

## EXAMEN FINAL, GÉOMÉTRIE II, VENDREDI 19 MAI 2017

La qualité de la rédaction sera prise en compte. Il est possible d'admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes, et les questions étoilées sont hors barème.

**Problème 1 (4 points)**

On travaille dans le plan affine  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ , muni de sa structure euclidienne et de son orientation canoniques.

*Question (1)* Soit  $r$  l'application  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  définie par :

$$r \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_1 - \sqrt{3}x_2 + 4 \\ \sqrt{3}x_1 - x_2 + 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $r$  est une rotation de  $\mathcal{E}$ , puis donner son centre et son angle.

*Question (2)* On note  $x$  le centre de  $r$ , calculé à la question précédente. Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et soit  $r''$  la rotation de centre  $x'' = x + \vec{v}$  et d'angle  $\pi$ . Soit encore  $r'$  la rotation telle que  $r \circ r' = r''$ .

Soit  $x'$  le centre de  $r'$ . Quels sont les angles du triangle  $\{x, x', x''\}$ ? En déduire l'angle de  $r'$ .

*Question (3)* Donner les coordonnées de  $x'$ .

**Problème 2 (6 points)**

Soit  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ , muni de sa structure affine euclidienne canonique. Soient :

$$R = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \\ -7 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

et soit  $\rho$  l'application linéaire  $E \rightarrow E$  dont  $R$  est la matrice dans la base canonique.

*Question (1)* Montrer que  $\rho$  est une rotation vectorielle et donner son axe et son angle au signe près.

*Question (2)* Soit  $o = (0, 0, 0)$  et  $r$  l'application affine  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  de partie linéaire  $\rho$  et telle que  $r(o) = (2, 2, 1)$ . Montrer que  $r$  est une rotation et donner son axe.

*Question (3.a)* Soit  $f$  l'application affine de partie linéaire  $\rho^2$  et telle que  $f(o) = (0, 3, 3)$ . Justifier que  $\phi$  est un vissage, puis donner son angle, son vecteur et son axe.

*Question (3.b)* Soit  $\mathcal{P}$  un plan contenant l'axe de  $f$ . Montrer que  $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ . Quelle est la nature de  $f|_{\mathcal{P}}$  ?

### Problème 3 (5 points)

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 3. Soit  $\mathcal{T}$  un tétraèdre régulier inscrit dans une sphère  $S$  de rayon 1 et soient  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ses sommets et  $x_0$  le centre de la sphère  $S$  (c'est-à-dire que  $d(x_0, x_i) = 1$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ ).

*Question (1)\** Justifier que le centre de  $S$  est égal à l'isobarycentre des points  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

*Question (2.a)* Soit  $x'_1$  l'intersection de la droite  $(x_1x_0)$  avec le plan  $\mathcal{P}$  passant par  $x_2, x_3, x_4$ . Montrer que  $x'_1$  est l'isobarycentre de  $x_2, x_3, x_4$ .

*Question (2.b)* Montrer que  $d(x_0, x'_1) = 1/3$ .

*Question (2.c)* En utilisant les isométries de  $\mathcal{T}$  montrer que  $(x_1x'_1)$  est orthogonal à  $\mathcal{P}$ .

*Question (3)* En utilisant les questions précédentes calculer  $d(x'_1, x_i)$  pour  $i = 2, 3, 4$  puis en déduire la longueur d'une arête de  $\mathcal{T}$ .

### Problème 4 (5 points)

Soit  $\mathcal{E}$  un plan euclidien orienté et  $\mathcal{C}$  un pentagone de sommets  $x_i \in \mathcal{E}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . On suppose que  $x_i$  est adjacent à  $x_{i+1}$  et  $x_5$  à  $x_1$ , et que  $d(x_i, x_{i+1}) = 1 = d(x_5, x_1)$ . Enfin, on suppose que les angles de  $\mathcal{C}$  valent  $\alpha$  et  $x_1, x_2$ ,  $\beta$  en  $x_3, x_5$  et  $\gamma$  en  $x_4$ .

*Question (1)\** Justifier que  $\mathcal{C}$  est symétrique par rapport à la médiatrice de  $[x_1x_2]$ .

*Question (2.a)* Soit  $\beta'$  l'angle en  $x_3$  du triangle  $\{x_3, x_4, x_5\}$  et  $\beta'' = \beta - \beta'$ . Montrer que  $2\beta'' + 2\alpha = 2\pi$ .

*Question (2.b)* Soit  $m = d(x_3, x_1)$ . Exprimer  $\cos(\alpha)$ ,  $\cos(\beta'')$  en fonction de  $m$ .

*Question (2.c)* Dédurre des deux questions précédentes que l'on a

$$\cos(\alpha) = \frac{1 - \ell}{2} \text{ et } \cos(\beta'') = \frac{\ell - 1}{2}.$$

*Question (3.a)* Donner en fonction de  $\ell$  l'aire du triangle de sommets  $x_3, x_4, x_5$ .

*Question (3.b)* Soit  $x_6$  le point d'intersection des droites  $(x_2x_3)$  et  $(x_5x_1)$ . Donner en fonction de  $\ell$  l'aire du triangle de sommets  $x_5, x_3, x_6$  puis  $x_1, x_2, x_6$ .

*Question (3.c)* Dédurre des deux questions ci-dessus que l'aire de  $\mathcal{C}$  est donnée par :

$$\text{Aire}(\mathcal{C}) = \frac{1}{4} \left( \ell \sqrt{4 - \ell^2} + (\ell + 1) \sqrt{4 - (\ell - 1)^2} \right).$$