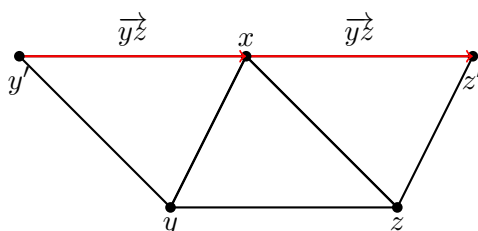


FEUILLE D'EXERCICES n° 5 :
TRIANGLES, POLYÈDRES ET SIMILITUDES

1. TRIANGLES

Exercice 1

Dans la figure suivante :



montrer que tous les triangles sont directement isométriques, et en déduire une preuve alternative du fait que la somme des mesures des angles d'un triangle vaut π .

Exercice 2

(2.a) Soient $x, y, z \in \mathcal{E}$ non-alignés. Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 les droites (xy) et (xz) et soit $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ les bissectrices des demi-droites $x + \mathbb{R}_+\vec{xy}, x + \mathbb{R}_+\vec{xz}$ et $x - \mathbb{R}_+\vec{xy}, x + \mathbb{R}_+\vec{xz}$ respectivement. Soit :

$$S = \{x' \in \mathcal{E} : d(x', \mathcal{D}_1) = d(x', \mathcal{D}_2)\}.$$

Montrer que $S = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$.

(2.b) Montrer en utilisant la question précédente que les bissectrices du triangle $\{x, y, z\}$ sont concourantes.

Exercice 3

Soit x, y, z un triangle. On note respectivement o, g, h le centre de son cercle circonscrit, son centre de gravité et son orthocentre.

(3.a) Soit h' le barycentre défini par

$$\vec{h'x} + \vec{h'y} + \vec{h'z} - 2\vec{h'o} = 0.$$

Montrer que $h' = h$ (calculer $\langle \vec{xh'}, \vec{yz} \rangle$, etc.).

(3.b) Dédire de la question précédente que le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit d'un triangle sont alignés.

Exercice 4

(Point de Gergonne) Soit x_0 le centre du cercle inscrit de T et x', y', z' les projections respectives de x_0 sur $(yz), (zx)$ et (xy) . Montrer que les droites $(xx'), (yy')$ et (zz') sont concourantes (on pourra utiliser le théorème de Ceva).

Exercice 5

On note ℓ le périmètre $\ell_x + \ell_y + \ell_z$ de T . Montrer que, si r désigne le rayon du cercle inscrit dans T , on a $2\text{Aire}(T) = \ell r$.

Exercice 6

(6.a) (Formule de Héron) Montrer que

$$\text{Aire}(T)^2 = \ell(\ell - \ell_x)(\ell - \ell_y)(\ell - \ell_z).$$

* (6.b) Montrer que si $s, t, u \in \mathbb{R}_+$ on a $stu \leq \left(\frac{s+t+u}{3}\right)^3$, avec égalité si et seulement si $s = t = u$.

(6.c) (Inégalité isopérimétrique) En utilisant les deux questions précédentes montrer que pour tout triangle T on a

$$\text{Aire}(T) \leq \frac{\ell^2}{3\sqrt{3}}$$

avec égalité si et seulement si T est équilatéral.

2. POLYGONES

Exercice 7

Calculer les rayons respectifs des cercles circonscrit à et inscrit dans un polygone régulier à 12 côtés de longueur 1.

Exercice 8

Soit \mathcal{C} un polygone convexe à n sommets et soient $\theta_1, \dots, \theta_n$ les mesures des angles de \mathcal{C} . Montrer que $\sum_i \theta_i = (n - 2)\pi$.

Exercice 9

(9.a) En utilisant une méthode similaire à celle de la preuve de (1) de la proposition II.21, calculer l'aire d'un disque de rayon 1 dans \mathcal{E} .

(9.b) Calculer l'aire d'un polygone convexe en fonction de ses angles et de la longueur de ses côtés.

(9.c) Retrouver le résultat de la première question en utilisant la deuxième.

Exercice 10

(10.a) Montrer qu'un triangle est régulier si et seulement si tous ses côtés ont la même longueur.

(10.b) Montrer que pour tout $n \geq 4$ il existe un polygone dont tous les côtés ont la même longueur mais qui n'est pas régulier.

(10.c) Montrer que pour tout $n \geq 4$ il existe un polygone dont tous les angles ont la même mesure mais qui n'est pas régulier.

(10.d) Montrer que si un polygone est inscrit dans un cercle alors il est régulier si et seulement si tous ses côtés (respectivement angles) ont la même longueur (resp. sont égaux).

3. GROUPES DIÉDRAUX

Exercice 11

Soit $T = \{x, y, z\}$ un triangle de \mathcal{E} .

(11.a) Montrer que si $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ vérifie $f(T) = T$ alors f est une rotation ou une réflexion (*montrer que f a un point fixe*).

(11.b) Soit s une réflexion de \mathcal{E} telle que $s(T) = T$. Montrer que l'axe de s contient l'un des sommets de T et est orthogonal au côté opposé à ce sommet.

(11.c) Montrer que s'il existe une rotation r de \mathcal{E} telle que $r(T) = T$ alors on peut orienter \mathcal{E} de sorte que l'angle de r soit égal à $2\pi/3$. Montrer aussi que T est équilatéral.

(11.d) Conclure que le sous-groupe

$$G = \{g \in \text{Isom}(\mathcal{E}) : g(T) = T\}$$

est de cardinal 6, contenant trois réflexions et deux rotations, si T est équilatéral, de cardinal 2 contenant une réflexion si T est isocèle en un sommet mais pas équilatéral, et trivial dans les cas restants.

Exercice 12

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 quatre points de \mathcal{E} tels que pour tout $i = 1, 2, 3, 4$ le point x_i ne soit pas dans l'enveloppe convexe des $x_j, j \neq i$. Soit \mathcal{C} l'enveloppe convexe des x_i .

(12.a) Montrer que \mathcal{C} est un polygone convexe ayant exactement quatre sommets.

(12.b) Montrer que si $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ vérifie $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ alors f est une réflexion ou une rotation.

On notera $G_{\mathcal{C}} = \{f \in \text{Isom}(\mathcal{E}) : f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}$.

(12.c) Montrer que si $s \in G_{\mathcal{C}}$ est indirecte alors l'axe de s contient deux sommets de \mathcal{C} ou bien est la médiatrice de deux côtés de \mathcal{C} .

(12.d) Montrer que si $r \in G_{\mathcal{C}}$ est une rotation alors on peut orienter \mathcal{E} de façon à ce que son angle vaille $\pm\pi/2$ ou π . Montrer que dans le premier cas \mathcal{C} est régulier (i.e. est un carré), et dans le second \mathcal{C} a tous ses côtés de même longueur (i.e. est un losange) ou tous ses angles droits (i.e. est un rectangle).

(12.e) Montrer (en n'utilisant que les questions précédentes) que les cardinaux possibles pour $|G_{\mathcal{C}}|$ sont 1, 2, 4 et 8 et caractériser chaque cas où $G_{\mathcal{C}}$ est non-trivial.

Exercice 13

Soit \mathcal{C} un polygone régulier. Montrer que si H est un sous-groupe du groupe $G_{\mathcal{C}}$ alors H est lui-même diédral ou il est cyclique; si H n'est composé que d'isométries directes montrer que l'on est toujours dans le second cas.

4. SIMILITUDES

Exercice 14

(Voir <http://images.math.cnrs.fr/Des-triangles-dores.html>) Déterminer l'ensemble des triangles T tels qu'il existe un triangle T' ayant les mêmes angles que T , deux côtés distincts de même longueur que deux côtés distincts de T mais T' n'est pas isométrique à T .

Exercice 15

Soient $\lambda > 0$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\phi = \lambda \cdot \rho$ où ρ est la rotation linéaire d'angle θ . Soient $x, y, z \in \mathcal{E}$ et x', y', z' les images respectives de z par la similitude de centre x et de partie linéaire ϕ , de x par la similitude de centre y et de partie linéaire ϕ et de y par la similitude de centre z et de partie linéaire ϕ . Montrer que les triangles $\{x, y, z\}$ et $\{x', y', z'\}$ ont le même centre de gravité.

Exercice 16

On fixe un triangle T_0 , une droite \mathcal{D} et un point $x \notin \mathcal{D}$ dans \mathcal{E} .

(16.a) A un point $y \in \mathcal{D}$ on associe le point $z \in \mathcal{E}$ tel que le triangle $T = \{x, y, z\}$ soit l'image par une similitude directe du triangle T_0 . Décrire l'ensemble des points z ainsi obtenus.

(16.b) Si f est une similitude de \mathcal{E} et T' un triangle de \mathcal{E} montre que l'orthocentre de $f(T')$ (respectivement les centres des cercles circonscrit et inscrit à $f(T')$) sont les images par f de ceux de T' .

(16.c) Décrire l'ensembles des orthocentres des triangles T de la question a).

Exercice 17

(17.a) Soient $x, y, x', y' \in \mathcal{E}$ tels que $x \neq y, x' \neq y'$. Construire géométriquement une similitude directe f^+ et une similitude indirecte f^- telles que $f^\pm(x) = x', f^\pm(y) = y'$ (commencer par f^-).

(17.b) Montrer que f^+, f^- sont les seules similitudes vérifiant cette propriété. A quelle condition sur x, y, x', y' sont-elles des isométries ?

Exercice 18

Soit $a > 0$ et C_a la courbe définie par

$$C_a = \{(t \cos(a \ln(t)), t \sin(a \ln(t))) : t \in]0, +\infty[\}.$$

Montrer que C_a est stable par les homothéties de rapports $-e^{\pi/a}$ et $e^{2\pi/a}$ et de centre $(0, 0)$. Montrer que C_a est stable par la composée de la rotation d'angle $\pi/2$ et de centre $(0, 0)$ et l'homothétie de rapport $e^{\pi/2a}$. Quel est le groupe des isométries directes préservant C_a ?

Exercice 19

On identifie \mathcal{E} avec \mathbb{C} . Si $u, v, w \in \mathbb{C}$ sont trois points de \mathcal{E} on note $\zeta(u, v, w) = \frac{u-w}{u-v}$.

(19.a) Montrer que si $u, v, w \in \mathcal{E}$ on a $\zeta(u, v, w) \in \mathbb{R}$ si et seulement si u, v, w sont alignés.

(19.b) Montrer que $\zeta(u, v, w)\zeta(v, w, u)\zeta(w, u, v) = -1$.

(19.c) Soit f une similitude de \mathcal{E} , montrer que $\zeta(u, v, w) = \zeta(f(u), f(v), f(w))$.

(19.d) Montrer que si $u = 0, v = 1$ et $w = z \neq 0, 1$ on a $\zeta(u, v, w) = z, \zeta(v, w, u) = \frac{1}{1-z}$ et $\zeta(w, u, v) = \frac{z-1}{z}$.

En déduire en utilisant la question (c) que pour tous $u, v, w \in \mathbb{C}$ on a $\zeta(v, w, u) = \frac{1}{1-\zeta(u, v, w)}$ et $\zeta(w, u, v) = \frac{\zeta(u, v, w)-1}{\zeta(u, v, w)}$, puis que $1 - \zeta(v, w, u) + \zeta(u, v, w)\zeta(v, w, u) = 0$.

(19.e) Déduire des questions précédentes que si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ il existe trois points $u, v, w \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 = \zeta(u, v, w), z_2 = \zeta(v, w, u)$ et $z_3 = \zeta(w, u, v)$ si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) $z_1 z_2 z_3 = -1$;
- (ii) $1 - z_2 + z_1 z_2 = 0$.

5. GROUPES DE PAVAGE

Exercice 20

Dans tout cet exercice on suppose que G est un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathcal{E})$.

(20.a) On note T_G l'ensemble des translations contenues dans G . Montrer que T_G est un sous-groupe de G .

(20.b) On suppose que $T_G = \{t_{n\vec{u}} : n \in \mathbb{Z}\}$ pour un $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$. Montrer que pour toute rotation r contenue dans G l'angle de r est π , et que les centres de deux telles rotations diffèrent d'un multiple demi-entier de \vec{u} .

(20.c) On suppose qu'il existe des vecteurs linéairement indépendants $\vec{u}, \vec{v} \in E$ tels que

$$T_G = \{t_{n\vec{u}+m\vec{v}} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Montrer que les angles des rotations de G sont contenus dans $\{\pm\pi/2 \pm 3\pi/4\}$ ou dans $\{\pm\pi/3, \pm 2\pi/3, \pi\}$.

En déduire que les symétries contenues dans G ont au plus 6 directions différentes pour leurs axes.

(20.d) Quels peuvent être les centres des rotations de G ?