

EXAMEN DE SECONDE SESSION, GÉOMÉTRIE II JEUDI 30 JUIN 2016

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés pendant toute la durée de l'épreuve. **La qualité de rédaction entrera pour une part substantielle dans la notation.** Tout énoncé du cours utilisé doit être énoncé clairement. Le barème donné n'est qu'indicatif.

Question TP (2 points)

Ecrire une fonction Python qui prend en entrée des nombres réels α, β (que l'on supposera positifs) et qui retourne 0 si $\alpha + \beta \geq \pi$, et les coordonnées du troisième sommet du triangle dont les deux premiers sont $(0, 0)$ et $(1, 0)$ et dont les angles respectifs en ces sommets sont α et β (on choisira le cas où le troisième sommet est d'ordonnée positive). On pourra supposer que les fonctions `sin` et `cos` du module `math` sont disponibles.

Problème 1 (3 points)

On considère \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne canonique. Soit s l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$s(x_1, x_2) = \left(\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2 + 2, -\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 \right).$$

Montrer que s est une isométrie, préciser sa nature et ses éléments géométriques.

Problème 2 (7 points)

Question (1) Soient r_1, r_2 les rotations de \mathbb{R}^2 de centre respectifs $(0, 0)$, $(1, 0)$ et d'angles $-\pi/2, \pi$. Donner le centre et l'angle de la rotation $r_3 = r_2 \circ r_1$.

Question (2.a) Soit r la rotation, de centre (n, m) et d'angle $\pi/2$. Donner une expression en coordonnées pour r .

Question (2.b) Soit T un triangle d'angles respectifs $\pi/4, \pi/4, \pi/2$ en ses sommets x, y, z . En utilisant la question précédente montrer que si x, z ont des coordonnées dans \mathbb{Z} (resp. $2\mathbb{Z}$) alors les coordonnées de y sont aussi dans \mathbb{Z} (resp. $2\mathbb{Z}$).

Question (2.c) On garde la notation ci-dessus. Montrer que si x, y ont des coordonnées dans $2\mathbb{Z}$ alors z a des coordonnées dans \mathbb{Z} . (*Indication : se ramener à la question précédente en considérant le milieu de $[xy]$.*)

Question (2.d) Dédurre des questions précédentes que toute rotation du groupe engendré par r_1, r_2 a un centre à coordonnées entières.

Question (3) Soient

$$x_1 = (-1/2, 0), x_2 = (-1, \sqrt{3}/2), x_3 = (-1, -\sqrt{3}/2), \\ x_4 = (1/2, 0), x_5 = (1, -\sqrt{3}/2) \text{ et } x_6 = (1, \sqrt{3}/2).$$

Soient s_1, s_2, s_3, s_4 les symétries d'axes respectifs $(x_1x_2), (x_1x_3), (x_4x_5), (x_4x_6)$.

Question (3.a) Donner des expressions en coordonnées pour les rotations $s_4 \circ s_3$ et $s_2 \circ s_1$.

Question (3.b) Montrer que $s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre $(0, \sqrt{3}/2)$ et d'angle $-2\pi/3$.

Problème 3 (7 points)

Question (1) Soit

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et soit ρ l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est égale à R .

Question (1.a) Montrer que ρ est d'ordre 4 (comme élément du groupe linéaire). Est-ce que ρ est une isométrie de \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique ? (La réponse doit être justifiée.)

Question (1.b) Calculer $\ker(\rho - \text{Id})$

Question (2) Soient $o = (0, 0, 0)$ et $\vec{v} = (-2, 2, 2)$. Soit r l'application affine $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$r(x) = o + \vec{v} + \rho(\vec{ox})$$

Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $r^n(o) = o + n\vec{v}$. En déduire une expression en fonction de n et $n \pmod{4}$ pour $r^n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

Question (3) Soient $o = (0, 0, 0)$ et $\vec{w} = (-2, 0, 1)$. Soit r' l'application affine $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$r'(x) = o + \vec{w} + \rho(\vec{ox}).$$

Question (3.a) Montrer que $\vec{w} \in \ker(\rho^2 + \text{Id})$ et en déduire (sans calcul) que r' a un point fixe dans \mathbb{R}^3 . (*Indication : on pourra montrer que $\ker(\rho^2 + \text{Id})$ est un supplémentaire à $\ker(\rho - \text{Id})$ qui est stable par ρ puis utiliser une proposition du cours.*)

Question (3.b) Calculer l'ensemble des points fixes de r' .

Question (3.c) Déduire des questions précédentes une expression en fonction de $n \pmod{4}$ pour $(r')^n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, puis donner les valeurs numériques des coordonnées de $(r')^N(1, 1, 1)$ où $N = 3^{23}$.

Question (4) Soit B la base

$$B = ((1, -1, -1), (-2, 0, 1), (0, -1, -1))$$

de \mathbb{R}^3 . On munit \mathbb{R}^3 de l'unique produit scalaire pour lequel B est une base orthonormée; montrer que ρ est une isométrie de \mathbb{R}^3 pour ce produit scalaire. (*Indication : calculer l'image d'une base orthonormée.*) Quelle sont les natures géométriques de r et r' vues comme isométries de cet espace euclidien ?

Problème 4 (3 points)

Question (1) On note t_1, t_2, t_3 des coordonnées barycentriques d'un plan affine euclidien \mathcal{E} . On admet que deux droites de \mathcal{E} définies respectivement par $at_1 + bt_2 + ct_3 = 0$ et $a't_1 + b't_2 + c't_3 = 0$ et $a''t_1 + b''t_2 + c''t_3 = 0$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Question (1.a) Soit (x, y, z) un triangle dans \mathcal{E} , soient x' (resp. y' , resp. z') un point de (yz) différent de z et y (resp. un point de (xz) différent de x et z , resp. un point de (xy) différent de x et y). On note λ (respectivement μ, ν) le nombre réel tel que $\overrightarrow{x'y} = \lambda \overrightarrow{x'z}$ (respectivement $\overrightarrow{y'z} = \mu \overrightarrow{y'x}$, $\overrightarrow{z'x} = \nu \overrightarrow{z'y}$). Exprimer les coordonnées baricentriques de x', y', z' dans la base affine (x, y, z) en fonction de λ, μ, ν .

Question (1.b) En utilisant la question précédente et le critère ci-dessus, montrer que les droites (xx') , (yy') et (zz') sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\lambda\mu\nu = -1$.

Question (2) Soit x_0 le centre du cercle inscrit de T et x', y', z' les projections respectives de x_0 sur (yz) , (zx) et (xy) . En utilisant la question précédente montrer que les droites (xx') , (yy') et (zz') sont concourantes (ne pas oublier d'éliminer le cas de parallélisme).