

EXAMEN FINAL, GÉOMÉTRIE II – CORRIGÉ

Problème I

Question (1.a) Le centre du cercle inscrit dans T est le point d'intersection des bissectrices de T ; le centre du cercle circonscrit à T est l'intersection de ses médiatrices.

Question (1.b) La loi du cosinus est la relation suivante :

$$\ell_x^2 = \ell_y^2 + \ell_z^2 - 2\ell_y\ell_z \cos(\theta_x).$$

La démonstration revient au calcul suivant pour la norme du vecteur \overrightarrow{yz} :

$$\begin{aligned} \ell_x^2 = \|\overrightarrow{yz}\|^2 &= \|\overrightarrow{xz} - \overrightarrow{xy}\|^2 = \|\overrightarrow{xz}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{xz}, \overrightarrow{xy} \rangle + \|\overrightarrow{xy}\|^2 \\ &= \ell_y^2 - 2\ell_y\ell_z \cos(\theta_x) + \ell_z^2. \end{aligned}$$

Question (1.c) La loi du sinus consiste en les égalités $\ell_x/\sin(\theta_x) = \ell_y/\sin(\theta_y) = \ell_z/\sin(\theta_z) = 2R$.

Question (2.a) Les racines de $X^2 - X - 1$ sont $(1 - \sqrt{5})/2$ et $(1 + \sqrt{5})/2$, seule la deuxième est > 1 et on a donc $\ell = (1 + \sqrt{5})/2$.

Question (3.a) Comme $d(x, y) = \ell = d(x, z)$, le triangle T est isocèle en x et ses angles en y et z sont donc égaux, i.e. $\beta = \gamma$.

Question (3.b) On a :

$$\begin{aligned} 1 &= \|\overrightarrow{yz}\|^2 = \|\overrightarrow{yx} + \overrightarrow{xz}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{xy}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz} \rangle + \|\overrightarrow{xz}\|^2 = 2\ell^2 - 2\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz} \rangle \end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz} \rangle = \frac{2\ell^2 - 1}{2}.$$

Question (3.c) On a $\overrightarrow{yp} = \overrightarrow{yx} + \overrightarrow{xp} = -\overrightarrow{xy} + \ell^{-1}\overrightarrow{xz}$ d'où il suit que

$$\begin{aligned} d(y, p)^2 &= \|\overrightarrow{yp}\|^2 = \|\overrightarrow{yx} + \overrightarrow{xp}\|^2 = \|\overrightarrow{yx} + \ell^{-1}\overrightarrow{xz}\|^2 = \|\overrightarrow{xy}\|^2 - 2\ell^{-1}\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz} \rangle + \ell^{-2}\|\overrightarrow{xz}\|^2 \\ &= \ell^2 - 2\ell^{-1}\frac{2\ell^2 - 1}{2} + 1 = \ell^2 - 2\ell + 1 + \ell^{-1} \\ &= \ell^2 - \ell - 1 - \ell + 1 + \ell^{-1} + 1 \\ &= (\ell^2 - \ell - 1) - \ell^{-1}(\ell^2 - \ell - 1) + 1 = 1. \end{aligned}$$

On a aussi :

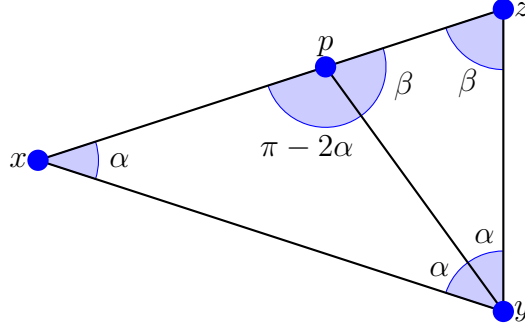
$$d(z, p) = (1 - \ell^{-1})d(x, z) = (\ell^{-2}(\ell^2 - \ell - 1) + \ell^{-2})\ell = \ell^{-1}.$$

Question (3.d) D'après la question précédente on a :

$$d(z, p) = \ell^{-1}d(y, z), \quad d(y, z) = \ell^{-1}d(x, y), \quad d(y, p) = \ell^{-1}d(x, z)$$

ce qui implique (par un résultat du cours) qu'il existe une similitude f telle que $f(x) = y$, $f(y) = z$ et $f(z) = p$. En particulier les triangles T et $f(T) = \{y, z, p\}$ sont similaires et le deuxième est isocèle en $f(x) = y$.

Question (3.e) D'après la figure suivante :



comme la somme des angles de T vaut π on a $2\beta + \alpha = \pi$. Par ailleurs, le triangle $\{y, z, p\}$ est semblable à T et son angle en p vaut donc β : il suit que l'angle en p du triangle $\{p, x, y\}$ vaut $\pi - \beta$. Comme ce dernier triangle est isocèle en p (vu que $d(p, x) = 1 = d(p, y)$) ses angles en y et x ont même mesure, qui est égale à α (l'angle en x est le même que celui de T). On obtient donc que $2\alpha + (\pi - \beta) = \pi$, soit encore $\beta = 2\alpha$. Avec la première équation il vient alors $5\alpha = \pi$.

Question (3.f) La loi du cosinus donne :

$$\begin{aligned} \cos(\pi/5) = \cos(\alpha) &= \frac{2\ell^2 - 1}{2\ell^2} = 1 - \frac{1}{2}\ell^{-2} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(1 - \ell^{-1}) = 1 - \frac{1}{2}(2 - \ell) = \ell/2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \end{aligned}$$

Par la formule de doublement d'angle (ou en utilisant la loi du cosinus dans une configuration différente) on a aussi

$$\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Problème II

Question (1.a) Comme R est la matrice de ρ dans une base orthonormée, il suffit de vérifier que les colonnes forment une famille orthonormée (un calcul facile laissé à la lectrice).

Question (1.b) Un pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice $R - \text{Id}$ (calcul laissé au lecteur) montre que le vecteur colonne

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

engendre le noyau de $R - \text{Id}$. Le vecteur $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ forme donc une base du noyau de $\rho - \text{Id}$, autrement dit ce dernier est la droite vectorielle $\mathbb{R}(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$.

Question (1.c) On peut calculer directement (laissé à la lectrice) que $\det(\rho) = \det(R) = 1$. Il suit de ceci que ρ est une isométrie (vectorielle) directe et non-triviale, ce qui d'après la classification des isométries en dimension 3 implique que ρ est une rotation.

Une autre méthode est la suivante : le noyau de $\rho - \text{Id}$ est une droite d'après la question précédente. Si P est son plan orthogonale la restriction $\rho|_P$ est une isométrie sans vecteur (non-nul) fixe, donc une rotation, et il suit que ρ elle-même doit être une rotation.

Question (2.a) On note $\vec{u} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$; on a

$$f(x + \vec{u}) = f(x) + \rho(\vec{u}) = x + 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \rho(\vec{u}).$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{xf(x + \vec{u})}$ dans la base B sont donc :

$$\left(\frac{1}{9}(y_1 - 4y_2 + 8y_3) + 2, \frac{1}{9}(8y_1 + 4y_2 + y_3) - 1, \frac{1}{9}(-4y_1 + 7y_2 + 4y_3) \right).$$

Question (2.b) Le vecteur $\overrightarrow{xf(x)} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ est orthogonal à la droite $\ker(\rho - \text{Id})$, donc f a un point fixe par un résultat du cours et il suit que f est une rotation.

Calculons le sous-ensemble de ses points fixes : d'après ce sont les points dont les coordonnées (y_1, y_2, y_3) dans le repère (x, B) vérifient les équations

$$\begin{cases} \frac{1}{9}(y_1 - 4y_2 + 8y_3) + 2 = y_1 \\ \frac{1}{9}(8y_1 + 4y_2 + y_3) - 1 = y_2 \\ \frac{1}{9}(-4y_1 + 7y_2 + 4y_3) = y_3 \end{cases}$$

qui après un pivot de Gauss sur les lignes (détails laissés au lecteur) devient

$$\begin{cases} -8y_1 & -4y_2 + 8y_3 & = -18 \\ & -9y_2 + 9y_3 & = -9 \\ & 18y_2 - 18y_3 & = 18 \end{cases}.$$

Les deux dernières lignes sont proportionnelles, et en fixant $y_3 = 0$ on obtient successivement $y_2 = 1$ puis $y_1 = 7/4$. La droite fixe de f est donc

$$x + 7\vec{e}_1/4 + \vec{e}_2 + \mathbb{R}(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3).$$

Question (2.c) On a $\vec{v} \in \ker(\rho - \text{Id})$, et pour tout y sur l'axe de f on a

$$g(y) = t \circ f(y) = f(y) + \vec{v} = y + \vec{v}.$$

Il suit que g est un vissage de même axe que f et de vecteur \vec{v} .

Question (2.d) Comme $\rho(\vec{v}) = \vec{v}$ on a, pour tout $y \in \mathcal{E}$:

$$f \circ t(y) = f(y + \vec{v}) = f(y) + \rho(\vec{v}) = f(y) + \vec{v} = t \circ f(y),$$

autrement dit f et t commutent.

Question (3) La partie linéaire $-\text{Id} \circ \rho$ est une anti-rotation ; il suit que $h \circ g$ a un point fixe (et est elle-même une anti-rotation affine).

Le point fixe x' de h est donné par $x' = x + 7\vec{e}_1/4 + \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$ et est donc sur l'axe de f . Pour y sur cet axe, on a $y = x' + t\vec{v}$ pour un $t \in \mathbb{R}$ et il suit que

$$h \circ g(y) = h(x' + (t+1)\vec{v}) = x' - (t+1)\vec{v}$$

d'où il suit que $g(y) = y$ si et seulement si $t = -(t+1)$, autrement dit $t = -1/2$. Le point fixe de $h \circ g$ est donc le point

$$x' - \vec{v}/2 = x - \vec{e}_1/4 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3,$$

soit le point de coordonnées $(-1/4, -2, -3)$ dans le repère (x, B) .

Problème III

Question (1.a) On a :

$$\begin{vmatrix} 3t+4 & -3\sqrt{3}t \\ -3\sqrt{3}t & 5t+8 \end{vmatrix} = 15t^3 + 44t + 32 - 27t^2 = -12t^2 + 44t + 32.$$

Question (1.b) Pour $t = -1, 0, 1$ le déterminant ci-dessus vaut respectivement $-24, 32$ et 64 , C_{-1} est donc une hyperbole, C_0 et C_1 des ellipses. Pour $t = 10^6$ on a $44t + 32 < 100t = 10^8 < 10^{12} = t^2$ donc le déterminant est négatif et C_{10^6} est une hyperbole.

Question (1.c) L'équation de C_t ne contient pas de terme linéaire, donc (quand il existe) son centre est l'origine du repère dans lequel elle est donnée, c'est-à-dire $(0, 0)$.

Question (2.a) On pose $x_1 = \cos(\theta)y_1 + \sin(\theta)y_2$ et $y_2 = -\sin(\theta)y_1 + \cos(\theta)y_2$. On note $q = 7x_1^2 - 6\sqrt{3}x_1x_2 + 13x_2^2$, il vient :

$$\begin{aligned} q &= 7(\cos(\theta)y_1 + \sin(\theta)y_2)^2 - 6\sqrt{3}(\cos(\theta)y_1 + \sin(\theta)y_2)(-\sin(\theta)y_1 + \cos(\theta)y_2) \\ &\quad + 13(-\sin(\theta)y_1 + \cos(\theta)y_2)^2 \\ &= \left(7\cos(\theta)^2 + 6\sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\theta) + 13\sin(\theta)^2\right)y_1^2 + \left(7\sin(\theta)^2 - 6\sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\theta) + 13\cos(\theta)^2\right)y_2^2 \\ &\quad + \left(14\cos(\theta)\sin(\theta) + 6\sqrt{3}\cos(\theta)^2 - 6\sqrt{3}\sin(\theta)^2 - 26\cos(\theta)\sin(\theta)\right)y_1y_2 \\ &= \left(7 + 3\sqrt{3}\sin(2\theta) + 3(1 - \cos(2\theta))\right)y_1^2 + \left(7 - 3\sqrt{3}\sin(2\theta) + 3(1 + \cos(2\theta))\right)y_2^2 \\ &\quad + \left(6\sqrt{3}\cos(2\theta) + 6\sin(2\theta)\right)y_1y_2. \end{aligned}$$

On a enfin :

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3}\cos(2\theta) + 6\sin(2\theta) &= 12(\sin(\pi/3)\cos(2\theta) + \cos(\pi/3)\sin(2\theta)) \\ &= 12\sin(\theta + \pi/3) \end{aligned}$$

et l'équation est donc de la forme voulue si et seulement si $2\theta + \pi/3$ est nul modulo π , en choisissant θ dans $[0, \pi/2[$ on obtient $\theta = \pi/3$. On a donc $\cos(2\theta) = -1/2$ et $\sin(2\theta) = \sqrt{3}/2$, et l'équation obtenue pour C est alors (calculs laissés au lecteur) :

$$16y_1^2 + 4y_2^2 - 1 = 0.$$

Question (2.b) Le repère \mathcal{R} associé aux coordonnées (y_1, y_2) a pour origine $(0, 0)$ et les vecteurs de sa base sont $\vec{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ et $\vec{v} = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$.

Question (3.a) L'équation de C dans le repère orthonormé \mathcal{R} est de la forme $a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ avec $a_1 > a_2 > 0$; l'excentricité e de C est donc donnée par la relation $e^2 = 1 - \frac{a_2}{a_1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, ce qui donne au final :

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Question (3.b) Soient f le point de coordonnées $y_1 = 0, y_2 = a > 0$ et \mathcal{D} la droite d'équation $y_2 = b > 0$. La conique de foyer f , directrice \mathcal{D} et excentricité $e = \sqrt{3}/2$ a pour équation (après calculs) :

$$y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 - \left(2a + \frac{3}{2}b\right)y_2 - \left(\frac{3}{4}b^2 - a^2\right) = 0$$

d'où il suit facilement que si cette conique est égale à C alors on a

$$a = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Problème IV

Question (1) Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{reg}}$ un pentagone régulier et x_1, \dots, x_5 ses sommets. On notera x_0 le centre de \mathcal{C} (l'isobarycentre de ses sommets) et y_i le milieu du segment $[x_i x_{i+1}]$. Le groupe d'isométries de \mathcal{C} contient les éléments non-triviaux suivants :

- Les rotations de centre x_0 et d'angles $2k\pi/5$ pour $k = 1, 2, 3, 4$;
- Les réflexions d'axes $x_i y_{i+2}$ pour $i = 1, \dots, 5$.

Question (2.a) Si $r^2 = \text{Id}$ alors $\sigma^2 = \text{Id}$ et la décomposition en cycles de σ ne contient donc que des transpositions. Il suit que le nombre d'éléments de $\{1, \dots, 5\}$ qui ne sont pas fixés par σ est pair : en particulier il n'est pas égal à 5 et il suit qu'il existe $i \in \{1, \dots, 5\}$ tel que $\sigma(i) = i$. On a alors $r(x_i) = x_i$, d'où il suit que r a un point fixe différent de son centre (qui ne peut pas être l'un des x_i), donc $r = \text{Id}$.

Question (2.b) On suppose qu'il existe $(i j)$ une transposition dans la décomposition en cycles de σ . On a alors $\sigma^2(i) = i$, d'où il suit que $r^2(x_i) = x_i$ et que $r^2 = \text{Id}$. D'après la question précédente on a donc $r = \text{Id}$.

De même, si $(i j k l)$ est un 4-cycle dans la décomposition en cycles de σ alors $(i k)$ est une transposition dans σ^2 et il suit par ce qui précède que $r^2 = \text{Id}$, puis par la question précédente que r elle-même est triviale (on peut aussi remarquer directement que σ elle-même a un point fixe (celui qui n'est pas dans le support du 4-cycle) ce qui implique $r = \text{Id}$).

Question (2.c) Si σ contient un 3-cycle alors soit elle a deux points fixes soit elle contient aussi une transposition. Dans le premier cas $r = \text{Id}$ parce qu'elle a deux points fixes, dans le second $r = \text{Id}$ par la question précédente.

Question (2.d) D'après les deux questions précédentes, si σ est non-triviale elle ne contient pas de cycle d'ordre 2, 3 ou 4. Il suit que σ est un 5-cycle, et que r est une rotation d'ordre 5.

En particulier pour tous i, j il existe un $k \in \{0, \dots, 4\}$ tel que $r^k(x_i) = x_j$. Par un résultat du cours (que l'on peut redémontrer sans peine) il suit que \mathcal{C} est régulier.

Question (3) Il y a trois possibilités : \mathcal{C} n'a aucune symétrie, $G_{\mathcal{C}}$ est de cardinal 2 et contient une réflexion non-triviale, ou \mathcal{C} est régulier et $G_{\mathcal{C}}$ est le groupe diédral D_{10} .