vec{v})$: en particulier $s(x + \mathbb{R}_+ \vec{u}) = x + \mathbb{R}_+ \vec{v}$ si et seulement si $2(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v})$, c'est-à-dire $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$. \square

II.5 Triangles

Dans cette section \mathcal{E} est orienté.

II.5.1 Définitions

Définition II.3 Un triangle T est un triplet (non ordonné) $\{x, y, z\} \subset \mathcal{E}$ de points qui est non-aligné (c'est-à-dire que (\vec{xy}, \vec{yz}) est linéairement indépendante).

Les sommets de T sont les points x, y, z ; les côtés de T sont les segments $[xy]$, $[yz]$ et $[zx]$.

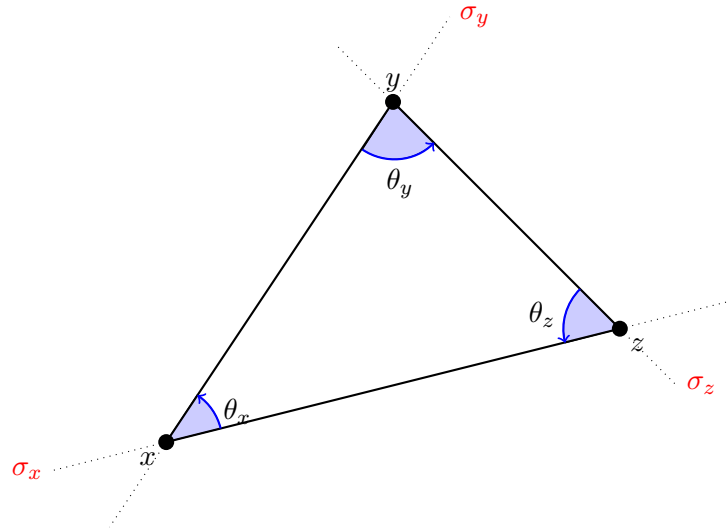
L'angle de T en x (respectivement en y, z) est l'angle $\theta_x = (\vec{xy}, \vec{xz})$ (respectivement $\theta_y = (\vec{yx}, \vec{yz})$ et $\theta_z = (\vec{zy}, \vec{zx})$) si (\vec{xy}, \vec{xz}) est une base directe.

On remarque que (\vec{zy}, \vec{zx}) est directe si et seulement si (\vec{yx}, \vec{yz}) l'est ou (\vec{zy}, \vec{zx}) l'est (la matrice de changement de base de l'une à l'autre est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ou son inverse).

Les angles d'un triangle ont toujours un représentant dans $]0, \pi[$ (en effet, si $\vec{u} \in E \setminus 0$ et ρ est une rotation la famille $\vec{u}, \rho(\vec{u})$ est une base directe si et seulement si l'angle de ρ est dans $]0, \pi[$. Le résultat suivant est fondamental.

Proposition II.13 Soit T un triangle et $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$ des représentants des angles $\theta_x, \theta_y, \theta_z$. Alors $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Démonstration : (Voir aussi l'exercice 12.) On suppose que (\vec{xz}, \vec{xy}) est directe. Soient σ_x, σ_y et σ_z les symétries (vectorielles) d'axes respectifs $\mathbb{R}\vec{xz}$, $\mathbb{R}\vec{xy}$ et $\mathbb{R}\vec{yz}$. Alors $\sigma_y \circ \sigma_x$ (respectivement $\sigma_z \circ \sigma_y$ et $\sigma_x \circ \sigma_z$) est la rotation d'angle $2\theta_x$ (respectivement $2\theta_y$ et $2\theta_z$) ; les notations utilisées sont celles de la figure suivante :



On a :

$$(\sigma_x \circ \sigma_z) \circ (\sigma_z \circ \sigma_y) \circ (\sigma_y \circ \sigma_x) = \sigma_x \circ \sigma_x = \text{Id}$$

et il suit que $2(\theta_x + \theta_y + \theta_z) = 0 \pmod{2\pi}$. Comme $0 < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ on en déduit que $\alpha + \beta + \gamma$ est égal à π ou à 2π : il faut exclure le second cas.

Pour ceci il suffit de montrer que $\alpha + \beta < \pi$: ceci est forcé par le fait que les demi-droites $x + \mathbb{R}_+ \vec{xz}$ et $y + \mathbb{R}_+ \vec{yz}$ s'intersectent en z (voir l'exercice 10). \square

Triangles remarquables

Un triangle T est dit :

- *Isocèle* en un sommet x si les côtés de T adjacents à x ont même longueur ;
- *Équilatéral* s'il est isocèle en tous ses sommets ;
- *Rectangle* en x si son angle en x est droit.

Proposition II.14 *Si le triangle $T = \{x, y, z\}$ est isocèle en x alors ses angles θ_y et θ_z en y et z sont égaux.*

Démonstration : Il suffit de montrer que $\cos \theta_y = \cos \theta_z$. Pour ceci on observe que :

$$\begin{aligned} \langle \vec{xz} + \vec{xy}, \vec{yz} \rangle &= \langle \vec{xz} + \vec{xy}, \vec{xz} - \vec{xy} \rangle \\ &= \|\vec{xz}\|^2 - \|\vec{xy}\|^2 = 0 \end{aligned}$$

et donc $\langle \vec{xz}, \vec{yz} \rangle = -\langle \vec{xy}, \vec{yz} \rangle$. On en déduit encore que $\langle \vec{xz}, \vec{yz} \rangle = \langle \vec{yx}, \vec{yz} \rangle$ et le résultat suit de la proposition II.11. \square

Le résultat suivant est parfois utilisé pour définir le cosinus et le sinus.

Proposition II.15 *Soit $T = \{x, y, z\}$ un triangle rectangle en z et θ son angle en x . On a :*

$$\cos \theta = \frac{\|\vec{xz}\|}{\|\vec{xy}\|}, \quad \sin(\theta) = \frac{\|\vec{yz}\|}{\|\vec{xy}\|}.$$

Démonstration : La première égalité suit de la proposition II.11 : on a d'après cette dernière :

$$\cos(\theta) \cdot \|\vec{xy}\| \cdot \|\vec{xz}\| = \langle \vec{xy}, \vec{xz} \rangle = \langle \vec{xy}, \vec{xy} + \vec{yz} \rangle = \|\vec{xy}\|^2.$$

La seconde égalité suit de la première en échangeant x et y vu que l'angle θ' de T en y vérifie $\theta' = \pi/2 - \theta$ par la proposition II.13. \square

II.5.2 Angles inscrits

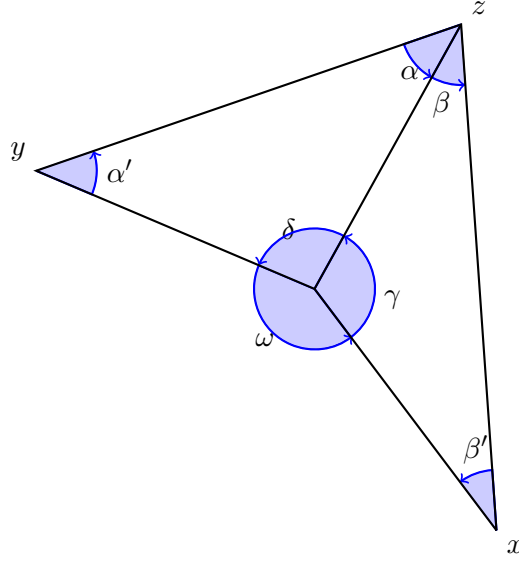
Le théorème des angles inscrits est l'énoncé suivant.

Proposition II.16 *Soient $x_0 \in \mathcal{E}$ et $x, y, z \in \mathcal{E}$ tels que*

$$d(x_0, x) = d(x_0, y) = d(x_0, z) > 0.$$

Soient $\theta = (\vec{x_0x}, \vec{x_0y})$ et $\omega = (\vec{zx}, \vec{zy})$. Alors $\omega = 2\theta$.

Démonstration : La situation est illustrée par la figure suivante :



On fait tous les calculs modulo 2π . Les triangles $\{x, x_0, z\}$ et $\{y, x_0, z\}$ sont tous deux isocèles en x_0 et il suit par la proposition II.14 que $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Il suit d'après la proposition II.13 que l'on a $\gamma = \pi - 2\beta$ et $\delta = \pi - 2\alpha$. Comme $\omega + \gamma + \delta = 2\pi$ il suit bien que $\omega = 2(\alpha + \beta) = 2\theta$. \square

On utilise souvent cet énoncé sous la forme suivante.

Proposition II.17 *Si x, x', y, z sont quatre points cocycliques alors les angles en x du triangle $\{x, y, z\}$ et en x' du triangle $\{x', y, z\}$ sont égaux.*

Démonstration : l'hypothèse signifie qu'il existe un $x_0 \in \mathcal{E}$ équidistant des quatre points. Si ω désigne l'angle en x_0 du triangle $\{x_0, y, z\}$ et θ (respectivement θ') l'angle en x du triangle $\{x, y, z\}$ (respectivement en x' du triangle $\{x', y, z\}$) on a alors $\theta = \omega/2 = \theta'$ en appliquant pour chaque égalité la proposition II.16. \square

Une conséquence du théorème des angles inscrits est la caractérisation suivante des triangles rectangles.

Proposition II.18 *Un triangle $\{x, y, z\}$ est rectangle en x si et seulement si le cercle dont le diamètre est $[yz]$ passe par x .*

II.5.3 Droites et points remarquables

Définition II.4 *Soit T un triangle ; si x est un sommet de T et y, z les sommets restants on appelle :*

- médiane de T issue de x la droite passant par x et par le milieu du côté opposé $[yz]$;
- médiatrice de T du côté $[yz]$ de T la droite orthogonale à (yz) passant par le milieu de $[yz]$.
- hauteur de T issue de x la droite passant par x et orthogonale à la droite (yz) ;
- bissectrice de T issue de x la bissectrice de l'angle de T en x ;

Proposition II.19 *Les médiatrices de T (respectivement ses médianes, ses hauteurs et ses bissectrices) sont concourantes.*

Avant de donner la démonstration de cette proposition on introduit un peu plus de vocabulaire.

Définition II.5

- Le point g à l'intersection des médianes de T est appelé centre de gravité de T .
- Le point o à l'intersection des médiatrices de T est appelé centre du cercle circonscrit de T ; la distance $d(x, o) = d(y, o) = d(z, o)$ (cf. plus bas) est appelée rayon du cercle circonscrit de T , usuellement noté R .
- Le point h à l'intersection des hauteurs de T est appelée orthocentre de T .
- Le point c à l'intersection des bissectrices de T est appelée centre du cercle inscrit de T ; la distance entre m et n'importe laquelle des droites $(xy), (yz), (zx)$ (cf. l'exercice 13) est appelée rayon du cercle inscrit de T (usuellement noté r).

Démonstration : (proposition II.19) On commence par montrer que les médianes sont concourantes en le point $g = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z$. En effet, si x' désigne le milieu de $[yz]$ on a par associativité des barycentres que

$$g = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x'$$

et donc g est sur la médiane (xx') . De même si y', z' sont les milieux respectifs de $[zx], [xy]$ on obtient que g est sur chacune des médianes $(yy'), (zz')$. Il suit finalement que les médianes de T sont concourantes en g .

Soit o le point d'intersection des médiatrices de T orthogonales à (xy) et (yz) (noter que ce point existe puisque les droites (xy) et (yz) , et donc aussi les droites orthogonales, ne sont pas parallèles). Il faut montrer que o est aussi sur la médiatrice de T orthogonale à (xz) . Pour ceci on utilise la caractérisation suivante des médiatrices.

Lemme Si $p \neq q \in \mathcal{E}$ et \mathcal{D} est la médiatrice de $[pq]$ alors

$$\mathcal{D} = \{a \in \mathcal{E} : d(a, p) = d(a, q)\}.$$

Démonstration : Soit $a \in \mathcal{E}$. Soit \vec{u}, \vec{v} les projections orthogonales de \vec{ap} sur $\mathbb{R}\vec{pq}$ et son orthogonal, de sorte que $\vec{ap} = \vec{u} + \vec{v}$. Soit $\vec{w} = \vec{u} + \vec{pq}$, de sorte que l'on ait $\vec{aq} = \vec{u} + \vec{w}$. On a alors :

$$d(a, p)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2, \quad d(a, q)^2 = \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{pq} + \vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

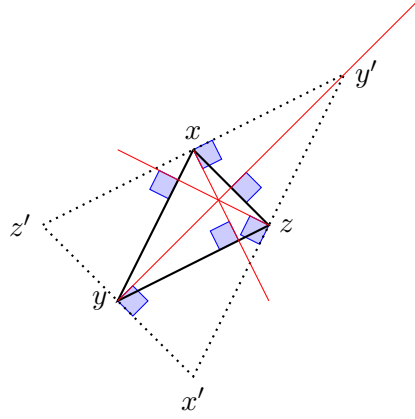
On voit que l'on a $d(a, p) = d(a, q)$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{pq} - \vec{u}$, c'est-à-dire que $\vec{u} = \vec{pq}/2$ ou encore que a est sur la médiatrice de $[pq]$. \square

Il suit donc du fait que o soit sur les deux premières médiatrices que l'on a

$$d(o, x) = d(o, y) \text{ et } d(o, y) = d(o, z).$$

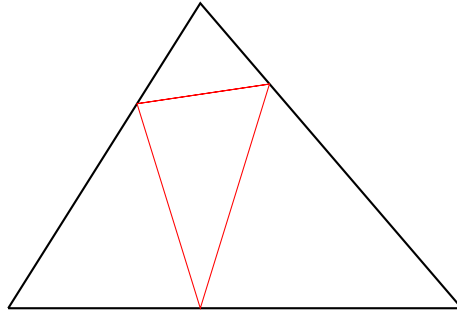
Il vient alors $d(o, x) = d(o, z)$, c'est-à-dire que o est aussi sur la troisième médiatrice.

Pour montrer que les hauteurs sont concourantes on introduit les points $x' = z + \vec{x}\vec{y} = y + \vec{x}\vec{z}$, $y' = x + \vec{y}\vec{z} = z + \vec{y}\vec{x}$ et $z' = x + \vec{z}\vec{y} = y + \vec{z}\vec{x}$.



Comme $(x'y')$ et (xy) sont parallèles on voit que la hauteur de T issue de z est orthogonale à $(x'y')$ et comme z est le milieu de $[x'y']$ c'est en fait la médiatrice de $T' = \{x', y', z'\}$ orthogonale à $(x'y')$. De même les hauteurs de T issues de y, x sont les médiatrices de T' orthogonales respectivement à $(z'x')$ et $(y'z')$, et ces trois droites sont donc concourantes en le centre du cercle circonscrit de T' .

Il reste à montrer que les bissectrices sont concourantes (voir aussi l'exercice 13 pour une preuve plus simple). Pour ceci on introduit les droites $\mathcal{D}_x, \mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z$ orthogonales aux bissectrices en les points x, y, z respectivement, et le triangle $T' = \{x', y', z'\}$ (où x' est à l'intersection de \mathcal{D}_y et \mathcal{D}_z , etc.) qu'elles forment (en noir sur la figure) :



On va démontrer que les bissectrices du triangle T sont les hauteurs du triangle T' , d'où il suit par ce qui précède qu'elles sont concourantes. On doit démontrer que (xx') est orthogonale à \mathcal{D}_x , autrement dit qu'elle est égale à la bissectrice de T en x . Pour ceci on note x'' le point à l'intersection de (xx') et (yz) . Le résultat que l'on veut montrer équivaut à ce que l'angle en x du triangle $\{x'', x, y\}$ est égal à $\theta_x/2$.

Soit p le point d'intersection des bissectrices de T en y, z . Comme les triangles $\{x', p, y\}$ et $\{x', p, z\}$ sont rectangles en y, z respectivement il suit par la proposition II.18 que les points x', p, y, z sont cocycliques (ils sont tous sur le cercle de diamètre $[x'p]$). Par le théorème des angles inscrits (Proposition II.17) on obtient alors que l'angle en x' du triangle $\{x', p, y\}$ est égal à l'angle en z du triangle $\{z, p, y\}$, autrement dit $\theta_z/2$. Il suit que l'angle en x'' du triangle $\{x', x'', y\}$ est égal à

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_y}{2} \right) - \frac{\theta_z}{2} = \frac{1}{2}(\pi + \theta_y - \theta_z).$$

Il vient encore que l'angle en x de $\{x'', x, y\}$ est égal à :

$$\pi - \theta_y - \left(\pi - \frac{1}{2}(\pi + \theta_y - \theta_z) \right) = \frac{1}{2}(\pi - \theta_y - \theta_z) = \frac{\theta_x}{2}$$

ce qui termine la démonstration. \square

II.5.4 Propriétés métriques

L'égalité contenue dans le résultat suivant est connue sous le nom de théorème d'Al-Kashi ou de loi du cosinus selon les références.

Proposition II.20 Soit $T = \{x, y, z\}$ un triangle de \mathcal{E} . On note θ_x l'angle de T en x et ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z les longueurs respectives des côtés $[yz], [zx]$ et $[xy]$ de T . On a alors :

$$\ell_x^2 = \ell_y^2 + \ell_z^2 - 2\ell_y\ell_z \cos(\theta_x).$$

Démonstration : Soient $\vec{u} = \vec{yz}$, $\vec{v} = \vec{xy}$ et $\vec{w} = \vec{xz}$. On a :

$$\ell_y = \|\vec{v}\|, \ell_z = \|\vec{w}\|, \ell_x = \|\vec{u}\|, \cos \theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

(la dernière égalité suivant de la proposition II.11). D'autre part $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ et il suit que :

$$\begin{aligned} \ell_x^2 &= \|\vec{w} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{w}\|^2 - 2\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \\ &= \ell_z^2 - 2\ell_y\ell_z \cos(\theta_x) + \ell_y^2 \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve. \square

Le cas particulier où $\theta_x = \pi/2$ (c'est-à-dire que T est rectangle en x) admet l'énoncé plus simple (mais souvent utile) :

$$\ell_x^2 = \ell_y^2 + \ell_z^2.$$

Il est connu sous le nom de *Théorème de Pythagore* et prédate de beaucoup le théorème plus général d'Al-Kashi.

Le résultat suivant est connu sous le nom de loi des sinus.

Proposition II.21 Soit $T = \{x, y, z\}$ un triangle. On garde les notations de la proposition précédente et on note R le rayon du cercle circonscrit à T . On a alors :

$$\frac{\ell_x}{\sin \theta_x} = \frac{\ell_y}{\sin \theta_y} = \frac{\ell_z}{\sin \theta_z} = 2R.$$

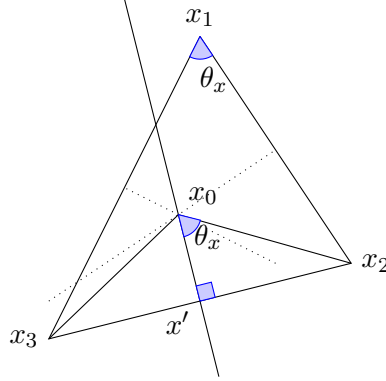
Démonstration : Soit x_0 le centre du cercle circonscrit à T , de sorte que

$$d(x_0, x_1) = d(x_0, x_2) = d(x_0, x_3).$$

On peut donc appliquer la proposition II.16 aux points $x = x_2$, $y = x_3$, $z = x_1$ et $z' = x_0$ et on obtient ainsi

$$2\theta_x = \theta.$$

où θ est la mesure de l'angle du triangle $\{x_2, x_3, x_0\}$ en x_0 . Soit x' le milieu de $[x_2x_3]$. Comme x_0 est sur la médiatrice de $[x_2x_3]$ le triangle $T' = \{x_2, x_0, x'\}$ est rectangle en x' , et comme $\{x_2, x_3, x_0\}$ est isocèle en x_0 , si θ' est la mesure de l'angle de T' en x_0 on a $\theta' = \theta/2 = \theta_x$:



On a de plus

$$\|\overrightarrow{x_2x_0}\| = R, \quad \|\overrightarrow{x_2x_3}/2\| = \ell_x/2$$

et par la proposition II.15 appliquée au triangle rectangle T' il vient finalement :

$$\sin(\theta) = \frac{\ell_x}{2R},$$

de quoi il suit immédiatement $\ell_x/\sin(\theta_x) = 2R$. On peut faire la même démonstration pour les deux autres côtés. \square

II.6 Aire

II.6.1 Notion d'aire

On se limitera ici à définir l'aire des sous-ensembles ouverts du plan. Ceci se fait de manière implicite, en définissant la fonction (à valeurs réelles) Aire sur l'ensemble des sous-ensembles ouverts bornés du plan par les conditions suivantes :

- Si \vec{u}, \vec{v} est une base orthonormée de E , $x \in \mathcal{E}$ et $a, b > 0$ on note \mathcal{P} le rectangle $\mathcal{P} = \{x + t\vec{u} + s\vec{v} : 0 < t < a, 0 < s < b\}$. On a alors $\text{Aire}(\mathcal{P}) = a \cdot b$.
- Si \mathcal{U}, \mathcal{V} sont deux ouverts bornés du plan on a

$$\text{Aire}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) = \text{Aire}(\mathcal{U}) + \text{Aire}(\mathcal{V}) - \text{Aire}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}).$$

- Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ sont trois ouverts du plan on a $\text{Aire}(\mathcal{U}) \leq \text{Aire}(\mathcal{V}) \leq \text{Aire}(\mathcal{W})$.

Ces propriétés seront suffisantes pour définir l'aire des objets que nous aurons à traiter, et on peut démontrer qu'elles caractérisent uniquement la fonction Aire. L'unicité et la première propriété impliquent immédiatement que l'aire est invariante par les isométries, autrement dit si \mathcal{U} est un ouvert de \mathcal{E} et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une isométrie on a $\text{Aire}(f(\mathcal{U})) = \text{Aire}(\mathcal{U})$.

On peut aussi définir l'aire d'un sous-ensemble fermé borné du plan comme l'aire d'une boule ouverte le contenant moins l'aire de son complémentaire dans cette boule. Attention, l'aire d'un ouvert n'est pas égale à celle de son adhérence, ni l'aire d'un fermé à celle de son intérieur : il existe des fermés d'intérieur vide et d'aire positive, ou de manière équivalente des ouverts denses (dans une boule) d'aire non totale. Pour les ensembles convexes (qui seront notre préoccupation principale dans la suite) on n'a cependant pas ce problème.

II.6.2 Aire des triangles

Proposition II.22 *Soit T un triangle et \mathcal{T} l'intérieur de son enveloppe convexe. On a les formules suivantes pour l'aire de \mathcal{T} .*

1. Si x est un sommet de T , ℓ_x est la longueur du côté de T opposé à x et h_x la longueur du segment de la hauteur de T issue de x entre x et le côté opposé on a

$$\text{Aire}(\mathcal{T}) = \frac{\ell_x h_x}{2}.$$

2. Si θ_x est la mesure de l'angle de T en x et y, z les autres sommets de T on a

$$\text{Aire}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} \ell_y \ell_z \sin(\theta_x).$$

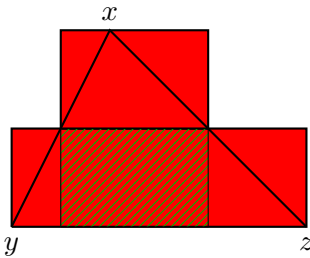
3. Si r est le rayon du cercle inscrit dans T on a

$$\text{Aire}(T) = \frac{1}{2} (\ell_x + \ell_y + \ell_z) \cdot r.$$

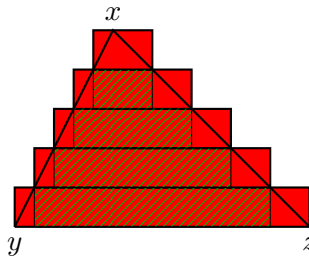
4. On a

$$\text{Aire}(T) = \frac{1}{4} \sqrt{(\ell_x + \ell_y - \ell_z)(-\ell_x + \ell_y + \ell_z)(\ell_x - \ell_y + \ell_z)(\ell_x + \ell_y + \ell_z)}.$$

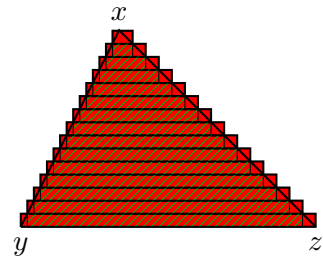
Démonstration : On démontre d'abord (1), les autres formules en découlent via les propriétés métriques du triangle établies plus haut (on ne démontrera ici que (2), les deux restantes sont laissées en exercice (voir 16 pour (3) et 17 pour (4)). On considère les deux décompositions (en rouge et hachuré vert respectivement) suivantes de \mathcal{T} en n et $n - 1$ rectangles :



$n = 2$



$n = 5$



$n = 15$

Si h_x est la hauteur du triangle en x et ℓ_x la longueur de $[xy]$ l'aire des rectangles intérieurs (verts) vaut exactement

$$A_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h}{n} \cdot \frac{j}{n} \ell$$

(le terme $h\ell j/n^2$ est l'aire du j -ième rectangle à partir du haut). La somme de Riemann $1/n \sum_{j=1}^{n-1} j/n$ tend vers $\int_0^1 t dt = 1/2$, donc on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = h\ell/2$. L'aire totale B_n des rectangles extérieurs (rouges) vaut $B_n = A_n + h\ell/n$, et on a donc aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = h\ell/2$. On a pour tout n l'encadrement

$$A_n \leq \text{Aire}(\mathcal{T}) \leq B_n$$

d'où il suit finalement que $\text{Aire}(\mathcal{T}) = h\ell/2$.

Pour démontrer (2) on applique (1) avec x remplacé par y et on, remarque que $h_y = \ell_z \sin(\theta_x)$.

□

II.7 Similitudes

Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathcal{E}$ l'homothétie de centre x et de rapport λ est l'application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par

$$\forall \vec{v} \in E f(x + \vec{v}) = x + \lambda \vec{v}.$$

C'est l'unique application affine qui fixe x et dont la partie linéaire est égale à λId . Une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est appelée une *similitude* s'il existe une isométrie g et une homothétie h de \mathcal{E} telles que $f = h \circ g$.

Proposition II.23 *Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est une similitude.
- (ii) Il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 : d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y).$$

- (iii) La partie linéaire de f préserve ou renverse les angles.

Démonstration : Montrons d'abord que si h est une homothétie de rapport $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alors elle vérifie (ii) avec $\lambda = |\mu|$. Soit x_0 le centre de h et $x, y \in \mathcal{E}$. On a :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\| = \|\overrightarrow{f(x_0)f(y)} - \overrightarrow{f(x_0)f(x)}\| \\ &= \|\overrightarrow{x_0f(y)} - \overrightarrow{x_0f(x)}\| = \|\lambda \overrightarrow{x_0y} - \lambda \overrightarrow{x_0x}\| = |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{xy}\| = \mu d(x, y). \end{aligned}$$

Il suit immédiatement que (ii) est vérifiée par les similitudes.

Montrons la réciproque : d'après le sens direct on voit que si f vérifie (ii) et h est une homothétie de rapport μ^{-1} alors $g = h^{-1} \circ f$ préserve les distances, donc est une isométrie d'après la proposition I.17. On a alors $f = h \circ g$, ce qui prouve que f est une similitude.

L'équivalence de ii et iii est une conséquence immédiate des loi du cosinus et du sinus. Commençons par démontrer que ii implique iii. Soient $x, y, z \in \mathcal{E}$ et soient θ, θ' les angles $(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz})$ et

$(\overrightarrow{f(x)f(y)}, \overrightarrow{f(x)f(z)})$: on veut montrer que $\theta = \pm\theta'$, autrement dit que $\cos\theta = \cos\theta'$. Il suit de la loi du cosinus et le fait que f multiplie les distances par λ que :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{d(x,y)^2 + d(x,z)^2 - d(y,z)^2}{d(x,y) \cdot d(x,z)} \\ \cos(\theta') &= \frac{d(f(x), f(y))^2 + d(f(x), f(z))^2 - d(f(y), f(z))^2}{d(f(x), f(y)) \cdot d(f(x), f(z))} \\ &= \frac{\lambda^2 d(x,y)^2 + \lambda^2 d(x,z)^2 - \lambda^2 d(y,z)^2}{2\lambda^2 d(x,y)d(x,z)} = \cos(\theta).\end{aligned}$$

Pour la réciproque on prend $x, y, z \in \mathcal{E}$, non-alignés. Il suffit de montrer que, si on pose

$$\lambda = d(f(x), f(y))/d(x, y).$$

alors on a aussi $\lambda = d(f(x), f(z))/d(x, z)$. Par la loi des sinus dans les triangles $\{x, y, z\}$ et $\{f(x), f(y), f(z)\}$ on a :

$$\frac{d(x, y)}{d(x, z)} = \frac{\sin(\theta_z)}{\sin(\theta_y)}, \quad \frac{d(f(x), f(y))}{d(f(x), f(z))} = \frac{\sin(\theta_z)}{\sin(\theta_y)}$$

(si f préserve les angles c'est immédiat, sinon on a $\frac{d(f(x), f(y))}{d(f(x), f(z))} = \frac{-\sin(\theta_z)}{-\sin(\theta_y)} = \frac{\sin(\theta_z)}{\sin(\theta_y)}$). Il suit que

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = \frac{d(f(x), f(z))}{d(x, z)}$$

ce qui est ce que l'on voulait démontrer. \square

L'effet des similitudes sur l'aire est bien connue (le théorème suivant peut être vu comme un cas particulier du théorème sur les changements de variable affines dans les intégrales doubles).

Proposition II.24 *Si f est une similitude de rapport λ alors pour tout ouvert \mathcal{U} de \mathcal{E} on a $\text{Aire}(f(\mathcal{U})) = \lambda^2 \text{Aire}(\mathcal{U})$.*

Démonstration : La fonction $\lambda^{-2} \text{Aire}$ vérifie toutes les propriétés de l'aire listées plus haut (cf. II.6.1—le seul point à vraiment vérifier est l'aire des rectangles, ce qui n'est pas dur) donc par l'unicité de cette dernière elle lui est égale. \square

II.7.1 Classification des triangles

Le résultat suivant répertorie les cas d'isométrie de deux triangles.

Proposition II.25 *Soient T, T' des triangles de \mathcal{E} . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe une isométrie f de \mathcal{E} telle que $f(T) = T'$;*
- (ii) *Les côtés de T et T' ont deux à deux même longueur ;*
- (iii) *Il existe des sommets x de T et x' de T' tels que l'angle de T en x et celui de T' en x' soient isométriques, et les côtés de T adjacents à x et ceux de T' adjacents à x' aient deux par deux même longueur ;*

(iv) Il existe des côtés $[x, y]$ de T et $[x', y']$ de T' ayant même longueur tels que les angles de T en x, y et ceux de T' en x', y' soient deux à deux isométriques.

Démonstration : Il est clair que i implique toutes les autres propriétés. On va d'abord démontrer que ii implique i, puis (en utilisant les égalités métriques démontrées dans les section précédentes) que les autres propriétés impliquent ii.

On suppose donc que ii est vérifiée. On note $T = \{x, y, z\}$ et $T' = \{x', y', z'\}$ de sorte que $[x, y]$, $[x', y']$ aient des longueurs égales, de même que $[y, z]$, $[y', z']$ et $[z, x]$, $[z', x']$. Soient $\vec{u} = \overrightarrow{xy}$, $\vec{v} = \overrightarrow{xz}$. On note de même $\vec{u}' = \overrightarrow{x'y'}$, $\vec{v}' = \overrightarrow{x'z'}$. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{xx'}$, ϕ l'application linéaire telle que $\phi(\vec{u}) = \vec{u}'$ et $\phi(\vec{v}) = \vec{v}'$ (qui existe et est uniquement déterminée vu que \vec{u}, \vec{v} est une base de E), et f l'application affine fixant x' de partie linéaire ϕ . Soit enfin $g = f \circ t$; on a $g(T) = T'$, il reste donc à démontrer que f (donc g) est une isométrie. Pour ce faire il suffit de constater que $\|\phi(\vec{u})\| = \|\vec{u}'\|$, $\|\phi(\vec{v})\| = \|\vec{v}'\|$ et $\langle \phi(\vec{u}), \phi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}', \vec{v}' \rangle$. On a :

$$\|\phi(\vec{u})\| = d(x', y') = d(x, y) = \|\vec{u}\|, \quad \|\phi(\vec{v})\| = d(x', z') = d(x, z) = \|\vec{v}\|$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} 2\langle \phi(\vec{u}), \phi(\vec{v}) \rangle &= \|\vec{u}' - \vec{v}'\|^2 - \|\vec{u}'\|^2 - \|\vec{v}'\|^2 \\ &= d(y', z')^2 - d(x', y')^2 - d(x', z')^2 = d(y, z)^2 - d(x, y)^2 - d(x, z)^2 \\ &= \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que iii soit vérifiée, c'est-à-dire que $\ell_x = \ell_{x'}$, $\ell_y = \ell_{y'}$ et $\theta_3 = \theta'_3$. La loi des cosinus II.20 appliquée d'abord dans T puis dans T' donne :

$$\ell_z^2 = \ell_x^2 + \ell_y^2 - 2\ell_x\ell_y\cos(\theta_3) = (\ell_{x'})^2 + (\ell_{y'})^2 - 2\ell_{x'}\ell_{y'}\cos(\theta'_3) = (\ell_{z'})^2$$

d'où il suit immédiatement que $\ell_z = \ell_{z'}$.

Enfin, supposons que le triangle satisfait à la propriété iv. On a alors $\ell_x = \ell_{x'}$ et $\theta_2 = \theta'_2$, $\theta_3 = \theta'_3$. On a alors aussi $\theta_1 = \theta'_1$ par la proposition II.13. Par la loi des sinus (proposition II.21) il vient :

$$\ell_y = \frac{\ell_x}{\sin(\theta_1)} \sin(\theta_2) = \frac{\ell_{x'}}{\sin(\theta'_1)} \sin(\theta'_2) = \ell_{y'}$$

et de même $\ell_z = \ell_{z'}$. □

On peut alors déduire facilement le critère de similitude suivant.

Proposition II.26 *Deux triangles de \mathcal{E} sont similaires (c'est-à-dire qu'il existe une similitude envoyant l'un sur l'autre) si et seulement s'ils ont les mêmes angles.*

Démonstration : Le sens direct suit immédiatement de la propriété iii dans la proposition II.23 des similitudes. Pour le sens réciproque on utilise une homothétie pour se ramener à la situation de iii dans la proposition précédente. □

La « classification » des triangles plans est alors le résultat suivant.

Proposition II.27 *Soient $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in]0, +\infty[$. Il existe un unique $\{x, y, z\}$ tel que $\ell_x = \ell_1$, $\ell_y = \ell_2$ et $\ell_z = \ell_3$ si et seulement si*

$$\ell_1 + \ell_2 > \ell_3, \quad \ell_1 + \ell_3 > \ell_2 \text{ et } \ell_2 + \ell_3 > \ell_1.$$

Ce triangle est alors unique à isométrie de \mathcal{E} près.

Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in]0, \pi[$ tels que $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. Il existe à similitude près un unique triangle dont les angles sont $\theta_i \pmod{2\pi}$.

Démonstration : Les conditions données sont nécessaires, celles sur les distances à cause de l'inégalité triangulaire et celle sur les angles à cause de la proposition II.13.

D'après la proposition II.25 ci-dessus il suffit alors dans les deux cas de démontrer l'existence d'un tel triangle. Dans le premier cas il suffit de résoudre une équation quadratique correspondant à l'intersection de deux cercles dont les centres sont à distance ℓ_1 l'un de l'autre et les rayons respectifs sont ℓ_1, ℓ_2 ; dans le deuxième une équation linéaire correspondant à l'intersection de deux demi-droites faisant des angles $\theta_1, -\theta_2$ avec un vecteur fixé (le troisième angle est le bon par la proposition II.13). \square

II.7.2 Expression en complexes

On travaille dans cette sous-section avec le plan euclidien $\mathcal{E} = \mathbb{C}$. La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition d'une similitude et de la proposition II.9.

Proposition II.28 *Les similitudes directes (respectivement indirectes) de \mathcal{E} sont exactement les applications $z \mapsto az + b$ (respectivement $z \mapsto a\bar{z} + b$) pour $a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}$.*

II.8 Polygones convexes et groupes diédraux

II.8.1 Définitions

Un polyèdre convexe en dimension deux est appelé un *polygone convexe*. Soit \mathcal{C} un polygone de \mathcal{E} . D'après le théorème 6 il existe des droites $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ et des demi-plans $\mathcal{H}_1^+, \dots, \mathcal{H}_n^+$ délimités par les \mathcal{D}_i tels que $\mathcal{C} = \bigcap_i \mathcal{H}_i^+$. Chaque intersection $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{C}$ est un intervalle compact que l'on appellera un *côté* de \mathcal{C} . Les sommets de \mathcal{C} (ses points extrémaux) sont exactement les extrémités de tels intervalles : comme chaque côté contient exactement deux sommets et chaque sommet est sur exactement deux côtés il y a autant de sommets que de côtés. Deux côtés (respectivement deux sommets) sont dits *adjacents* s'ils s'intersectent en un sommet (respectivement s'ils sont les extrémités d'un même côté).

Soit \mathcal{C} un polygone convexe et x un sommet de \mathcal{C} . Il y a exactement deux sommets y, z de \mathcal{C} adjacents à x , que l'on peut choisir de telle façon que (\vec{xy}, \vec{xz}) soit une base directe. L'*angle de \mathcal{C} en x* est alors par définition l'angle (\vec{xy}, \vec{xz}) .

Un polygone est dit *régulier* si ses angles sont deux à deux égaux, de même que les longueurs de ses côtés. Le *centre* d'un tel polygone est l'isobarycentre de ses sommets.

II.8.2 Groupes d'isométrie des polyèdres

Définition II.6 *Si \mathcal{S} est un sous-ensemble de \mathcal{C} le groupe d'isométries de \mathcal{S} , noté $G_{\mathcal{S}}$, est défini par*

$$G_{\mathcal{S}} = \{g \in \text{Isom}(\mathcal{E}) : g(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\}.$$

On vérifie immédiatement que $G_{\mathcal{S}}$ est effectivement un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathcal{E})$.

Proposition II.29 *Soit \mathcal{C} un polygone convexe ayant exactement n sommets. Alors le groupe $G_{\mathcal{C}}$ est fini, de cardinal $|G_{\mathcal{C}}| \leq 2n$. De plus on a $|G_{\mathcal{C}}| = 2n$ si et seulement si \mathcal{C} est régulier.*

Démonstration : On remarque tout d'abord que si g est une application affine de \mathcal{E} dans lui-même telle que $g(\mathcal{C}) = g(\mathcal{C})$ alors $g(S) = S$ où S est l'ensemble des sommets de \mathcal{C} , d'où il suit que g fixe le centre de \mathcal{C} . En particulier $G_{\mathcal{C}}$ ne contient que des rotations et des réflexions.

Soit $s \in G_{\mathcal{C}}$ une réflexion. Alors pour tout sommet x de \mathcal{C} , soit x est sur l'axe de s soit il existe un autre sommet y tel que l'axe de s soit la médiatrice du segment $[xy]$. En particulier l'axe de s doit rencontrer :

- (i) soit deux sommets de \mathcal{C} ;
- (ii) soit un sommet et un côté (dont elle est la médiatrice) de \mathcal{C} ;
- (iii) soit deux côtés de \mathcal{C} (elle est alors la médiatrice de chacun).

Dans chacune des situations ci-dessus l'un des sommets ou côtés de \mathcal{C} que l'axe de s rencontre détermine complètement cet axe. Il suit que $G_{\mathcal{C}}$ contient au plus n réflexions (ceci implique aussi que s'il contient une réflexion alors il contient au plus $n - 1$ rotations non-triviales mais on va prouver ce fait directement dans la suite).

Soit maintenant $r \in G_{\mathcal{C}}$ une rotation. Soit x un sommet de \mathcal{C} et k le plus petit entier strictement positif tel que $r^k(x) = x$. Alors $r^k = \text{Id}$ (c'est une isométrie directe ayant deux points fixes distincts) et on voit que si x', x'' sont deux sommets les ensembles $\{x', \dots, r^{k-1}(x')\}$ et $\{x', \dots, r^{k-1}(x'')\}$ sont égaux ou disjoints, et sont tous deux de cardinal k . On a ainsi une partition des sommets de \mathcal{C} en ensembles ayant tous k éléments, d'où il suit que k divise n . Il suit que le sous-groupe des isométries directes de $G_{\mathcal{C}}$ est contenu dans le sous-groupe fini des rotations d'ordre divisant n et fixant le centre de \mathcal{C} (plus l'identité), qui est de cardinal n . Ceci finit la preuve que $G_{\mathcal{C}}$ est de cardinal au plus $2n$.

Il reste à démontrer que toutes les isométries ci-dessus sont bien dans $G_{\mathcal{C}}$ quand \mathcal{C} est régulier. On commence par les rotations; il suffit de montrer qu'il existe une rotation d'angle $2\pi/n$ qui préserve l'ensemble des sommets de \mathcal{C} (son centre est alors nécessairement celui de \mathcal{C}). Pour ceci on fixe quatre sommets consécutifs x_1, x_2, x_3, x_4 de \mathcal{C} . Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ les médiatrices de $[x_1x_2]$ et $[x_2x_3]$ et x_0 leur point d'intersection. Les triangles $\{x_0, x_1, x_2\}$ et $\{x_0, x_2, x_3\}$ sont isométriques (ceci suit immédiatement de l'égalité des longueurs des côtés $[x_1x_2]$ et $[x_2x_3]$ et en particulier la rotation r de centre x_0 telle que $r(x_1) = x_2$ vérifie $r(x_2) = x_3$).

Soit maintenant \mathcal{D}_3 la médiatrice de $[x_3x_4]$; on va montrer que $r(x_3) = x_4$ (et en appliquant $n - 2$ fois de plus le même argument on voit que r envoie chaque sommet de \mathcal{C} sur le sommet « suivant »). Pour ceci il suffit de constater que de l'égalité des angles de \mathcal{C} en x_2 et x_3 il suit que r envoie la demi-droite issue de x_2 passant par x_3 sur celle issue de x_3 et passant par x_4 , comme x_4 est à la même distance de x_3 que ce dernier de x_2 l'affirmation en découle.

Si r est la rotation construite ci-dessus les sommets de \mathcal{C} sont donc exactement les points $x_1, r(x_1), \dots, r^{n-1}(x_1)$. Soit s la rotation dont l'axe est la médiatrice de $[x_1x_2]$; on a $s \circ r = r^{-1} \circ s$ et il suit que pour $k = 1, \dots, n - 1$ on a :

$$s(r^k(x_1)) = r^{-k}(s(x_1)) = r^{-k}(x_2) = r^{-k+1}(x_1)$$

donc s préserve les sommets de \mathcal{C} . De même, si s' est la réflexion d'axe la bissectrice de \mathcal{C} en x_1 on a $s(r^k(x)) = r^{-k}(x)$ et celle-ci préserve donc aussi les sommets de \mathcal{C} . \square

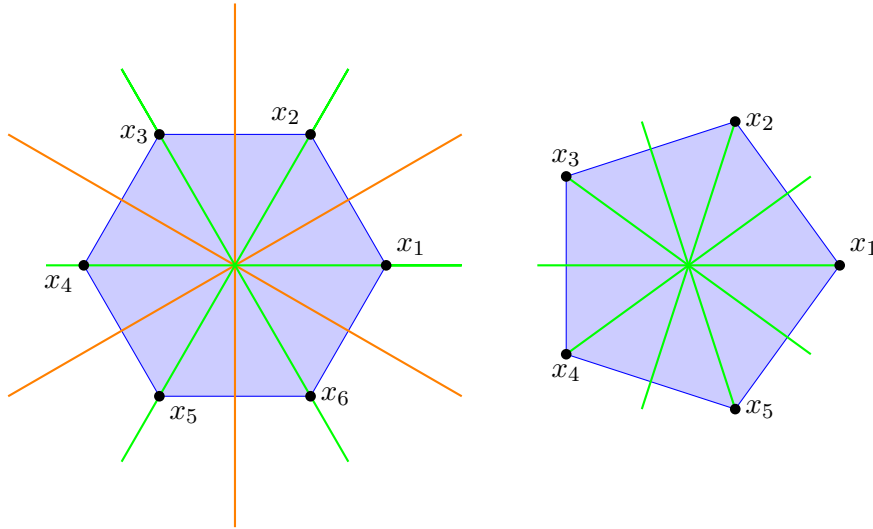
On a évité dans cette preuve l'utilisation du langage des actions de groupes, mais c'est ce qui est caché derrière les arguments qu'elle contient (ce qui rend d'ailleurs la formulation de ces derniers plutôt maladroite).

Soit \mathcal{C} un polyèdre régulier à n sommets et x_0 son centre. On va maintenant énoncer séparément la description, implicite dans la preuve ci-dessus, des isométries contenues dans $G_{\mathcal{C}}$. Commençons par les isométries directes : si r est la rotation de centre x_0 et d'angle $2\pi/n$, alors d'après la preuve de la proposition les rotations non-triviales contenues dans $G_{\mathcal{C}}$ sont exactement r, r^2, \dots, r^{n-1} , autrement dit les rotations de centre x_0 et d'angles $2\pi/n, 4\pi/n, \dots, 2(n-1)\pi/n$.

D'autre part $G_{\mathcal{C}}$ contient exactement n réflexions dont les axes sont les médiatrices des côtés de \mathcal{C} et les bissectrices de ses angles. Selon que n est pair ou impair ces droites ne sont pas dans la même configuration :

- (i) Si $n = 2m + 1$ est impair, la bissectrice de l'angle de \mathcal{C} en x est aussi la médiatrice d'un côté de \mathcal{C} .
- (ii) Si $n = 2m$ est pair alors la bissectrice d'un angle de \mathcal{C} est en un sommet x aussi la bissectrice de l'angle en le côté opposé (c'est-à-dire son symétrique par rapport au centre de \mathcal{C}), et la médiatrice d'un côté de \mathcal{C} est aussi la médiatrice du côté opposé. Le polygone \mathcal{C} a donc m médiatrices et m bissectrices.

Les deux cas de figure sont illustrés pour $n = 5, 6$ par les figures suivantes (on a indiqué en lignes de couleur les axes des symétries de chaque polygone) :



II.8.3 Groupes diédraux

Proposition II.30 Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble fini et x son isobarycentre. Si f est une similitude de rapport λ , h l'homothétie de centre x et de rapport λ de \mathcal{E} et $g = f \circ h^{-1}$ (de sorte que g est une isométrie de \mathcal{E}) alors $G_{f(\mathcal{S})} = gG_{\mathcal{S}}g^{-1}$.

Démonstration : Le groupe $G_{\mathcal{S}}$ fixe x , il suit que pour tout $k \in G_{\mathcal{S}}$ on a $k \circ h = h \circ k$. Il suit immédiatement que l'on a $f \circ k \circ f^{-1} = g \circ k \circ g^{-1}$, et il suffit donc de montrer que l'on a $G_{f(\mathcal{S})} = fG_{\mathcal{S}}f^{-1}$.

Ceci se réduit à montrer que $G_{f(\mathcal{S})} \supset fG_{\mathcal{S}}f^{-1}$ (on peut alors appliquer ceci à (S) et f^{-1} pour obtenir l'autre inclusion). Le dernier énoncé est alors une conséquence du calcul suivant : si $k \in G_{\mathcal{S}}$ alors pour tout $s \in \mathcal{S}$ on a $fkf^{-1}(f(s)) = f(k(s)) \in f(\mathcal{S})$ donc $fkf^{-1} \in G_{f(\mathcal{S})}$. \square

Proposition II.31 *Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ sont deux polygones réguliers à n sommets il existe une similitude f telle que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.*

Démonstration : Soit x_0 (resp. x'_0) le centre de \mathcal{C} (resp. de \mathcal{C}'). Soient x_1, x'_1 des sommets respectifs de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et soit f une similitude telle que $f(x_0) = x'_0$ et $f(x_1) = x'_1$. Alors $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

Pour démontrer ceci on introduit la rotation r de centre x_0 et d'angle $2\pi/n$: les sommets de \mathcal{C} sont donc les points $x_1, r(x_1), \dots, r^{n-1}(x_1)$. D'autre part $r' = f \circ r \circ f^{-1}$ est la rotation de centre x'_0 et d'angle $2\pi/n$ et les sommets de \mathcal{C}' sont donc $x'_1, r'(x'_1), \dots, (r')^{n-1}(x'_1)$. On a $(r')^j(x'_1) = f(r^j(x_1))$ et il suit que f induit une bijection entre les sommets de \mathcal{C} et \mathcal{C}' , donc $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. \square

La proposition suivante, qui est une conséquence immédiate des deux précédentes, permet de définir comme groupe abstrait le groupe diédral d'ordre $2n$, noté D_{2n} (certains auteurs utilisent plutôt la notation D_n), comme le groupe d'isométries préservant un polyèdre régulier à n sommets. Ce groupe est engendré par une réflexion s et une isométrie r vérifiant les relations $s^2 = \text{Id}$ et $sr = r^{-1}s$, ou par deux réflexions s, s' vérifiant les relations $s^2 = (s')^2 = (ss')^n = \text{Id}$.

Proposition II.32 *Si deux polygones réguliers $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ ont le même nombre de sommets alors les sous-groupes $G_{\mathcal{C}}$ et $G_{\mathcal{C}'}$ sont conjugués dans $\text{Isom}(\mathcal{E})$.*

II.8.4 *Sous-groupes finis du groupe des isométries

Le théorème suivant montre que les groupes diédraux sont les sous-groupes finis maximaux du groupe des isométries de \mathcal{E} .

Théorème II.1 *Les sous-groupes finis de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ sont cycliques ou diédraux.*

Démonstration : Soit G un sous-groupe fini de $\text{Isom}(\mathcal{E})$. Il est clair que G ne peut pas contenir de translation ou de symétrie glissée vu que le sous-groupe engendré par une telle transformation est infini. On note $n = |G \cap \text{Isom}^+(\mathcal{E})|$: on va montrer que G est soit le groupe diédral d'ordre $2n$ soit le groupe cyclique d'ordre n .

Soit $x \in \mathcal{E}$ fixé par une réflexion s de G (si G en contient une) mais par aucune rotation de G . Soit S l'ensemble $\{h(x) : h \in G \cap \text{Isom}^+(\mathcal{E})\}$. Alors G préserve S : il est clair que si g est une rotation de G alors $g(S) \subset S$. D'autre part par un argument de comptage les réflexions de G sont de la forme $g \circ s$ où g est une rotation de G , et il suit que si $g \in G$ est une réflexion on a aussi $g(x) \in S$.

Soit \mathcal{C} l'enveloppe convexe de S : \mathcal{C} est un polygone convexe, et il est régulier : en effet il a au plus n sommets et son groupe d'isométries directes est de cardinal n (ce qui implique d'ailleurs que \mathcal{C} a bien n sommets). Il suit que G est un sous-groupe du groupe diédral $G_{\mathcal{C}}$ qui est d'ordre $2n$: en particulier, si G ne contient pas de symétrie il est cyclique d'ordre n par l'exercice 24, sinon il est égal à $G_{\mathcal{C}}$. \square

II.9 *Groupes de pavage

Un sous-groupe $G \subset \text{Isom}(\mathcal{E})$ est appelé un *groupe de pavage* s'il existe un polygone convexe \mathcal{C} de \mathcal{E} tel que :

— Les images de \mathcal{C} par les éléments de G recouvrent \mathcal{E} , c'est-à-dire que

$$\mathcal{E} = \bigcup_{g \in G} g(\mathcal{C}).$$

— Si x est un point intérieur de \mathcal{C} et $g \in G$ vérifie $g(x) \in \mathcal{C}$ alors $g = \text{Id}$.

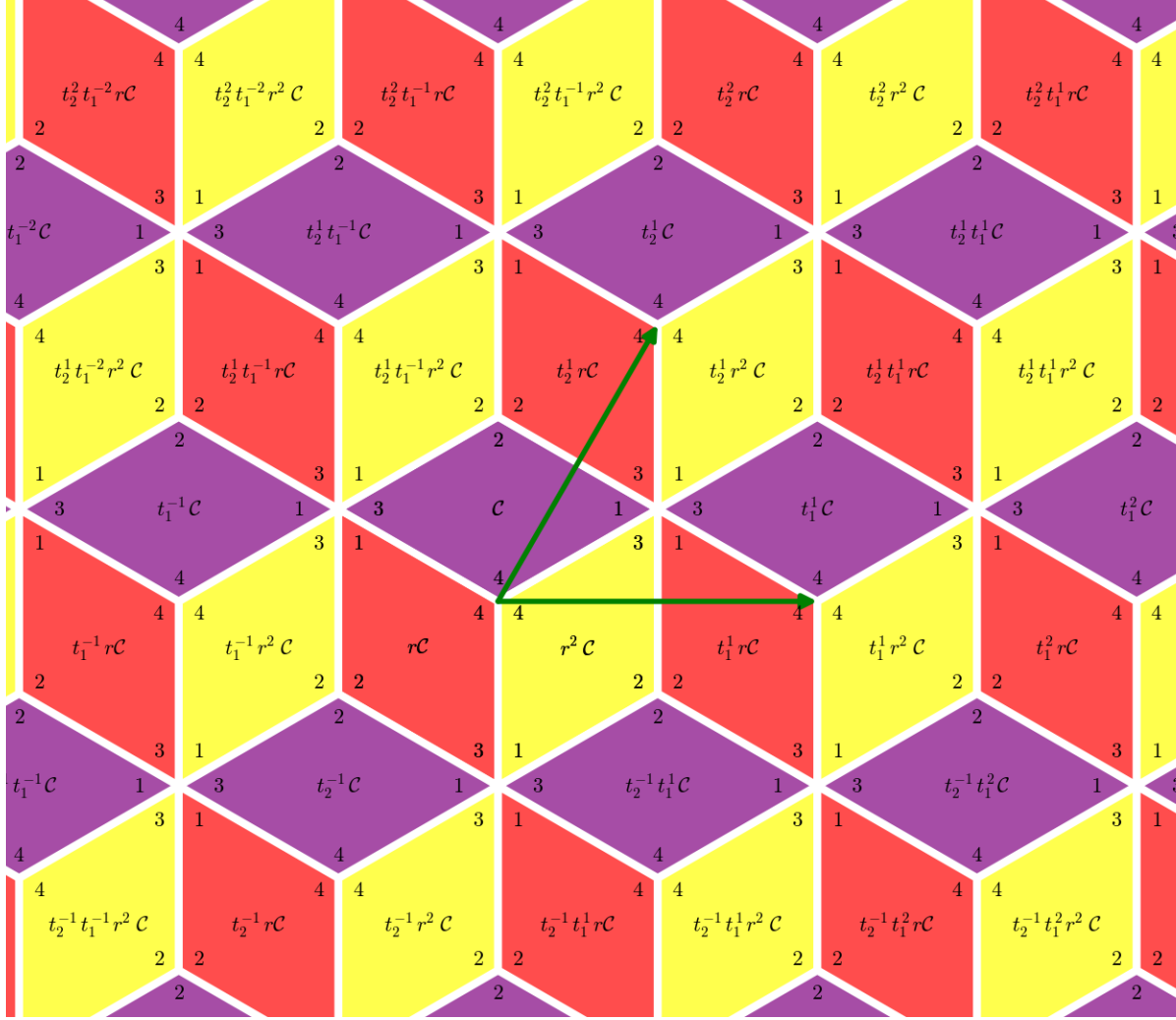
On dit alors aussi que \mathcal{C} et G pavent le plan \mathcal{E} .

On va donner dans la suite la classification des pavages par isométries directes. Il y a essentiellement cinq possibilités : on va construire chacune d'entre elles mais on ne démontrera pas qu'elles représentent (à application affine près) toutes les possibilités.

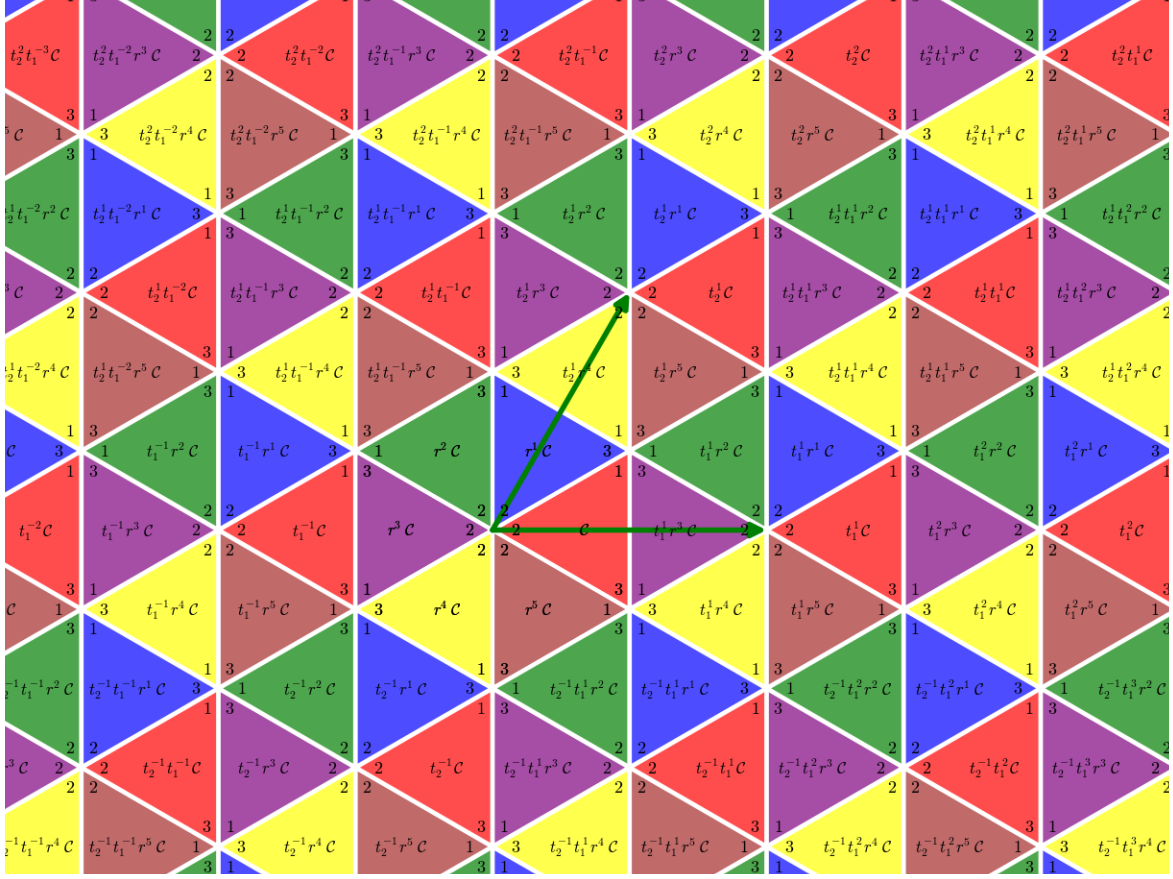
- (1) \mathcal{C} est un carré et G est le groupe engendré par les translations entre ses sommets ;
- (2) \mathcal{C} est un rectangle de côtés 1 et 2, G est engendré par les translations entre ses sommets et la rotation d'angle π et de sommet le milieu d'un côté de longueur 2 ;
- (3) \mathcal{C} est un carré, G est engendré par les rotations d'angle $\pi/2$ et de centre ses sommets ;
- (4) \mathcal{C} est un losange d'angles $\pi/3$ et $2\pi/3$, G est engendré par les rotations d'angles $2\pi/3$ centrées en ses sommets ;
- (5) \mathcal{C} est un triangle équilatéral, G est engendré par la rotation d'angle $\pi/3$ en un sommet et la rotation d'angle $2\pi/3$ en un autre.

Théorème II.2 *Si G est un groupe de pavage dans $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ il existe une application affine inversible $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ telle que fGf^{-1} soit l'un des cinq groupe décrits ci-dessus (dans les cas (3,4,5) f est nécessairement une similitude).*

Voici une illustration pour le pavage de type (4) : pour le type (4) le groupe G est engendré par la rotation r d'angle $2\pi/3$ de centre le sommet marqué 4 sur le losange \mathcal{C} et par les translations t_1, t_2 dont les vecteurs (de vecteurs respectifs $(\sqrt{3}, 0)$ pour t_1 et $(\sqrt{3}/2, 3/2)$ pour t_2) sont marquée en vert. Les centres des rotations de G sont les sommets des losanges, chacun est fixé par un sous-groupe cyclique d'ordre 3 de G .



Enfin, on conclut ce chapitre avec une illustration pour le pavage de type (5). Le groupe est engendré par la rotation de centre marqué 2 et d'angle π_3 et les deux translations indiquées en vert (de vecteurs respectifs $(\sqrt{3}, 0)$ pour t_1 et $(\sqrt{3}/2, 3/2)$ pour t_2). Les sommets marqués 1 et 3 sont des centres de rotations d'angle $2\pi/3$ de G .



II.10 Feuilles d'exercices

Dans tous les exercices et sauf mention du contraire \mathcal{E} désigne un plan affine euclidien et E sa direction.

II.10.1 Classification des isométries planes

Exercice II.1

(1.a) Soit f une application affine de \mathcal{E} dans lui-même. Montrer que s'il existe des points $x, y \in \mathcal{E}$ et un vecteur $\vec{v} \in E$ tels que :

- $f(x) = x + \vec{v}$ et $f(y) = y + \vec{v}$;
- $\overrightarrow{xy} \notin \mathbb{R}\vec{v}$,

alors f est une translation.

(1.b) Soit s une symétrie glissée de vecteur \vec{v} et d'axe \mathcal{D} . Montrer que l'on a :

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{E} : s(x) = x + \vec{v}\}.$$

Exercice II.2

(2.a) Soit B une base orthonormée de E et $\rho \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\text{Mat}_B(\rho) = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soit r une application affine de \mathcal{E} dans lui-même de partie linéaire ρ : montrer que r est une rotation.

(2.b) On suppose que E est orienté et B est directe ; donner l'angle de r .

(2.c) Soit $x_0 \in \mathcal{E}$. On suppose que les coordonnées dans B de $\overrightarrow{x_0 r(x_0)}$ sont $(1, 2)$. Donner les coordonnées dans le repère (x_0, B) du centre de r .

Exercice II.3

Soit B une base orthonormée de E et $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\text{Mat}_B(\sigma) = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}.$$

Soit s une application affine de \mathcal{E} dans lui-même de partie linéaire σ : montrer que s est une isométrie indirecte. Soit $x \in \mathcal{E}$; on suppose que les coordonnées dans B de $\overrightarrow{xs(x)}$ sont $(-1, 4)$. Montrer que s est une symétrie et donner son axe.

Exercice II.4

(4.a) Soit B une base orthonormée de E et $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\text{Mat}_B(\sigma) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Soit s une application affine de \mathcal{E} dans lui-même de partie linéaire σ : montrer que s est une isométrie indirecte.

(4.b) Donner un vecteur directeur de la direction de l'axe de s .

(4.c) Soient $x \in \mathcal{E}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que les coordonnées dans B de $\overrightarrow{xs(x)}$ sont $(1, a)$. Montrer que si $a \neq 3$ alors s est une symétrie glissée et donner son axe et son vecteur.

II.10.2 Composition des isométries planes**Exercice II.5**

(5.a) Soit r une rotation de centre x et d'angle θ , et soit f une isométrie de \mathcal{E} . Montrer que $f \circ r \circ f^{-1}$ est la rotation de centre $f(x)$ et d'angle θ si f est directe, $-\theta$ si f est indirecte (donner une preuve matricielle et une preuve géométrique pour ce dernier résultat).

(5.b) Dédurre de la première question une preuve alternative de la proposition II.7.

Exercice II.6

(6.a) Soient s, s' des symétries affines d'axes non-parallèles. Soit x le point d'intersection de leurs axes et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'angle orienté entre des vecteurs directeurs de ces axes. Montrer que $s \circ s'$ est une rotation de centre x et d'angle 2θ (qui ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs).

(6.b) Soient r, r' des rotations affines de centres distincts et d'angles θ, θ' tels que $\theta + \theta' \neq 0 \pmod{2\pi}$. Montrer que $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$, puis utiliser la question précédente pour déterminer son centre.

(6.c) Soient s, s' des symétries d'axes parallèles distincts; montrer que $s \circ s'$ est une translation et calculer son vecteur. Soient r, r' des rotations affines de centres distincts et d'angles θ, θ' avec $\theta + \theta' = 0 \pmod{2\pi}$; montrer que $r \circ r'$ est une translation et calculer son vecteur.

(6.d) Soient $\vec{v} \in E$ et s une symétrie d'axe \mathcal{D} ; on note π la projection orthogonale sur D . Montrer que la composée $s \circ t_{\vec{v}}$ est la symétrie glissée d'axe $\mathcal{D} - \vec{v}/2$ et de vecteur $\pi(v)$. Utiliser ceci pour calculer les composées $r \circ s$ et $s \circ r$, où r est une rotation de centre x et d'angle θ .

(6.e) Calculer la composée de deux symétries glissées.

II.10.3 Nombres complexes et isométries

Exercice II.7

(7.a) Soient \mathcal{E} un plan euclidien orienté, $x_0 \in \mathcal{E}$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\theta \neq 0$ et r la rotation de centre x_0 et d'angle θ . Soit encore $\vec{v} \in \mathcal{E}$; calculer le point fixe de l'application $r + \vec{v}$.

(7.b) Soient $v \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $r(z) = e^{i\theta}z + v$. Calculer $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait $r(z) = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$. Comparer avec le résultat de la question précédente.

Exercice II.8

Refaire la question b de l'exercice 6 en utilisant l'expression en complexes des rotations.

Exercice II.9

Soit $\theta = \pi/12$ et $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto e^{i\theta}z + 6$. Donner une expression en coordonnées pour r dans le repère orthonormé $z_0, (1, i)$ où z_0 est le point fixe de r (dont on donnera l'affixe).

II.10.4 Angles

Exercice II.10

Soient $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in E$ deux à deux non colinéaires et $x \in \mathcal{E}$. Soient $\mathcal{D}_+, \mathcal{D}'_+$ les demi-droites $x + \mathbb{R}_+\vec{v}$, $x + \mathbb{R}_+\vec{u}$, y le point $x + \vec{v}$ et $\mathcal{F}_+, \mathcal{F}'_+$ les demi-droites $y + \mathbb{R}_+(-\vec{v})$, $y + \mathbb{R}_+\vec{w}$. On note θ, α les mesures des angles déterminés respectivement par $\mathcal{D}_+, \mathcal{D}'_+$ et $\mathcal{F}_+, \mathcal{F}'_+$. Montrer que si $\theta + \alpha > \pi$ alors les demi-droites \mathcal{D}'_+ et \mathcal{F}'_+ ne s'intersectent pas.

Exercice II.11

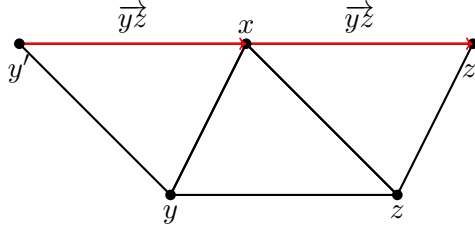
(11.a) Montrer que la bissectrice de \mathcal{A} est déterminée par la propriété suivante : c'est l'unique droite affine \mathcal{F} de \mathcal{E} telle que si s est la symétrie d'axe \mathcal{F} alors $s(\mathcal{D}_+) = \mathcal{D}'_+$.

(11.b) Montrer que c'est aussi l'unique droite \mathcal{F} passant par x telle que les angles déterminés par $\mathcal{D}_+, \mathcal{F}_+$ et $\mathcal{D}'_+, \mathcal{F}_+$ soient isométriques (pour n'importe quelle orientation de \mathcal{F}).

II.10.5 Triangles

Exercice II.12

Dans la figure suivante :



montrer que tous les triangles sont directement isométriques, et en déduire une preuve alternative du fait que la somme des mesures des angles d'un triangle vaut π .

Exercice II.13

Soit $\{x, y, z\}$ un triangle et \mathcal{D} la bissectrice de T issue de x et \mathcal{D}' la droite orthogonale à \mathcal{D} en x . Montrer que :

$$\mathcal{D} \cup \mathcal{D}' = \{x' \in \mathcal{E} : d(x', p_1(x')) = d(x', p_2(x'))\}.$$

où p_1, p_2 sont les projections orthogonales sur les droites $(xy), (xz)$ respectivement. En déduire (directement) la concourance des bissectrices d'un triangle.

Exercice II.14

Soit x, y, z un triangle. On note respectivement o, g, h le centre de son cercle circonscrit, son centre de gravité et son orthocentre.

(14.a) Soit h' le barycentre défini par

$$\overrightarrow{h'x} + \overrightarrow{h'y} + \overrightarrow{h'z} - 2\overrightarrow{h'o} = 0.$$

Montrer que $h' = h$ (calculer $\langle \overrightarrow{xh'}, \overrightarrow{yz} \rangle$, etc.).

(14.b) Déduire de la question précédente que le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit d'un triangle sont alignés.

Exercice II.15

(Point de Gergonne) Soit x_0 le centre du cercle inscrit de T et x', y', z' les projections respectives de x_0 sur $(yz), (zx)$ et (xy) . Montrer que les droites $(xx'), (yy')$ et (zz') sont concourantes (on pourra utiliser le théorème de Ceva).

Exercice II.16

On note ℓ le périmètre $\ell_x + \ell_y + \ell_z$ de T . Montrer que, si r désigne le rayon du cercle inscrit dans T , on a $2\text{Aire}(T) = \ell r$.

Exercice II.17

(17.a) (Formule de Héron) Montrer que

$$\text{Aire}(T)^2 = \frac{1}{16}(\ell_x + \ell_y + \ell_z)(-\ell_x + \ell_x + \ell_z)(\ell_x - \ell_y + \ell_z)(\ell_x + \ell_y - \ell_z).$$

* (17.b) Montrer que si $s, t, u \in \mathbb{R}_+$ on a $stu \leq \left(\frac{s+t+u}{3}\right)^3$, avec égalité si et seulement si $s = t = u$.

(17.c) (Inégalité isopérimétrique) En utilisant les deux questions précédentes montrer que pour tout triangle T on a

$$\text{Aire}(T) \leq \frac{\ell^2}{3\sqrt{3}}$$

avec égalité si et seulement si T est équilatéral.

II.10.6 Polygones

Exercice II.18

Calculer les rayons respectifs des cercles circonscrit à et inscrit dans un polygone régulier à 12 côtés de longueur 1.

Exercice II.19

Soit \mathcal{C} un polygone convexe à n sommets et soient $\theta_1, \dots, \theta_n$ les mesures des angles de \mathcal{C} . Montrer que $\sum_i \theta_i = (n - 2)\pi$.

Exercice II.20

(20.a) En utilisant une méthode similaire à celle de la preuve de (1) de la proposition II.22, calculer l'aire d'un disque de rayon 1 dans \mathcal{E} .

(20.b) Calculer l'aire d'un polygone convexe en fonction de ses angles et de la longueur de ses côtés.

(20.c) Retrouver le résultat de la première question en utilisant la deuxième.

Exercice II.21

(21.a) Montrer qu'un triangle est régulier si et seulement si tous ses côtés ont la même longueur.

(21.b) Montrer que pour tout $n \geq 4$ il existe un polygone dont tous les côtés ont la même longueur mais qui n'est pas régulier.

(21.c) Montrer que pour tout $n \geq 4$ il existe un polygone dont tous les angles ont la même mesure mais qui n'est pas régulier.

(21.d) Montrer que si un polygone est inscrit dans un cercle alors il est régulier si et seulement si tous ses côtés (respectivement angles) ont la même longueur (resp. sont égaux).

II.10.7 Groupes diédraux

Exercice II.22

Soit $T = \{x, y, z\}$ un triangle de \mathcal{E} .

(22.a) Montrer que si $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ vérifie $f(T) = T$ alors f est une rotation ou une réflexion (montrer que f a un point fixe).

(22.b) Soit s une réflexion de \mathcal{E} telle que $s(T) = T$. Montrer que l'axe de s contient l'un des sommets de T et est orthogonal au côté opposé à ce sommet.

(22.c) Montrer que s'il existe une rotation r de \mathcal{E} telle que $r(T) = T$ alors on peut orienter \mathcal{E} de sorte que l'angle de r soit égal à $2\pi/3$. Montrer aussi que T est équilatéral.

(22.d) Conclure que le sous-groupe

$$G = \{g \in \text{Isom}(\mathcal{E}) : g(T) = T\}$$

est de cardinal 6, contenant trois réflexions et deux rotations, si T est équilatéral, de cardinal 2 contenant une réflexion si T est isocèle en un sommet mais pas équilatéral, et trivial dans les cas restants.

Exercice II.23

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 quatre points de \mathcal{E} tels que pour tout $i = 1, 2, 3, 4$ le point x_i ne soit pas dans l'enveloppe convexe des $x_j, j \neq i$. Soit \mathcal{C} l'enveloppe convexe des x_i .

- (23.a) Montrer que \mathcal{C} est un polygone convexe ayant exactement quatre sommets.
- (23.b) Montrer que si $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ vérifie $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ alors f est une réflexion ou une rotation.
On notera $G_{\mathcal{C}} = \{f \in \text{Isom}(\mathcal{E}) : f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}$.
- (23.c) Montrer que si $s \in G_{\mathcal{C}}$ est indirecte alors l'axe de s contient deux sommets de \mathcal{C} ou bien est la médiatrice de deux côtés de \mathcal{C} .
- (23.d) Montrer que si $r \in G_{\mathcal{C}}$ est une rotation alors on peut orienter \mathcal{E} de façon à ce que son angle vaille $\pm\pi/2$ ou π . Montrer que dans le premier cas \mathcal{C} est régulier (i.e. est un carré), et dans le second \mathcal{C} a tous ses côtés de même longueur (i.e. est un losange) ou tous ses angles droits (i.e. est un rectangle).
- (23.e) Montrer (en n'utilisant que les questions précédentes) que les cardinaux possibles pour $|G_{\mathcal{C}}|$ sont 1, 2, 4 et 8 et caractériser chaque cas où $G_{\mathcal{C}}$ est non-trivial.

Exercice II.24

Soit \mathcal{C} un polygone régulier. Montrer que si H est un sous-groupe du groupe $G_{\mathcal{C}}$ alors H est lui-même diédral ou il est cyclique; si H n'est composé que d'isométries directes montrer que l'on est toujours dans le second cas.

II.10.8 Similitudes

Exercice II.25

(Voir <http://images.math.cnrs.fr/Des-triangles-dores.html>) Déterminer l'ensemble des triangles T tels qu'il existe un triangle T' ayant les mêmes angles que T , deux côtés distincts de même longueur que deux côtés distincts de T mais T' n'est pas isométrique à T .

Exercice II.26

Soient $\lambda > 0$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\phi = \lambda \cdot \rho$ où ρ est la rotation linéaire d'angle θ . Soient $x, y, z \in \mathcal{E}$ et x', y', z' les images respectives de z par la similitude de centre x et de partie linéaire ϕ , de x par la similitude de centre y et de partie linéaire ϕ et de y par la similitude de centre z et de partie linéaire ϕ . Montrer que les triangles $\{x, y, z\}$ et $\{x', y', z'\}$ ont le même centre de gravité.

Exercice II.27

On fixe un triangle T_0 , une droite \mathcal{D} et un point $x \notin \mathcal{D}$ dans \mathcal{E} .

- (27.a) A un point $y \in \mathcal{D}$ on associe le point $z \in \mathcal{E}$ tel que le triangle $T = \{x, y, z\}$ soit l'image par une similitude directe du triangle T_0 . Décrire l'ensemble des points z ainsi obtenus.
- (27.b) Si f est une similitude de \mathcal{E} et T' un triangle de \mathcal{E} montre que l'orthocentre de $f(T')$ (respectivement les centres des cercles circonscrit et inscrit à $f(T')$) sont les images par f de ceux de T' .
- (27.c) Décrire l'ensembles des orthocentres des triangles T de la question a).

Exercice II.28

- (28.a) Soient $x, y, x', y' \in \mathcal{E}$ tels que $x \neq y$, $x' \neq y'$. Construire géométriquement une similitude directe f^+ et une similitude indirecte f^- telles que $f^{\pm}(x) = x'$, $f^{\pm}(y) = y'$ (commencer par f^-).
- (28.b) Montrer que f^+, f^- sont les seules similitudes vérifiant cette propriété. A quelle condition sur x, y, x', y' sont-elles des isométries?

Exercice II.29

Soit $a > 0$ et C_a la courbe définie par

$$C_a = \{(t \cos(a \ln(t)), t \sin(a \ln(t))) : t \in]0, +\infty[\}.$$

Montrer que C_a est stable par les homothéties de rapports $-e^{\pi/a}$ et $e^{2\pi/a}$ et de centre $(0, 0)$. Montrer que C_a est stable par la composée de la rotation d'angle $\pi/2$ et de centre $(0, 0)$ et l'homothétie de rapport $e^{\pi/2a}$. Quel est le groupe des isométries directes préservant C_a ?

Exercice II.30

On identifie \mathcal{E} avec \mathbb{C} . Si $u, v, w \in \mathbb{C}$ sont trois points de \mathcal{E} on note $\zeta(u, v, w) = \frac{u-w}{u-v}$.

(30.a) Montrer que si $u, v, w \in \mathcal{E}$ on a $\zeta(u, v, w) \in \mathbb{R}$ si et seulement si u, v, w sont alignés.

(30.b) Montrer que $\zeta(u, v, w)\zeta(v, w, u)\zeta(w, u, v) = -1$.

(30.c) Soit f une similitude de \mathcal{E} , montrer que $\zeta(u, v, w) = \zeta(f(u), f(v), f(w))$.

(30.d) Montrer que si $u = 0, v = 1$ et $w = z \neq 0, 1$ on a $\zeta(u, v, w) = z, \zeta(v, w, u) = \frac{1}{1-z}$ et $\zeta(w, u, v) = \frac{z-1}{z}$.

En déduire en utilisant la question (c) que pour tous $u, v, w \in \mathbb{C}$ on a $\zeta(v, w, u) = \frac{1}{1-\zeta(u, v, w)}$ et $\zeta(w, u, v) = \frac{\zeta(u, v, w)-1}{\zeta(u, v, w)}$, puis que $1 - \zeta(v, w, u) + \zeta(u, v, w)\zeta(v, w, u) = 0$.

(30.e) Déduire des questions précédentes que si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ il existe trois points $u, v, w \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 = \zeta(u, v, w), z_2 = \zeta(v, w, u)$ et $z_3 = \zeta(w, u, v)$ si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

(i) $z_1 z_2 z_3 = -1$;

(ii) $1 - z_2 + z_1 z_2 = 0$.

II.10.9 Groupes de pavage**Exercice II.31**

Dans tout cet exercice on suppose que G est un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathcal{E})$.

(31.a) On note T_G l'ensemble des translations contenues dans G . Montrer que T_G est un sous-groupe de G

(31.b) On suppose que $T_G = \{t_n \vec{u} : n \in \mathbb{Z}\}$ pour un $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$. Montrer que pour toute rotation r contenue dans G l'angle de r est π , et que les centres de deux telles rotations diffèrent d'un multiple demi-entier de \vec{u} .

(31.c) On suppose qu'il existe des vecteurs linéairement indépendants $\vec{u}, \vec{v} \in E$ tels que

$$T_G = \{t_n \vec{u} + t_m \vec{v} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Montrer que les angles des rotations de G sont contenus dans $\{\pm\pi/2 \pm 3\pi/4, \pi\}$ ou dans $\{\pm\pi/3, \pm 2\pi/3, \pi\}$.

En déduire que les symétries contenues dans G ont au plus 6 directions différentes pour leurs axes.

(31.d) Quels peuvent être les centres des rotations de G ?

Chapitre III

Géométrie dans l'espace

Dans tout ce chapitre \mathcal{E} est un espace affine euclidien de dimension trois, d'espace directeur E .

III.1 Isométries

III.1.1 Isométries vectorielles

Proposition III.1 *On suppose \mathcal{E} orienté. Si $\rho \in \text{SO}(E)$, $\rho \neq \text{Id}$ il existe un vecteur unitaire $e_1 \in E$ (unique à multiplication, par -1 près) et un $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (uniquement déterminé par ρ et e_1) tels que pour toute base orthonormale directe $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ on ait*

$$\text{Mat}_B(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Soit $\chi_\rho = \det(X \text{Id} - \rho)$ le polynôme caractéristique de ρ . Il est de degré 3 et a donc au moins une racine réelle λ . Il existe alors un vecteur non nul $\vec{v} \in E$ tel que $\rho(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. Soit $P = (\vec{v})^\perp$: si $\vec{u} \in P$ on a :

$$\langle \rho(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \lambda \langle \rho(\vec{u}), \rho(\vec{v}) \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0,$$

c'est-à-dire $\rho(\vec{u}) \in P$. On a donc $\rho(P) = P$.

Comme ρ est une isométrie on a $|\lambda| = \frac{\|\rho(\vec{v})\|}{\|\vec{v}\|} = 1$, c'est-à-dire $\lambda = \pm 1$. Supposons que $\lambda = 1$: on a alors $\det(\rho) = \det(\rho|_P)$ et il suit que $\rho|_P$ est une isométrie directe du plan P . On oriente ce dernier de la manière suivante : une base (\vec{u}, \vec{w}) de P est directe si et seulement si $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ est une base directe de E . Par la proposition II.2 il existe un $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que pour toute base orthonormée directe (\vec{e}_2, \vec{e}_3) de P on a

$$\text{Mat}_{(\vec{e}_2, \vec{e}_3)}(\rho|_P) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et il suit en posant $\vec{e}_1 = \vec{v}/\|\vec{v}\|$ que l'on a dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\text{Mat}_B(\rho|_P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Il reste à traiter le cas où $\lambda = -1$. On peut alors montrer directement que 1 est aussi une racine de χ_ρ ($\chi_\rho/(X+1)$ ne peut pas avoir de racines complexes conjugués car le déterminant serait alors négatif, donc on a forcément $\chi_\rho = (X-1)(X+1)^2$), ce qui ramène au cas précédent. On va procéder plus géométriquement : on a $\det(\rho) = -\det(\rho|_P)$. Il suit que $\rho|_P$ est une isométrie indirecte et (d'après la proposition II.3) il existe donc un vecteur fixe dans P pour ρ , ce qui nous ramène au cas précédent (l'angle θ est alors forcément égal à π). \square

Contrairement au cas de la dimension 2 l'angle θ n'est pas déterminé uniquement par l'orientation de \mathcal{E} : en effet, si B est directe (en gardant les notations de la proposition), la base $B' = (-e_1, e_3, e_2)$ est elle aussi directe, et on a

$$\text{Mat}_{B'}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Si ρ est une isométrie on définit son axe comme la droite $D = \ker(\rho - \text{Id})$. Si D est orientée (ce qui revient à choisir un vecteur directeur) on définit l'angle de ρ comme le θ donné par la proposition III.1.

Proposition III.2 *Si $\phi \in \text{O}(E)$ est indirecte, $\phi \neq -\text{Id}$ il existe un vecteur e_1 (unique à multiplication par -1 près) et un $\theta \in \mathbb{R}$ tels que si $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de E on a*

$$\text{Mat}_B(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration : L'application $-\phi$ est une isométrie directe, le résultat suit donc de la proposition III.1. \square

Une isométrie indirecte est une réflexion si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ dans la proposition ci-dessus. Dans le cas où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ on l'appelle une anti-rotation : elle est la composée de la rotation d'angle θ autour de l'axe $\ker(\phi + \text{Id})$ (orienté par le vecteur e_1) et de la réflexion dans le plan orthogonal (noter que ces deux isométries commutent).

III.1.2 Isométries affines directes

On suppose E orienté. Si P est un plan vectoriel de E alors un vecteur $e_1 \in E \setminus P$ détermine une orientation de P de la façon suivante : une base (e_2, e_3) de P est directe si et seulement si la base (e_1, e_2, e_3) de E est directe. On dit que P est orienté par e_1 . La proposition suivante est une conséquence immédiate de la procédure décrite après la proposition I.20 et de la proposition III.1.

Proposition III.3 *Si $\theta \in \mathbb{R}, \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et \mathcal{D} est une droite orientée de \mathcal{E} il existe une unique isométrie r de E telle que $r(x) = x$ pour $x \in \mathcal{D}$, et pour tout plan \mathcal{P} orthogonal à \mathcal{D} et orienté par un vecteur positif de D la restriction de r à \mathcal{P} est la rotation d'angle θ .*

Si $f \in \text{Isom}^+ \mathcal{E}$ n'est pas une translation, il existe une unique droite \mathcal{D} de \mathcal{E} qui soit préservée par f , un $\theta \in \mathbb{R}$ (déterminé uniquement par f et une orientation sur \mathcal{D}) et un unique vecteur $\vec{v} \in D$ tels que $f = t_{\vec{v}} \circ r$ où r est la rotation d'axe orienté \mathcal{D} et d'angle θ .

Dans le premier cas on dit que f est la rotation d'axe orienté \mathcal{D} et d'angle θ (on rappelle si on n'oriente pas l'axe on ne peut pas distinguer entre f et son inverse). Dans le second on dit que f est le vissage d'axe orienté \mathcal{D} , de vecteur \vec{v} et d'angle θ .

III.1.3 Isométries affines indirectes

Les isométries indirectes dont la partie affine n'est pas une réflexion ont toujours un point fixe puisqu'aucune d'entre elles n'admet 1 comme valeur propre. On les appelle des anti-rotations, elles ont le même comportement géométrique que les anti-rotations vectorielles.

Si f est une isométrie indirecte de \mathcal{E} et sa partie linéaire est la réflexion par rapport à un plan P alors soit f est une réflexion affine (c'est-à-dire qu'elle fixe un plan de \mathcal{E} de direction P), soit il existe une droite \mathcal{D} dont la direction est contenue dans P et un vecteur $\vec{v} \in P$ orthogonal à \mathcal{D} telle que f préserve tous les plans (affines) de \mathcal{E} et sa restriction à un tel plan \mathcal{P} est la réflexion glissée de vecteur \vec{v} dont l'axe contient le point $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$. De manière équivalente f restreint au plan $\mathcal{D} + \mathbb{R}\vec{v}$ est la translation de vecteur \vec{v} .

III.2 Angles dans l'espace

III.2.1 Angle dièdres

Soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux plans non-parallèles dans \mathcal{E} ; alors $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite. On choisit des vecteurs $\vec{v}_i \in P_i \setminus D$ et on définit des *demi-plans de bord* \mathcal{D} comme $\mathcal{P}_i^+ = \mathcal{D} + \mathbb{R}_+ \vec{v}_i$. L'*angle dièdre* \mathcal{A} entre \mathcal{P}_1^+ et \mathcal{P}_2^+ est l'unique $\theta \in]0, \pi[$ tel qu'il existe une rotation r d'axe \mathcal{D} (orienté de façon quelconque) et d'angle θ telle que $r(\mathcal{P}_1^+) = \mathcal{P}_2^+$.

On remarque que si \mathcal{P} est un plan orthogonal à \mathcal{D} l'angle entre les demi-plans \mathcal{P}_i^+ est égal au signe près à l'angle entre les demi-droites $\mathcal{P}_i^+ \cap \mathcal{P}$. La preuve de la proposition suivante se ramène donc au cas de la dimension 2 (la proposition II.7).

Proposition III.4 *Soient \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 deux plans non-parallèles de \mathcal{E} et θ la mesure d'un des angles dièdres qu'ils déterminent (l'autre étant égale à $\pi - \theta$). Soient s_1, s_2 les symétries de plans fixes respectifs $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Alors $s_2 \circ s_1$ est une rotation d'axe $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ dont l'angle (pour n'importe quelle orientation de l'axe) ω vérifie $\cos(\omega) = \cos(2\theta)$.*

En revanche on ne peut en général pas dire grand-chose sur la composée de rotations, comme illustré par l'exercice 3.

III.2.2 Angles solides

Un *angle solide* (on dit aussi *cône solide*) basé en un point $x \in \mathcal{E}$ est un ensemble convexe \mathcal{A} tel que $x \in \mathcal{A}$ et \mathcal{A} est stable par toute homothétie de centre x et de rapport positif. Sa *mesure* est l'aire sphérique $\mathcal{A} \cap S$ où

$$S(x) = \{y \in \mathcal{E} : d(x, y) = 1\}.$$

On va donner une description sommaire de l'aire utilisée ici dans la section suivante.

Aire sphérique

L'aire des ouverts de la sphère $S(x)$ est la fonction définie sur l'ensemble des ouverts de S à valeurs dans $[0, +\infty[$ et vérifiant les trois propriétés suivantes :

- On a $\text{Aire}(S) = 4\pi$;
- Si r est une isométrie de \mathcal{E} fixant x et U un ouvert de S alors $\text{Aire}(r(U)) = \text{Aire}(U)$;

— Si V, W sont deux ouverts de S on a

$$\text{Aire}(V \cup W) = \text{Aire}(V) + \text{Aire}(W) - \text{Aire}(V \cap W).$$

Le fait que ces trois propriétés définissent une unique fonction est vrai mais extrêmement difficile à démontrer ; en introduisant une variante plus forte de la troisième propriété (qui autorise les unions dénombrables) la démonstration est rendue nettement plus aisée (mais encore hors de notre portée ici).

Si \mathcal{D} est une droite passant par x et \mathcal{A} un angle dièdre de mesure θ basé sur \mathcal{D} on définit un *fuseau* (on peut aussi le nommer quartier) \mathcal{S}_θ d'angle θ comme l'intersection $C_\theta = \mathcal{S}_\theta \cap S$. Si $\theta = 2\pi/n$ on a « presque » (c'est-à-dire à des ensembles d'aire nulle près) une décomposition de S en n secteurs d'angle θ (il suffit de prendre les images de C_θ par les rotations d'axe \mathcal{D} et d'angles $0, 2\pi/n, \dots, 2(n-1)\pi/n$). Il suit que

$$\text{Aire}(C_\theta) = 2\theta \quad (\text{III.2.1})$$

dans ce cas ; le cas d'un angle $\theta \in \mathbb{Q}\pi$ suit immédiatement, puis celui d'un angle θ quelconque en prenant des suites $u_n \leq \theta \leq v_n$ avec $u_n, v_n \in \mathbb{Q}\pi$ et $\lim(v_n - u_n) = 0$ et en passant à la limite.

Un triangle d'angles α, β, γ sur S est l'intersection d'un fuseau C d'angle α avec un hémisphère de S limité par un demi plan dont les angles dièdres avec les deux demi-plans obtenus à partir des plans contenant ceux délimitant C en prenant la moitié intersectant l'hémisphère sont respectivement de mesures γ et β . Le résultat fondamental pour le calcul d'aires sphériques est alors le suivant (connu sous le nom de « formule de Girard »).

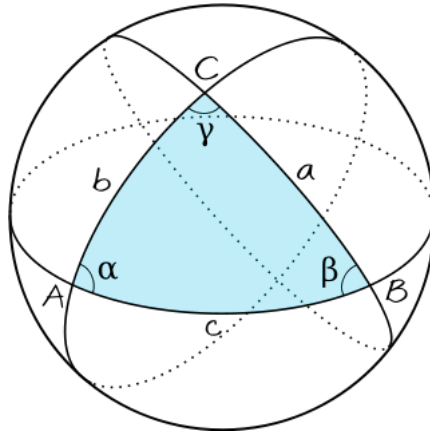
Proposition III.5 *L'aire d'un triangle T sur S d'angles α, β, γ est donnée par la formule*

$$\text{Aire}(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Démonstration : On choisit un côté de T (disons celui dont les angles adjacents sont β et γ) et on découpe S en deux hémisphères délimitées par le grand cercle contenant ce côté : on note H celui des deux qui contient T . On a alors :

$$H = C_\beta \cup C_\gamma \cup (C_\alpha \setminus (-T))$$

où $-T$ est le triangle antipode à T (qui lui est isométrique) et les fuseaux C_β et C_γ s'intersectent exactement en T . Pour s'en convaincre il suffit d'observer la figure suivante (issue de http://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonometrie_spherique#/media/File:Triangle_spherique.svg) :



On a donc :

$$\begin{aligned} 2\pi = \text{Aire}(H) &= (\text{Aire}(C_\beta) + \text{Aire}(C_\gamma) - \text{Aire}(C_\beta \cap C_\gamma)) + \text{Aire}(C_\alpha) - \text{Aire}(T) \\ &= 2\beta + 2\gamma + 2\alpha - 2\text{Aire}(T) \end{aligned}$$

d'où la formule désirée suit. □

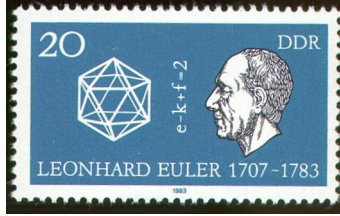
III.3 Polyèdres convexes

Un *polyèdre convexe* \mathcal{C} de \mathcal{E} est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Les *sommets* de \mathcal{C} sont ses points extrémaux. Ses *arêtes* sont les segments entre côtés qui sont égaux à l'intersection de \mathcal{C} avec un plan. Enfin, les *faces* de \mathcal{C} sont les enveloppes convexes F de sous-ensemble de sommets de \mathcal{C} qui ne sont pas des arêtes et qui vérifient les conditions suivantes :

- Il existe un plan \mathcal{P} tel que $F = \mathcal{C} \cap \mathcal{P}$.
- F ne rencontre pas l'intérieur de \mathcal{C} .

III.3.1 Formule d'Euler

La formule d'Euler sur les polyèdres est l'une des plus illustres de la géométrie classique, témoin ce timbre est-allemand :



Une intéressante discussion des difficultés à prouver rigoureusement cette formule est donnée dans Imre Lakatos, *Preuves et Réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*, Editions Hermann 1984. On l'obtiendra ici comme un corollaire de la formule de Girard.

Théorème III.1 Soit \mathcal{C} un polyèdre convexe, s le nombre de ses sommets, a de ses arêtes et f de ses faces. On a :

$$s - a + f = 2.$$

Démonstration : Soient x_0 un point de l'intérieur de \mathcal{C} et S la sphère de centre x_0 et de rayon 1. Si c est une arête de \mathcal{C} on note

$$C_c = \{x + \vec{xy} / \|\vec{xy}\| : y \in c\}.$$

On obtient ainsi un découpage de S en polygones sphériques dont les côtés sont les C_c pour c une arête de \mathcal{C} . D'autre part la formule de Girard, en découplant un polygone sphérique F en triangles,

implique que l'aire de ce dernier est somme des angles de $F - \pi(|\{\text{côtés de } F\}| - 2)$. On a donc :

$$\begin{aligned} 4\pi &= \text{Aire}(S) = \sum_F \text{Aire}(F) \\ &= \sum_F (\text{somme des angles de } F - \pi(|\{\text{côtés de } F\}| - 2)) \\ &= 2\pi f - \pi \sum_F |\{\text{côtés de } F\}| + \sum_F \text{somme des angles de } F. \end{aligned}$$

La première somme du terme de droite vaut 2 fois le nombre d'arêtes du découpage, qui est le même que le nombre d'arêtes de \mathcal{C} : cette somme vaut donc $2a$. Chaque sommet P de ce découpage correspond à un sommet p de \mathcal{C} , et de plus la somme des angles des polygones touchant P vaut 2π ; la somme des angles dans le terme de droite ci-dessus vaut donc $2\pi s$. On obtient donc au final

$$4\pi = 2\pi f - 2\pi a + 2\pi s$$

d'où la formule d'Euler suit immédiatement. \square

III.3.2 Polyèdres réguliers

Un polyèdre convexe est dit *régulier* si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques l'un à l'autre et tous ses angles solides sont isométriques.

Il existe une infinité de polyèdres dont toutes les faces sont isométriques mais qui ne sont pas réguliers. Il existe aussi des polygones dont toutes les faces sont régulières, mais qui ne sont pas eux-mêmes réguliers, et des polygones dont les angles solides sont deux à deux isométriques mais qui ne sont pas réguliers.

Le résultat suivant montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de polyèdres réguliers en dimension trois.

Proposition III.6 *Soit \mathcal{C} un polygone régulier, soit r le nombre d'arêtes issues de chaque sommet de \mathcal{C} et t le nombre de côtés de chaque face de \mathcal{C} . Alors (r, t) est l'une des paires $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$ ou $(4, 3)$, $(5, 3)$.*

Démonstration : Soient s, a, f les nombres respectifs de sommets, arêtes et faces de \mathcal{C} . Comme chaque arête appartient à exactement deux faces on a $2a = ft$ et comme chaque arête rencontre exactement deux sommets on a aussi $2a = sr$. Par la formule d'Euler 1 il suit que

$$2 = s - a + f = \left(\frac{2}{r} - 1 + \frac{2}{t} \right) \cdot a$$

d'où il suit que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} > \frac{1}{2}.$$

Ceci implique qu'au moins l'un des deux entiers r, s soit inférieur ou égal à 3. On a d'autre part $r, s \geq 3$ et il suit alors l'on a $r = 3$ et $s = 3, 4, 5$ ou l'inverse. \square

Pour chacune des paires (r, t) ci-dessus il existe une seule configuration combinatoire la réalisant (en effet les nombres s, a, f sont alors solutions d'un système linéaire inversible). Ce sont les suivantes :

- Si $(r, t) = (3, 3)$ on dit que \mathcal{C} est un tétraèdre, il a alors 4 faces qui sont des triangles équilatéraux, 4 sommets et 6 arêtes ;
- Si $(r, t) = (3, 4)$ on dit que \mathcal{C} est un cube, il a six faces qui sont des carrés, 8 sommets et 12 arêtes ;
- Si $(r, t) = (4, 3)$ on dit que \mathcal{C} est un octaèdre, il a huit faces qui sont des triangles équilatéraux, six sommets et 12 arêtes ;
- Si $(r, t) = (3, 5)$ on dit que \mathcal{C} est un dodécaèdre, il a 12 faces qui sont des pentagones réguliers, 20 sommets et 30 arêtes ;
- Si $(r, t) = (5, 3)$ on dit que \mathcal{C} est un icosaèdre, il a 20 faces qui sont des triangles équilatéraux, 12 sommets et 30 arêtes.

Le résultat suivant montre alors qu'il existe exactement (à similitude près) cinq polyèdres réguliers en dimension trois. Ils sont souvent appelés *solides platoniciens*.

Théorème III.2 *Pour chaque configuration décrite ci-dessus il existe (à similitude près) un unique polyèdre régulier dans \mathcal{E} la réalisant.*

Démonstration : La construction d'un tétraèdre régulier est donnée dans l'exercice 5. On peut aussi donner une liste de sommets, par exemple $(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, \sqrt{2}), (0, -1, \sqrt{2})$.

On peut facilement donner les sommets d'un cube régulier (par exemple $(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, 1), (1, -1, -1), (1, 1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$) et d'un octaèdre (par exemple $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$).

La construction du dodécaèdre est plus compliquée. On peut donner une liste explicite de douze sommets ou faire une construction plus géométrique : les deux constructions sont proposées en exercice dans le livre de Michèle Audin. On obtient un icosaèdre en prenant comme sommets les centres des faces d'un dodécaèdre. \square

Il existe aussi des polyèdres dont toutes les faces sont isométriques, chaque sommet est sur le même nombre de faces mais qui ne sont pas réguliers en le sens ci-dessus (ils sont quand même « réguliers » au sens combinatoire).

La figure III.1 montre des patrons pour le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers où les faces opposées ont même couleur.

III.3.3 Groupes d'isométries des polyèdres réguliers

La proposition suivante est l'analogue en dimension 3 de la proposition II.29.

Proposition III.7 *Un polyèdre \mathcal{C} est régulier si et seulement si pour toute paire de sommets x, x' de \mathcal{C} , toutes arêtes c, c' tels que $x \in c, x' \in c'$ il existe une isométrie $g \in G_{\mathcal{C}}$ telle que $g(x) = x'$ et $g(c) = c'$.*

Démonstration : Le sens réciproque est immédiat. Pour le sens direct il suffit d'utiliser l'énoncé d'unicité dans le théorème 2 (les démonstrations de l'un ou l'autre énoncé sont les mêmes). \square

Cette proposition permet de calculer le cardinal de $G_{\mathcal{C}}$ vu qu'une isométrie directe $g \in G_{\mathcal{C}}$ fixant un sommet et une arête est nécessairement triviale. On va maintenant donner une description plus précise du groupe d'isométries dans les trois familles de polyèdres réguliers.

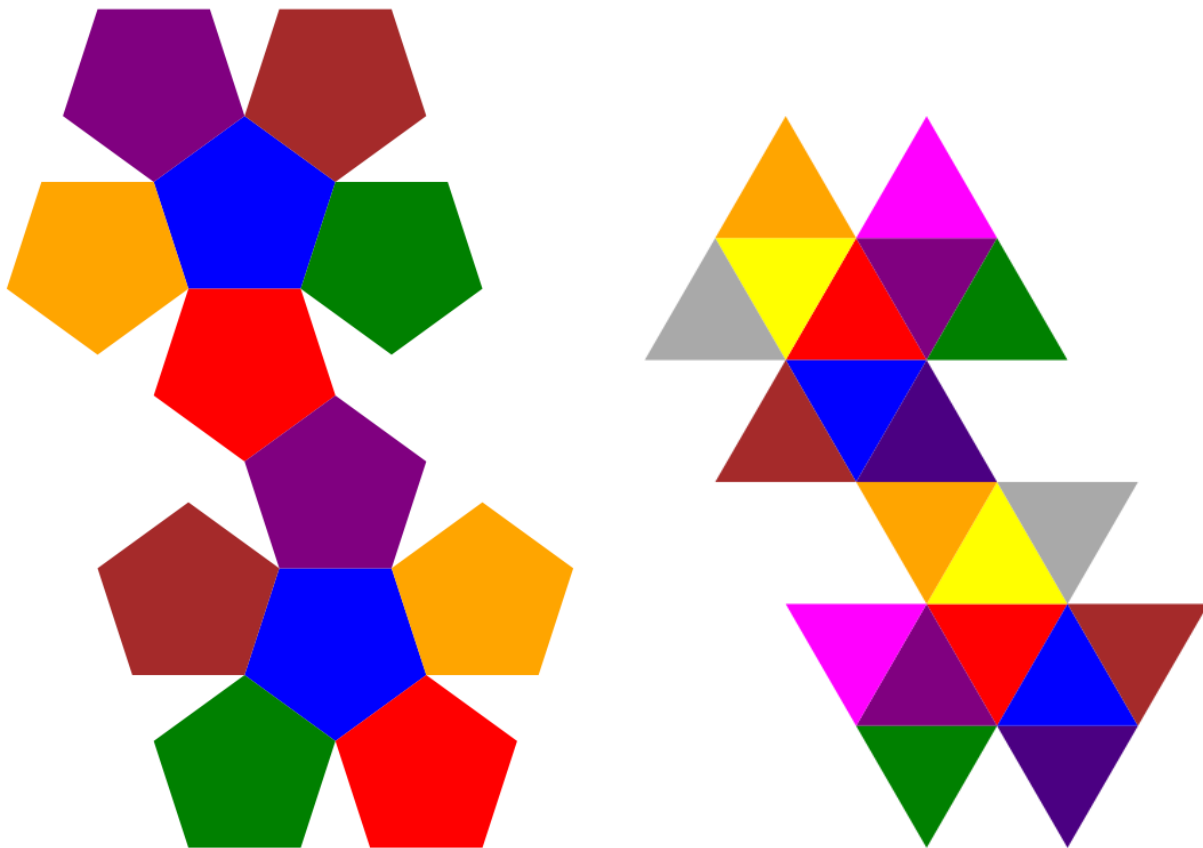


FIGURE III.1 – Patrons pour le dodécaèdre et l’icosaèdre réguliers

Isométries du tétraèdre

Si \mathcal{T} est un tétraèdre régulier alors $G_{\mathcal{T}}$ est isomorphe au groupe symétrique S_4 . L’isomorphisme est donné par l’action de $G_{\mathcal{T}}$ sur les sommets de \mathcal{T} ; le sous-groupe des isométries directes correspond au groupe alterné A_4 .

On va décrire ci-dessous la correspondance précise entre permutations et isométries.

- Les 3-cycles sont réalisés par les rotations d’angle $\pm 2\pi/3$ autour des droites entre un sommet et le centre de la face opposée ;
- Les doubles transpositions sont réalisées par les rotations d’angle π d’axe joignant les milieux de deux arêtes opposées ;
- les 4-cycles sont réalisés par les anti-rotations d’angle $\pm \pi/2$, d’axe propre -1 la droite entre les milieux de deux arêtes opposées et dont le centre est le milieu de ces derniers ;
- les transpositions sont réalisées par les symétries dans les plans passant par deux sommets et le milieu de l’arête opposée.

Isométries du cube et de l'octaèdre

Si \mathcal{C} est un cube (respectivement un octaèdre) alors $G_{\mathcal{C}}$ est isomorphe au groupe $S_4 \times \{\pm 1\}$. L'isomorphisme est donné par l'action sur les diagonales—droites entre sommets opposés (respectivement par l'action sur les paires de faces opposées) et le déterminant.

On va décrire ci-dessous la correspondance entre les isométries directes du cube et de l'octaèdre et les permutations.

- Les 4-cycles (respectivement les doubles permutations) correspondent aux rotations d'angle $\pm\pi/2$ (respectivement π) dont l'axe joint les centres de deux faces opposées du cube ou deux sommets opposés de l'octaèdre.
- Les transpositions correspondent aux rotations d'angle π dont l'axe joint les milieux de deux arêtes opposées (du cube ou de l'octaèdre) ;
- les 3-cycles correspondent aux rotations d'angles $\pm 2\pi/3$ dont l'axe est une diagonale du cube (joint deux sommets opposés) ou la droite entre les centres de deux faces opposées de l'octaèdre.

La correspondance entre isométries indirectes et éléments de S_4 (via la composition $G_{\mathcal{C}} \rightarrow S_4 \times \{\pm 1\} \rightarrow S_4$) est la suivante :

- l'identité correspond à l'isométrie de partie linéaire $-\text{Id}$ (la seule anti-rotation d'angle π) fixant le centre de \mathcal{C} (l'isobarycentre des sommets).
- Les 4-cycles correspondent aux anti-rotations d'angle $\pm\pi/2$ dont l'axe joint les centres de deux faces opposées du cube, ou deux sommets de l'octaèdre, et le centre est leur milieu.
- Les doubles transpositions correspondent aux symétries dans les plans méridiens du cube (plan joignant les milieux de quatre arêtes disjointes), ou dans le plan entre deux arêtes opposées de l'octaèdre ;
- les transpositions correspondent aux symétries dans les plans joignant deux arêtes opposées du cube, ou passant par deux sommets opposés de l'octaèdre et les milieux de deux arêtes opposées ne contenant pas ces sommets ;
- les 3-cycles correspondent aux anti-rotations d'axe joignant deux sommets opposés (une diagonale) du cube, ou les centres de deux faces opposées de l'octaèdre, et de centre le milieu de ces points.

Isométries du dodécaèdre et de l'icosaèdre

Si \mathcal{C} est un dodécaèdre ou un icosaèdre alors $G_{\mathcal{C}}$ est isomorphe au groupe $A_5 \times \{\pm 1\}$. L'isomorphisme est donné par l'action sur les triplets de paires deux à deux disjointes d'arêtes opposées (il est laissé en exercice au lecteur de démontrer qu'il y a bien cinq tels triplets) et le déterminant.

La correspondance entre isométries directes et permutations est la suivante.

- Les 5-cycles correspondent aux rotations d'angles $\pm 2\pi/5, \pm 4\pi/5$ et d'axe joignant les centres de deux faces opposées du dodécaèdre ou deux sommets opposés de l'icosaèdre.
- Les 3-cycles correspondent aux rotations d'angles $\pm 2\pi/3$ et d'axe joignant deux sommets opposés du dodécaèdre ou les centres de deux faces opposées de l'icosaèdre.
- Les doubles transpositions correspondent aux rotations d'angle π entre les milieux de deux arêtes opposées.

La correspondance entre isométries indirectes et permutations est la suivante.

- l'identité correspond à l'isométrie de partie linéaire $-\text{Id}$ (la seule anti-rotation d'angle π) fixant le centre de \mathcal{C} (l'isobarycentre des sommets).

- Les 5-cycles correspondent aux anti-rotations d'angles $\pm\pi/5, \pm3\pi/5$, d'axe joignant les centres de deux faces opposées du dodécaèdre ou deux sommets opposés de l'icosaèdre et de centre le milieu de ces deux points.
- Les 3-cycles correspondent aux anti-rotations d'angles $\pm\pi/3$, d'axe joignant deux sommets opposés du dodécaèdre ou les centres de deux faces opposées de l'icosaèdre et de centre le milieu de ces deux points.
- Les doubles transpositions correspondent aux symétries dans les plans joignant deux arêtes opposées.

III.3.4 Volume

De même que pour les ouverts du plan on peut calculer le volume des ouverts de l'espace, c'est à dire qu'il existe une fonction Vol définie sur les ouverts de \mathcal{E} qui vérifie les propriétés de la section II.6.1 (la première étant remplacée par son analogue tridimensionnel). On va se contenter ici de calculer le volume de quelques solides. La preuve de la proposition suivante est similaire à celle de la proposition II.22.

Proposition III.8 *Soit \mathcal{P} un plan de \mathcal{E} , \mathcal{T} un triangle dans \mathcal{P} et $x \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{P}$. Soit \mathcal{C} le tétraèdre de base \mathcal{T} et dont le sommet restant est x . On note $h = d(x, \mathcal{P})$ la distance de x à son projeté orthogonal sur \mathcal{P} , on a alors :*

$$\text{Vol}(\mathcal{C}) = \frac{1}{3} \text{Aire}(\mathcal{T}) \cdot h.$$

Démonstration : Soit \vec{u} un vecteur unitaire orthogonal à \mathcal{P} ; pour $\ell > 0$ et $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}$ on note

$$\mathcal{U}_\ell = \{y + t\ell\vec{u} : y \in \mathcal{U}, t \in]0, 1[\}. \quad (\text{III.3.1})$$

On voit alors que $\text{Vol}(\mathcal{U}_\ell) = \ell \text{Aire}(\mathcal{U})$ pour tout ouvert \mathcal{U} de \mathcal{P} .

Soit \vec{v} le vecteur orthogonal à \mathcal{P} tel que $x - \vec{v} \in \mathcal{P}$ (de sorte que $h = \|\vec{v}\|$). On écrit $\vec{v} = a\vec{u}$ pour un $a \in \mathbb{R}$ et on note f_t l'homothétie de centre $x - \vec{v}$ et de rapport t . Pour tout $n \geq 1$ on peut recouvrir \mathcal{C} par n triangles épaissis, d'une manière similaire à celle utilisée pour démontrer la proposition II.22 :

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{j=1}^n \left(f_{\frac{j}{nh}}(\mathcal{T}) \right)_{h/n} + \frac{j}{nh} \vec{u}$$

et on voit alors que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{C}) &\leq \text{Vol} \left(\bigcup_{j=1}^n \left(f_{\frac{j}{nh}}(\mathcal{T}) \right)_{h/n} + \frac{j}{nh} \vec{u} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \text{Vol} \left(f_{\frac{j}{nh}}(\mathcal{T}) \right)_{h/n} = \sum_{j=1}^n \frac{h}{n} \cdot \left(\frac{j}{nh} \right)^2 \cdot \text{Aire}(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

Le terme de droite ci-dessus tend vers $h \text{Aire}(\mathcal{T}) \int_0^1 t^2 dt$ (c'est une somme de Riemann), donc on a finalement

$$\text{Vol}(\mathcal{C}) \leq \frac{1}{3} \text{Aire}(\mathcal{T}) \cdot h.$$

En utilisant l'inclusion dans l'autre sens :

$$\bigcup_{j=2}^n \left(f_{\frac{j-1}{nh}}(\mathcal{T}) \right)_{h/n} + \frac{j}{nh} \vec{u} \subset \mathcal{C}$$

on obtient l'inégalité opposée. □

De la même façon on peut calculer le volume d'une boule.

Proposition III.9 Soient $x \in \mathcal{E}$, $r > 0$ et

$$\mathcal{B} = \{y \in \mathcal{E} : d(x, y) < r\}.$$

On a $\text{Vol}(\mathcal{B}) = \frac{4}{3}\pi r^2$.

Démonstration : On peut recouvrir \mathcal{B} par $2n$ disques de rayons $r \cdot \sqrt{1 - (j/n)^2}$ chacun épaissi de r/n dans la direction orthogonale. Le volume totale est alors

$$2\pi \frac{r}{n} \sum_{j=1}^n r^2 \left(1 - \left(\frac{j}{n} \right)^2 \right)$$

qui converge vers $\pi r^3 \int_0^1 (1 - t^2) dt = 4\pi r^3/3$, d'où il suit que $\text{Vol}(\mathcal{C}) \leq 4\pi r^3/3$. L'inégalité opposée s'obtient de la même manière. □

III.4 Feuilles d'exercices

III.4.1 Isométries

Exercice III.1

Soient a, b et c trois nombres réels et soit f l'application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} donnée, dans un certain repère orthonormé \mathcal{R} de \mathcal{E} , par la formule :

$$f(x, y, z) = (x/3 + 2y/3y - 2z/3 + a, 2x/3 + y/3 + 2z/3 + b, 2x/3 - 2y/3 - z/3 + c).$$

(1.a) Montrez que f est une isométrie directe.

(1.b) Déterminer l'axe et le vecteur de f . Pour quelles valeurs de (a, b, c) l'application f est-elle une rotation ?

(1.c) Déterminer l'angle de f au signe près. Déterminer le signe de ce dernier pour chaque orientation de l'axe de f .

Exercice III.2

Soit σ l'application linéaire $E \rightarrow E$ dont la matrice dans une base ortonormée $B = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$\text{Mat}_B(\sigma) = \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & -3/7 \\ -2/7 & 3/7 & -6/7 \\ -3/7 & -6/7 & -2/7 \end{pmatrix}.$$

(2.a) Montrer que σ est une réflexion vectorielle, calculer son plan fixe $\ker(\sigma - \text{Id})$.

(2.b) Soit $x_0 \in \mathcal{E}$ et soit s l'application affine de \mathcal{E} dans lui-même de partie linéaire σ et telle que $s(x) = x + e_1 + 2e_2$. Montrer que s est une symétrie glissée, calculer son vecteur et son plan stable.

Exercice III.3

(3.a) Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E . Pour $\theta \in]0, \pi[$ on note B_θ la base

$$(\cos(\theta)e_1 - \sin(\theta)e_2, \sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2, e_3).$$

Montrer que c'est aussi une base orthonormée directe de E .

(3.b) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et soient ρ, ρ_θ les applications linéaires $E \rightarrow E$ déterminées par $\text{Mat}_B(\rho) = A$ et $\text{Mat}_{B_\theta}(\rho_\theta) = A$.

Montrer que $\rho_\theta \circ \rho$ est une rotation et calculer son angle (au signe près) en fonction de θ .

Exercice III.4

Soient r, r' deux rotations d'axes \mathcal{D} et \mathcal{D}' tels que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{x_0\}$. Montrer que $r \circ r'$ est une rotation dont l'axe \mathcal{D}'' passe par x_0 , et donner une construction géométrique de \mathcal{D}'' .

III.4.2 Polyèdres

Exercice III.5

(5.a) Soit \mathcal{P} un plan de \mathcal{E} , \mathcal{T} un triangle équilatéral dans \mathcal{P} et \mathcal{D} la droite orthogonale à \mathcal{P} passant par le centre de gravité de \mathcal{T} . Construire un tétraèdre régulier dont l'une des faces est \mathcal{T} et dont le sommet hors de cette face est sur \mathcal{D} .

(5.b) Construire un cube; montrer que si \mathcal{C} est l'enveloppe convexe des centres des faces de ce cube alors \mathcal{C} est un octaèdre régulier.

(5.c) Soit \mathcal{C} un dodécaèdre régulier; montrer que si \mathcal{C}' est l'enveloppe convexe des centres des faces de \mathcal{C} alors \mathcal{C}' est un icosaèdre régulier.

(5.d) Que sont les polyèdres engendrés par les centres des faces d'un tétraèdre, d'un octaèdre et d'un dodécaèdre?

Exercice III.6

(6.a) En utilisant les groupes d'isométries, montrer que tout polyèdre régulier \mathcal{C} est inscrit dans une sphère (c'est-à-dire qu'il existe un point de \mathcal{E} dont tous les sommets de \mathcal{C} sont à égale distance).

(6.b) Calculer la longueur d'une arête d'un cube inscrit dans une sphère de rayon 1. Même question pour un tétraèdre et un octaèdre.

Exercice III.7

Calculer les angles dièdres des polyèdres réguliers : plus précisément, étant donné un polyèdre régulier \mathcal{C} et deux faces adjacentes F, F' de \mathcal{C} , montrer que la mesure de l'angle dièdre entre (les demi-plans déterminés par) F et F' vaut :

- $\pi/2$ si \mathcal{C} est un cube;
- $\arccos(1/3)$ si \mathcal{C} est un tétraèdre;

- $\arccos(-1/3)$ si \mathcal{C} est un octaèdre ;
- $\arccos(-\sqrt{5}/5)$ si \mathcal{C} est un dodécaèdre ;
- $\arccos(-\sqrt{5}/3)$ si \mathcal{C} est un icosaèdre

(pour le dernier cas on pourra utiliser l'égalité $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$).

Exercice III.8

Soit \mathcal{C} un tétraèdre régulier dont les arêtes sont de longueur 1.

(8.a) On fixe un sommet x de \mathcal{C} . Calculer les produits scalaires $\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy'} \rangle$ pour $y, y' \neq x$ des sommets de \mathcal{C} .

(8.b) En déduire (directement) que si x_1, x_2, x_3, x_4 sont les sommets de \mathcal{C} et σ est une permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ il existe une isométrie $g \in G_{\mathcal{C}}$ telle que $g(x_i) = x_{\sigma(i)}$.

(8.c) Montrer (sans utiliser que $|G_{\mathcal{C}}| = 24$) que $G_{\mathcal{C}}$ est isomorphe à \mathfrak{S}_4 , et le sous-groupe des rotations à \mathfrak{A}_4 .

Exercice III.9

Calculer le volume de l'octaèdre régulier inscrit dans une sphère de rayon 1 (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 6).