

**FEUILLE D'EXERCICES n° 7 :
CONIQUES**

Exercice 1

Soit q une forme quadratique affine donnée en coordonnées (dans un repère quelconque) par

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c.$$

Montrer que q est impropre si et seulement si q n'a pas de zéro ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 2

Déterminer les lieux donnés par les équations de la forme $q(x) = 0$ si q est une forme quadratique affine impropre.

Exercice 3

Soient $C_i, i = 1, \dots, 6$ les ensembles d'équations respectives (dans un repère orthonormé fixé) $q_i = 0$, où :

$$\begin{aligned} q_1 &= 5x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 + 1, & q_4 &= 2x_1x_2 + 4x_2 + 2x_2 + 1, \\ q_2 &= 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2 + 4x_2 + 5x_2 + 4, & q_5 &= x_1x_2 - 2x_1 + 19, \\ q_3 &= 3x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_1 + x_2 - 1, & q_6 &= 4x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 3x_1 - 2. \end{aligned}$$

Lesquelles sont des coniques propres ? Donner pour chacune son type, puis calculer son centre et ses axes.

Exercice 4

Donner la paramétrisation trigonométrique puis rationnelle des coniques définies dans un repère orthonormé par les équations :

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - r^2 &= 0 \quad (r > 0), \\ 2x_1x_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 5

Utiliser la paramétrisation rationnelle du cercle pour décrire tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$ (de tels triplets sont appelés *pythagoriciens*).

Exercice 6

Montrer que les courbes paramétrées en polaire par $r = f(\theta)$ avec f une solution de l'équation différentielle $(1/f) + \frac{d^2(1/f)}{d\theta^2} = c$ (où $c \in \mathbb{R}$) sont des coniques (dans le modèle de Newton simplifié, des corps de masse « petite » soumis à une force gravitationnelle issue d'un point de masse « grande » décrivent donc des coniques dont un foyer est ce point).

Exercice 7

Donner une équation réduite, puis les foyers et directrices, pour les coniques définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 21x_1^2 - 24x_1x_2 + 14x_2^2 &= 0, \\ x_1^2 - x_1x_2 + 1 &= 0, \\ x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 4x_1 - 12x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 8

Soit C la conique définie par une forme quadratique affine q et x_0 son centre. On suppose que $q(x_0) > 0$; montrer que si $q(x) > 0$ il passe par x deux droites tangentes à C , une si $q(x) = 0$ et aucune si $q(x) < 0$.

Exercice 9

(9.a) Expliquer le principe des antennes paraboliques en utilisant un analogue à la proposition précédente pour les paraboles (pour lesquelles « un des foyers est à l'infini »). (9.b) Dans le cas d'un cercle, donner une démonstration directe de la proposition (dans ce cas l'énoncé devient « la tangente en un point est orthogonale au diamètre passant par ce point »).

Exercice 10

Soit C une conique, \mathcal{D} le grand axe (dans le cas d'une ellipse), l'axe coupant C (dans le cas d'une hyperbole) ou le seul axe de C . Soit $x \in C \cap \mathcal{D}$. Soit \mathcal{D}' une droite orthogonale à \mathcal{D} ne passant pas par x et soit f l'application qui à $y \in \mathcal{D}'$ associe un point de $(xy) \cap C$ qui n'est pas x . Montrer que f est bien définie, qu'elle est bijective de \mathcal{D}' sur $C \setminus \{x\}$, et la comparer à la paramétrisation rationnelle.

Exercice 11

Soit $\mathcal{F} = \mathbb{R}^3$ avec sa structure naturelle d'espace affine euclidien. Soit $K \subset \mathcal{F}$ le cône d'équation $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Soit \mathcal{P} un plan de \mathcal{F} ne contenant pas le point $(0, 0, 0)$. Soit \vec{v} le vecteur unitaire orthogonal à \mathcal{P} dont la troisième coordonnée est positive et soit \vec{u} le vecteur de coordonnées $(0, 0, 1)$. Montrer que $K \cap \mathcal{P}$ est :

- une ellipse si $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle < \sqrt{2}/2$;
- une parabole si $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \sqrt{2}/2$;
- une hyperbole si $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle > \sqrt{2}/2$.

Exercice 12

(12.a) Montrer que si \mathcal{P} est le plan d'équation $x_3 = 1$ et C le cercle unité centré en $(0, 0, 1)$ le cône K_C est en fait égal à K .

(12.b) Refaire l'exercice 11 avec \mathcal{P} le plan d'équation $x_3 = 1$ et C la conique d'équation $x_1x_2 = 1$.

Exercice 13

(13.a) Soit S la sphère de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 1 et $x_0 = (0, 0, 2)$. Montrer que dans ce cas le plan \mathcal{P} tangent à S au point antipodal à x_0 a pour équation $x_3 = 0$. Donner des formules en coordonnées pour la projection stéréographique de pôle x_0 . On notera f cette application.

(13.b) Soit \mathcal{P}' un plan intersectant S en un cercle C . Montrer que $f(C)$ est :

- une ellipse si $x_0 \notin C$;
- une parabole si $x_0 \in C$ et $(0, 0, 0) \notin C$;
- une droite si $x_0, (0, 0, 0) \in C$.