

EXAMEN PARTIEL, GÉOMÉTRIE II MARDI 1 MARS 2016

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés pendant toute la durée de l'épreuve. **La qualité de rédaction entrera pour une part substantielle dans la notation.** Tout énoncé du cours utilisé doit être énoncé clairement. Le barème donné n'est qu'indicatif.

Problème 1 (4 points)

Dans ce problème \mathcal{E} est un plan affine ; les trois questions sont indépendantes l'une de l'autre.

Question (1) (Question de cours) Soient $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{E}$. Montrer que l'on a $\overrightarrow{x_1x_2} = \overrightarrow{x_4x_3}$ si et seulement si $\overrightarrow{x_1x_4} = \overrightarrow{x_2x_3}$.

Question (2.a) Soit x_0 le milieu de $[x_1x_3]$ (c'est-à-dire que $\overrightarrow{x_0x_1} + \overrightarrow{x_0x_3} = 0$). Montrer que x_0 est aussi le milieu de $[x_2x_4]$ si et seulement si $\overrightarrow{x_1x_2} = \overrightarrow{x_4x_3}$.

Question (2.b) Dédurre de la question précédente que les diagonales d'un quadrilatère s'intersectent en leur milieu commun si et seulement si le quadrilatère est un parallélogramme.

Question (2.c) Si x_1, x_2, x_3, x_4 forment un parallélogramme montrer que les diagonales s'intersectent en l'isobary-centre des sommets.

Question (3) Soient $x, y, z \in \mathcal{E}$ et soient x', y' et z' les milieux respectifs des segments $[yz], [zx]$ et $[xy]$. Montrer que les droites $(xx'), (yy')$ et (zz') sont concourantes en le point $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z$.

Problème 2 (6 points)

Question (1.a) Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 2 et soit (x_0, B) un repère de \mathcal{E} . Soit

$$S = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

et soit σ l'application linéaire telle que $\text{Mat}_B(\sigma) = S$. Calculer les valeurs propres de $\sigma - \text{Id}$ et donner (en coordonnées dans B) une base de E diagonalisant σ .

Question (1.b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit s l'application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de partie linéaire σ et telle que $s(x_0) = (a, 1)$. Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles s a au moins un point fixe.

Question (1.c) Donner une expression pour s en coordonnées dans B . Pour chaque a pour lequel s a des points fixes donner (sous forme paramétrée en coordonnées dans (x_0, B)) l'ensemble de ces derniers.

Question (2.a) Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 3 et soit (x_0, B) un repère de \mathcal{E} . Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit ϕ l'application linéaire telle que $\text{Mat}_B(\phi) = A$. Montrer que $\phi - \text{Id}$ est inversible, et donner la matrice dans B de $\psi = (\phi - \text{Id})^{-1}$.

Question (2.b) Soit f l'application affine de partie linéaire ϕ et telle que $\phi(x_0) = (1, 1, 1)$ en coordonnées dans (x_0, B) . Dédurre de la question précédente que f a un unique point fixe, et donner ses coordonnées dans (x_0, B) .

Problème 3 (10 points)

Soit \mathcal{E} l'espace affine \mathbb{R}^3 ; on notera o le point $(0, 0, 0)$ de \mathcal{E} . On munit \mathcal{E} de sa structure euclidienne canonique : le produit scalaire est donné par

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \text{ si } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Question (1) Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites dans \mathcal{E} et D_1, D_2 leurs espaces directeurs. On suppose que $D_1 \neq D_2$. Montrer que $D_1 \cap D_2$ est vide ou un point.

Question (2.a) Soit $P = D_1 + D_2$. Montrer que $\dim(P) = 2$.

Question (2.b) Soit \mathcal{P} le plan affine $o + P$, soient π la projection orthogonale sur P et soit p l'application $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par $p(x) = o + \pi(\vec{ox})$. Montrer que p est affine et donner sa partie linéaire. Quelle est l'image de p ?

Question (2.c) Montrer que $p(\mathcal{D}_1)$ et $p(\mathcal{D}_2)$ sont deux droites de \mathcal{E} qui s'intersectent en exactement un point.

Question (3.a) On note x_0 l'intersection de $p(\mathcal{D}_1)$ et $p(\mathcal{D}_2)$. Soit \mathcal{D} la droite orthogonale à \mathcal{P} passant par x_0 . Montrer que \mathcal{D} a une intersection non-triviale avec chacune des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$.

Question (3.b) Dédurre de la question précédente que \mathcal{D} est orthogonale à chacune des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$: on l'appelle alors la *perpendiculaire commune* à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .

Question (4) (Les trois premières questions sont indépendantes des précédentes.) Soient

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

et soient $\mathcal{D}_1 = (0, 0, 0) + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_1$ et $\mathcal{D}_2 = (0, 1, 1) + \mathbb{R} \cdot \vec{v}_2$.

Question (4.a) Donner une base orthonormée (\vec{e}_1, \vec{e}_2) du plan $P = D_1 + D_2$.

Question (4.b) On pose

$$\pi(\vec{v}) = \langle \vec{v}_1, \vec{v} \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{v}_2, \vec{v} \rangle \vec{v}_2;$$

montrer que π est la projection orthogonale sur P .

Question (4.c) Donner un vecteur directeur de la droite P^\perp .

A partir de maintenant on reprend les notations des questions précédentes.

Question (4.d) Calculer le point d'intersection des droites $p(\mathcal{D}_1)$ et $p(\mathcal{D}_2)$.

Question (4.e) Dédurre de la question (3.b) une paramétrisation de la perpendiculaire commune à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .

Question (5.a) Soit f la fonction sur \mathbb{R}^2 définie par :

$$f(s, t) = (t - s)^2 + (t - s - 1)^2 + (t - 1)^2.$$

Montrer que f a un unique minimum local, le calculer et en déduire la valeur de $\inf (d(x, y) : x \in \mathcal{D}_1, y \in \mathcal{D}_2)$.

Question (5.b) Retrouver le résultat précédent en calculant les coordonnées des points $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}$ pour $i = 1, 2$.