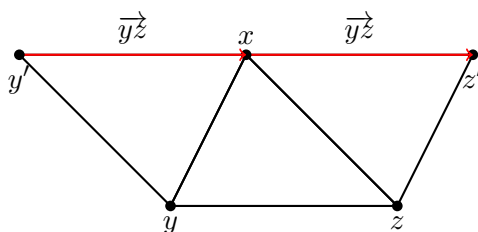


**FEUILLE D'EXERCICES n° 4 :
TRIANGLES DU PLAN EUCLIDIEN**

Exercice 1

Dans la figure suivante :



montrer que tous les triangles sont isométriques, et en déduire une preuve alternative du fait que la somme des mesures des angles d'un triangle vaut π .

Exercice 2

(2.a) Soit \mathcal{M} la médiatrice de T orthogonale à (yz) ; montrer qu'elle est égale au lieu des points $x' \in \mathcal{E}$ à distance égale de y et z , c'est à dire que

$$\mathcal{M} = \{x' \in \mathcal{E} : d(x', y) = d(x', z)\}.$$

(2.b) Soit \mathcal{D} la bissectrice de T issue de x ; montrer qu'elle est égale au lieu des points équidistants de (xy) et (xz) , autrement dit

$$\mathcal{D} = \{x' \in \mathcal{E} : d(x', p_1(x')) = d(x', p_2(x'))\}.$$

où p_1, p_2 sont les projections orthogonales sur $(xy), (xz)$ respectivement. En déduire la concourance des médiatrices d'un triangle.

Exercice 3

Montrer que le centre de gravité de T est l'isobarycentre de ses sommets.

Exercice 4

Montrer que le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit d'un triangle sont alignés.

Exercice 5

(5.a) (Théorème de Ceva) Soit \mathcal{E} un plan euclidien. Soit x, y, z un triangle de \mathcal{E} et $x' \in [yz], y' \in [zx], z' \in [xy]$. Montrer que les droites $(xx'), (yy')$ et (zz') sont concourantes si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\|\vec{x'y'}\|}{\|\vec{x'z'}\|} \cdot \frac{\|\vec{y'z'}\|}{\|\vec{y'x'}\|} \cdot \frac{\|\vec{z'x'}\|}{\|\vec{z'y'}\|} = 1.$$

(Le « vrai » théorème de Ceva a un énoncé plus général où l'on peut prendre $x' \in (yz)$, etc., et l'énoncé ne fait pas intervenir de métrique—voir le cours du premier semestre).

(5.b) (Point de Gergonne) Soit x_0 le centre du cercle inscrit de T et x', y', z' les projections respectives de x_0 sur $(yz), (zx)$ et (xy) . On suppose que tous les angles de T sont aigus ; montrer que les droites $(xx'), (yy')$ et (zz') sont concourantes (c'est vrai en général).

Exercice 6

On note ℓ le périmètre $\ell_x + \ell_y + \ell_z$ de T . Montrer que, si r désigne le rayon du cercle inscrit dans T , on a $2\text{Aire}(T) = \ell r$.

Exercice 7

(7.a) Montrer que

$$\text{Aire}(T)^2 = \ell(\ell - \ell_x)(\ell - \ell_y)(\ell - \ell_z).$$

* (7.b) Montrer que si $s, t, u \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$stu \leq \left(\frac{s+t+u}{3} \right)^3$$

avec égalité si et seulement si $s = t = u$.

(7.c) En utilisant les deux questions précédentes montrer que pour tout triangle T on a

$$\text{Aire}(T) \leq \frac{\ell^2}{3\sqrt{3}}$$

avec égalité si et seulement si T est équilatéral.

Exercice 8

Montrer directement (sans utiliser la proposition idoine du cours) que chacune des propriétés suivantes implique que les triangles $T = \{x, y, z\}$ et $T' = \{x', y', z'\}$ sont isométriques :

- les angles respectifs en x, x' de T, T' sont isométriques, $d(x', y') = d(x, y)$ et $d(x', z') = d(x, z)$.
- les angles respectifs en x, x' et y, y' de T, T' sont isométriques et $d(x, y) = d(x', y')$;
- les angles de T, T' sont deux à deux isométriques et T, T' ont la même aire.

Exercice 9

On identifie \mathcal{E} avec \mathbb{C} . Si $u, v, w \in \mathbb{C}$ sont trois points de \mathcal{E} on note

$$\zeta(u, v, w) = \frac{u - w}{u - v}.$$

(9.a) Montrer que si $u, v, w \in \mathcal{E}$ on a $\zeta(u, v, w) \in \mathbb{R}$ si et seulement si u, v, w sont alignés.

(9.b) Montrer que

$$(0.1) \quad \zeta(u, v, w)\zeta(v, w, u)\zeta(w, u, v) = -1.$$

(9.c) Soit f une isométrie de \mathcal{E} , montrer que $\zeta(u, v, w) = \zeta(f(u), f(v), f(w))$.

(9.d) Montrer que si $u = 0, v = 1$ et $w = z \neq 0, 1$ on a

$$\zeta(u, v, w) = z, \zeta(v, w, u) = \frac{1}{1-z}, \zeta(w, u, v) = \frac{z-1}{z}.$$

En déduire en utilisant la question c que pour tous $u, v, w \in \mathbb{C}$ on a

$$\zeta(v, w, u) = \frac{1}{1 - \zeta(u, v, w)} \text{ et } \zeta(w, u, v) = \frac{\zeta(u, v, w) - 1}{\zeta(u, v, w)}$$

puis que

$$(0.2) \quad 1 - \zeta(v, w, u) + \zeta(u, v, w)\zeta(v, w, u) = 0$$

(9.e) Conclure que si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ il existe trois points $u, v, w \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 = \zeta(u, v, w), z_2 = \zeta(v, w, u)$ et $z_3 = \zeta(w, u, v)$ si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) $z_1 z_2 z_3 = -1$;
- (ii) $1 - z_2 + z_1 z_2 = 0$.