

EXAMEN PARTIEL, GÉOMÉTRIE II, VENDREDI 13 MARS 2015
CORRIGÉ

Problème 1

Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique de plan affine euclidien, de sorte que la base

$$((1, 0), (0, 1))$$

de son espace directeur $E = \mathbb{R}^2$ soit orthonormée. On munit \mathcal{E} de l'orientation pour laquelle cette base est une base directe de E .

Question (1.a) Soit r l'application $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par :

$$r(x, y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5}, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5}\right).$$

Montrer que r est une rotation de \mathcal{E} et donner son angle.

Solution

Si $x, y \in \mathcal{E}$ et le vecteur \overrightarrow{xy} est égal à (t_1, t_2) on voit immédiatement que le vecteur $\overrightarrow{r(x)r(y)} = (s_1, s_2)$ est donné par

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix};$$

il suit immédiatement que r est une application affine, et que la matrice de sa partie linéaire ρ a pour matrice dans la base $B = ((1, 0), (0, 1))$

$$\text{Mat}_B(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Comme B est une base orthonormée l'application affine r est une isométrie si et seulement si les colonnes de $\text{Mat}_B(\rho)$ forment une famille orthonormée; ceci se vérifie immédiatement, par exemple :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1.$$

Enfin, comme B est une base directe, si θ est l'angle de ρ la matrice de ρ dans B est donnée par

$$\text{Mat}_B(\rho) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit que $\sin(\theta) = 4/5 > 0$ donc θ a un représentant modulo 2π dans $]0, \pi[$, et d'autre part $\cos(\theta) = 3/5$ donc au final $\theta = \arccos(3/5) \cong 0.9272952$.

Question (1.b) Calculer le centre de r .

Solution

Comme r est une rotation on sait que l'équation $r(x) = x$ a une unique solution $x = (x_1, x_2)$ dans \mathcal{E} . On calcule x_1 et x_2 comme solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{6}{5} = x_1 \\ \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 - \frac{2}{5} = x_2 \end{cases}$$

Un calcul facile donne $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Le centre de r est donc le point $(1, 1)$.

Question (1.c) Soient s_1 et s_2 les applications $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définies par :

$$\begin{aligned} s_1(x, y) &= (-x + 2, y) \\ s_2(x, y) &= \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right). \end{aligned}$$

Montrer que s_1 et s_2 sont des isométries indirectes de \mathcal{E} .

Solution

Les applications s_1 et s_2 sont toutes deux affines, et les matrices de leurs parties linéaires σ_1 et σ_2 dans la base $B = ((1, 0), (0, 1))$ sont données par :

$$\text{Mat}_B(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_B(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que pour chacune de ces deux matrices les colonnes sont une famille orthonormée, donc s_1 et s_2 sont des isométries. On voit aussi immédiatement que le déterminant de chacune vaut -1 , donc s_1 et s_2 sont indirectes.

Question (1.d) Calculer les ensembles de points fixes de s_1 et s_2 . En déduire que s_1 et s_2 sont des réflexions de \mathcal{E} , et donner pour chacune un point et un vecteur directeur de sa droite fixe.

Solution

Un point $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{E}$ est un point fixe de s_1 si et seulement si

$$\begin{cases} -x_1 & + & 2 & = & x_1 \\ & x_2 & & = & x_2 \end{cases}$$

Les solutions de cette équation sont les points de l'ensemble

$$\{(1, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

qui est la droite affine \mathcal{D}_1 de vecteur directeur $\vec{v}_1 = (0, 1)$ passant par le point $(1, 0)$.

De même, x est un point fixe de s_2 si et seulement s'il vérifie

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x_1 & + & \frac{4}{5}x_2 & = & x_1 \\ \frac{4}{5}x_1 & - & \frac{3}{5}x_2 & = & x_2 \end{cases}$$

Une solution particulière de ce système est $x = (0, 0)$, et un pivot de Gauss montre que l'espace vectoriel des solutions au système homogène¹ est la droite $\mathbb{R}(2, 1)$. La droite fixe \mathcal{D}_2 de s_2 est donc la droite de vecteur directeur $(2, 1)$ passant par le point $(0, 0)$.

Question (1.e) Montrer que $s_2 \circ s_1$ est une rotation et donner son angle et son point fixe.

Solution

Comme s_1 et s_2 sont toutes deux des symétries indirectes, la composée $s_2 \circ s_1$ est une symétrie directe. Comme les axes de s_1 et s_2 ne sont pas parallèles la partie linéaire de $s_2 \circ s_1$ n'est pas l'identité; on en conclut que $s_2 \circ s_1$ est une rotation.

1. Qui, dans ce cas particulier, a la même écriture en coordonnées que le système avec second membre—mais ce n'est pas le même système puisque ses solutions sont des vecteurs et non des points.

Le point fixe de $r' = s_2 \circ s_1$ est le point à l'intersection des droites fixes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de s_1 et s_2 . Une équation pour \mathcal{D}_1 est par exemple

$$\mathcal{D}_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 = 1\}$$

et le point $(2t, t) \in \mathcal{D}_2$ est donc sur \mathcal{D}_1 si et seulement si $t = 1/2$; on voit donc finalement que le point fixe de r' est $(1, 1/2)$.

Enfin, il y a deux manières pour calculer l'angle de $r' = s_2 \circ s_1$. Pour la première on observe que la matrice dans B de la partie linéaire ρ' de r' est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B(\rho') &= \text{Mat}_B(\sigma_2) \cdot \text{Mat}_B(\sigma_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où il suit comme dans la question 1a) que l'angle θ' de ρ' vérifie $\theta' \in]-\pi, 0[\pmod{2\pi}$ et $\cos(\theta') = -\frac{3}{5}$. On en déduit finalement que $\theta' = -\arccos(-3/5) \cong -2.2142974$.

La seconde solution est géométrique : soit ω l'angle orienté entre les vecteurs directeurs $\vec{v}_1 = (0, 1)$ et $\vec{v}_2 = (2, 1)$ de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , et soit $\vec{v}'_1 = (-1, 0)$ (l'image de \vec{v}_1 par la rotation d'angle $\pi/2$); alors ω vérifie

$$\begin{aligned} \cos(\omega) &= \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \sin(\omega) &= \cos(\pi/2 - \omega) = \frac{\langle \vec{v}'_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|} = \frac{-2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

D'autre part, par un résultat du cours $s_2 \circ s_1$ est une rotation d'angle $\theta' = 2\omega$. Il vient finalement :

$$\cos(\theta') = \cos(\omega)^2 - \sin(\omega)^2 = -\frac{3}{5}, \quad \sin(\theta') = 2 \cos(\omega) \sin(\omega) = -\frac{4}{5}$$

ce qui finalement $\theta' = -\arccos(-3/5)$ comme précédemment trouvé.

Question (1.f) Montrer que le point fixe de r est fixé par s_1 . En déduire que $r \circ s_1$ est une symétrie et calculer sa droite fixe (pour ce faire exprimer r comme produit de symétries).

Solution

Le point fixe x de r est $x = (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \in \mathcal{D}_1$ est sur la droite fixe de s_1 , donc $s_1(x) = x$ et aussi $r \circ s_1(x) = r(x) = x$. D'autre part la partie linéaire de $r \circ s_1$ est une isométrie indirecte, et il suit finalement que $s' = r \circ s_1$ est une symétrie.

Soit \mathcal{D}'_2 la droite passant par x et dirigée par l'unique vecteur unitaire \vec{v}'_2 tels que l'angle orienté de \vec{v}_1 à \vec{v}'_2 soit égal (modulo π) à $\omega = \frac{1}{2}\theta$ où θ est l'angle de r et s'_2 la symétrie d'axe \mathcal{D}'_2 . On a alors, par un résultat du cours, que $s'_2 \circ s_1 = r$. Il suit que $s' = r \circ s_1 = s'_2 \circ s_1^2 = s'_2$, donc l'axe de s' est \mathcal{D}'_2 .

On va calculer $\cos(\omega)$ et $\sin(\omega)$ pour exprimer les coordonnées du vecteur directeur $\pm \vec{v}'_2$ dans la base B . On a

$$2 \cos(\omega)^2 - 1 = \cos(2\omega) = \cos(\theta) = 3/5$$

d'où il suit que $\cos(\omega) = \pm 1/\sqrt{5}$. D'autre part

$$\sin(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\cos(\omega)} = \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{\mp 2}{\sqrt{5}}$$

et on a donc finalement que \mathcal{D}'_2 est dirigée par le vecteur $(1, -2)$.

Problème 2

Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace affine. Soient a et b deux nombres réels ; on définit une application f de \mathcal{E} dans lui même par :

$$f(x, y) = (3x + y + a, -2x + b).$$

Question (2.a) Montrer que f est une application affine.

Solution

Si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathcal{E}$ on a

$$\overrightarrow{f(y)f(x)} = (3(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2), -2(y_1 - x_1)) =: \varphi(\overrightarrow{xy})$$

où φ est une application linéaire, donc f est affine.

Question (2.b) Soit B la base $((1, 0), (0, 1))$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 et φ la partie linéaire de f . Donner la matrice de φ dans la base B et calculer son polynôme caractéristique.

Solution

D'après la question précédente on a

$$\text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique χ_φ de φ est alors donné par

$$\chi_\varphi(X) = \det(\varphi - X \text{Id}) = \begin{vmatrix} 3 - X & 1 \\ -2 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 3X + 2.$$

Question (2.c) Donner une base C de E telle que l'on ait :

$$\text{Mat}_C(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et calculer alors l'image de l'application linéaire $\varphi - \text{Id}$.

Solution

Les racines de χ_φ sont 1 et 2, donc une telle base existe. Le noyau de $\varphi - \text{Id}$ est donné par celui de la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \text{Id} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. De même, le noyau de $\varphi - 2\text{Id}$ est donné par celui de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

qui est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si C est la base $((1, -1), (1, -2))$ on a donc

$$\text{Mat}_C(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit enfin que l'image de $\varphi - \text{Id}$ est la droite engendrée par le premier vecteur de C , c'est-à-dire la droite $\mathbb{R}(1, -1)$.

Question (2.d) Soient D_1, D_2 les droites vectorielles engendrées respectivement par $(1, -1)$ et $(1, -2)$ et π la projection (vectorielle) sur D_2 parallèlement à D_1 . Soient encore x_0 un point de \mathcal{E} , f' une application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ dont la partie linéaire est φ et $\vec{v} = \overrightarrow{x_0 f'(x_0)}$. Dédurre de la question précédente que f' a un point fixe dans \mathcal{E} si et seulement si $\pi(\vec{v}) = 0$.

Solution

Soit $x \in \mathcal{E}$; on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(x_0) + \varphi(\overrightarrow{x_0 x}) = x_0 + \vec{v} + \varphi(\overrightarrow{x_0 x}) \\ &= x + \vec{v} + (\varphi(\overrightarrow{x_0 x}) - \overrightarrow{x_0 x}). \end{aligned}$$

Il suit que si $\vec{v} \notin \text{im}(\varphi - \text{Id})$ alors on a

$$\overrightarrow{x f'(x)} = \vec{v} - (\varphi - \text{Id})(-\overrightarrow{x_0 x}) \neq 0$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$, donc f' n'a pas de point fixe. Si au contraire $\vec{v} \in \text{im}(\varphi - \text{Id})$ il existe un $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = \varphi(\vec{u}) - \vec{u}$ et en posant $x = x_0 - \vec{u}$ on obtient d'après le calcul ci-dessus que $f'(x) = x$, donc f' a un point fixe. D'après la question précédente on a $\text{im}(\varphi - \text{Id}) = \mathbb{R}(1, -1) = \ker(\pi)$, et on obtient finalement que f' a un point fixe si et seulement si $\pi(\vec{v}) = 0$.

Question (2.e) Calculer la matrice de π dans la base B . Dédurre alors de la question précédente une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que f ait un point fixe dans \mathcal{E} .

Solution

La matrice de π dans la base C est

$$\text{Mat}_C(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage des coordonnées dans C à celles dans B est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B(\pi) &= P^{-1} \text{Mat}_C(\pi) P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc $\pi(a, b) = (2a + b, -2a - b)$ et il suit par la question (2d) que f a un point fixe si et seulement si $2a + b = 0$.

Problème 3

Soient \mathcal{E} un espace affine, E son espace directeur et γ une application linéaire inversible de E dans lui-même. Soient encore $x_0 \in \mathcal{E}$ et g l'application affine de \mathcal{E} dans lui-même définie par $g(x) = x_0 + \gamma(\overrightarrow{x_0x})$.

Question (3.a) Montrer que g est inversible (c'est-à-dire bijective). Montrer que son inverse est donné par $g^{-1}(x) = x_0 + \gamma^{-1}(\overrightarrow{x_0x})$.

Solution

Supposons que $x, y \in \mathcal{E}$ vérifient $g(x) = g(y)$. Il vient $\gamma(\overrightarrow{xy}) = 0$, et comme γ est inversible, donc injective, ceci force $\overrightarrow{xy} = 0$, i.e. $x = y$. Ainsi g est injective. Soient $y \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathcal{E}$; on pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g(x)y}$. Soit enfin $x' = x + \gamma^{-1}(\overrightarrow{v})$. On a :

$$g(x') = g(x) + \gamma(\overrightarrow{xx'}) = g(x) + \gamma(\gamma^{-1}(\overrightarrow{v})) = g(x) + \overrightarrow{v} = y$$

donc $y \in g(\mathcal{E})$. Ainsi g est surjective.

D'autre part on a

$$g(x_0 + \gamma^{-1}(\overrightarrow{x_0x})) = x_0 + \gamma(\gamma^{-1}(\overrightarrow{x_0x})) = x$$

donc l'inverse de g est bien donné par l'expression indiquée (on remarque que celle-ci apparaît déjà dans la preuve ci-dessus de la surjectivité).

Question (3.b) Soient $\overrightarrow{v} \in E$ et t la translation de vecteur \overrightarrow{v} . Quelle est la partie linéaire de l'application affine $f = g \circ t \circ g^{-1}$?

Solution

La partie linéaire de t est Id , et la partie linéaire de $g \circ t \circ g^{-1}$ est donc

$$\gamma \circ \text{Id} \circ \gamma^{-1} = \text{Id}.$$

Question (3.c) Calculer le vecteur $\overrightarrow{x_0 f(x_0)}$ et en déduire avec la question précédente que f est la translation de vecteur $\gamma(\overrightarrow{v})$.

Solution

Vu que $g^{-1}(x_0) = x_0$ on obtient

$$f(x_0) = g(t(x_0)) = g(x_0 + \overrightarrow{v}) = x_0 + \gamma(\overrightarrow{v})$$

donc $\overrightarrow{x_0 f(x_0)} = \gamma(\overrightarrow{v})$ et comme f est une translation (sa partie linéaire est l'identité) elle est égale à la translation de vecteur $\gamma(\overrightarrow{v})$.