

**FEUILLE D'EXERCICES n° 6 :
GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE**

1. ISOMÉTRIES

Exercice 1

Soient a, b et c trois nombres réels et soit f l'application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} donnée, dans un certain repère orthonormé \mathcal{R} de \mathcal{E} , par la formule :

$$f(x, y, z) = (x/3 + 2y/3y - 2z/3 + a, 2x/3 + y/3 + 2z/3 + b, 2x/3 - 2y/3 - z/3 + c).$$

(1.a) Montrez que f est une isométrie directe.

(1.b) Déterminer l'axe et le vecteur de f . Pour quelles valeurs de (a, b, c) l'application f est-elle une rotation ?

(1.c) Déterminer l'angle de f au signe près. Déterminer le signe de ce dernier pour chaque orientation de l'axe de f .

Exercice 2

Soit σ l'application linéaire $E \rightarrow E$ dont la matrice dans une base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$\text{Mat}_B(\sigma) = \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & -3/7 \\ -2/7 & 3/7 & -6/7 \\ -3/7 & -6/7 & -2/7 \end{pmatrix}.$$

(2.a) Montrer que σ est une réflexion vectorielle, calculer son plan fixe $\ker(\sigma - \text{Id})$.

(2.b) Soit $x_0 \in \mathcal{E}$ et soit s l'application affine de \mathcal{E} dans lui-même de partie linéaire σ et telle que $s(x) = x + e_1 + 2e_2$. Montrer que s est une symétrie glissée, calculer son vecteur et son plan stable.

Exercice 3

(3.a) Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E . Pour $\theta \in]0, \pi[$ on note B_θ la base

$$(\cos(\theta)e_1 - \sin(\theta)e_2, \sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2, e_3).$$

Montrer que c'est aussi une base orthonormée directe de E .

(3.b) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et soient ρ, ρ_θ les applications linéaires $E \rightarrow E$ déterminées par $\text{Mat}_B(\rho) = A$ et $\text{Mat}_{B_\theta}(\rho_\theta) = A$.

Montrer que $\rho_\theta \circ \rho$ est une rotation et calculer son angle (au signe près) en fonction de θ .

Exercice 4

Soient r, r' deux rotations d'axes \mathcal{D} et \mathcal{D}' tels que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{x_0\}$. Montrer que $r \circ r'$ est une rotation dont l'axe \mathcal{D}'' passe par x_0 , et donner une construction géométrique de \mathcal{D}'' .

2. POLYÈDRES

Exercice 5

- (5.a) Soit \mathcal{P} un plan de \mathcal{E} , \mathcal{T} un triangle équilatéral dans \mathcal{P} et \mathcal{D} la droite orthogonale à \mathcal{P} passant par le centre de gravité de \mathcal{T} . Construire un tétraèdre régulier dont l'une des faces est \mathcal{T} et dont le sommet hors de cette face est sur \mathcal{D} .
- (5.b) Construire un cube ; montrer que si \mathcal{C} est l'enveloppe convexe des centres des faces de ce cube alors \mathcal{C} est un octaèdre régulier.
- (5.c) Soit \mathcal{C} un dodécaèdre régulier ; montrer que si \mathcal{C}' est l'enveloppe convexe des centres des faces de \mathcal{C} alors \mathcal{C}' est un icosaèdre régulier.
- (5.d) Que sont les polyèdres engendrés par les centres des faces d'un tétraèdre, d'un octaèdre et d'un dodécaèdre ?

Exercice 6

- (6.a) En utilisant les groupes d'isométries, montrer que tout polyèdre régulier \mathcal{C} est inscrit dans une sphère (c'est-à-dire qu'il existe un point de \mathcal{E} dont tous les sommets de \mathcal{C} sont à égale distance).
- (6.b) Calculer la longueur d'une arête d'un cube inscrit dans une sphère de rayon 1. Même question pour un tétraèdre et un octaèdre.

Exercice 7

Calculer les angles dièdres des polyèdres réguliers : plus précisément, étant donné un polyèdre régulier \mathcal{C} et deux faces adjacentes F, F' de \mathcal{C} , montrer que la mesure de l'angle dièdre entre (les demi-plans déterminés par) F et F' vaut :

- $\pi/2$ si \mathcal{C} est un cube ;
- $\arccos(2/3)$ si \mathcal{C} est un tétraèdre ;
- $\arccos(-2/3)$ si \mathcal{C} est un octaèdre ;
- $\arccos(-\sqrt{5}/5)$ si \mathcal{C} est un dodécaèdre

(pour le dernier cas on pourra utiliser l'égalité $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$).

Exercice 8

Soit \mathcal{C} un tétraèdre régulier dont les arêtes sont de longueur 1.

- (8.a) On fixe un sommet x de \mathcal{C} . Calculer les produits scalaires $\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy'} \rangle$ pour $y, y' \neq x$ des sommets de \mathcal{C} .
- (8.b) En déduire (directement) que si x_1, x_2, x_3, x_4 sont les sommets de \mathcal{C} et σ est une permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ il existe une isométrie $g \in G_{\mathcal{C}}$ telle que $g(x_i) = x_{\sigma(i)}$.
- (8.c) Montrer (sans utiliser que $|G_{\mathcal{C}}| = 24$) que $G_{\mathcal{C}}$ est isomorphe à \mathfrak{S}_4 , et le sous-groupe des rotations à \mathfrak{A}_4 .

Exercice 9

Calculer le volume de l'octaèdre régulier inscrit dans une sphère de rayon 1 (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 6).