

**FEUILLE D'EXERCICES n° 4 :
ISOMÉTRIES PLANES ET ANGLES**

Dans tous les exercices et sauf mention du contraire \mathcal{E} désigne un plan affine euclidien et E sa direction.

1. CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES PLANES

Exercice 1

Soit s une symétrie glissée de vecteur \vec{v} et d'axe \mathcal{D} . Montrer que l'on a :

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{E} : s(x) = x + \vec{v}\}.$$

Exercice 2

(2.a) Soit B une base orthonormée de E et $\rho \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\text{Mat}_B(\rho) = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soit r une application affine de \mathcal{E} dans lui-même de partie linéaire ρ : montrer que r est une rotation.

(2.b) On suppose que E est orienté et B est directe ; donner l'angle de r .

(2.c) Soit $x_0 \in \mathcal{E}$. On suppose que les coordonnées dans B de $\overrightarrow{x_0 r(x_0)}$ sont $(1, 2)$. Donner les coordonnées dans le repère (x_0, B) du centre de r .

Exercice 3

Soit B une base orthonormée de E et $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\text{Mat}_B(\sigma) = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}.$$

Soit s une application affine de \mathcal{E} dans lui-même de partie linéaire σ : montrer que s est une isométrie indirecte. Soit $x \in \mathcal{E}$; on suppose que les coordonnées dans B de $\overrightarrow{xs(x)}$ sont $(-1, 4)$. Montrer que s est une symétrie et donner son axe.

Exercice 4

(4.a) Soit B une base orthonormée de E et $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\text{Mat}_B(\sigma) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Soit s une application affine de \mathcal{E} dans lui-même de partie linéaire σ : montrer que s est une isométrie indirecte.

(4.b) Donner un vecteur directeur de la direction de l'axe de s .

(4.c) Soient $x \in \mathcal{E}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que les coordonnées dans B de $\overrightarrow{xs(x)}$ sont $(1, a)$. Montrer que si $a \neq -1/3$ alors s est une symétrie glissée et donner son axe et son vecteur.

2. COMPOSITION DES ISOMÉTRIES PLANES

Exercice 5

(5.a) Soit r une rotation de centre x et d'angle θ , et soit f une isométrie de \mathcal{E} . Montrer que $f \circ r \circ f^{-1}$ est la rotation de centre $f(x)$ et d'angle θ si f est directe, $-\theta$ si f est indirecte (donner une preuve matricielle et une preuve géométrique pour ce dernier résultat).

(5.b) Dédire de la première question une preuve alternative de la proposition II.7.

Exercice 6

(6.a) Soient s, s' des symétries affines d'axes non-parallèles. Soit x le point d'intersection de leurs axes et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'angle orienté entre des vecteurs directeurs de ces axes. Montrer que $s \circ s'$ est une rotation de centre x et d'angle 2θ (qui ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs).

(6.b) Soient r, r' des rotations affines de centres distincts et d'angles θ, θ' tels que $\theta + \theta' \neq 0 \pmod{2\pi}$. Montrer que $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$, puis utiliser la question précédente pour déterminer son centre.

(6.c) Soient s, s' des symétries d'axes parallèles distincts ; montrer que $s \circ s'$ est une translation et calculer son vecteur. Soient r, r' des rotations affines de centres distincts et d'angles θ, θ' avec $\theta + \theta' = 0 \pmod{2\pi}$; montrer que $r \circ r'$ est une translation et calculer son vecteur.

(6.d) Soient $\vec{v} \in E$ et s une symétrie d'axe \mathcal{D} ; on note π la projection orthogonale sur D . Montrer que la composée $s \circ t_{\vec{v}}$ est la symétrie glissée d'axe $\mathcal{D} - \vec{v}/2$ et de vecteur $\pi(v)$. Utiliser ceci pour calculer les composées $r \circ s$ et $s \circ r$, où r est une rotation de centre x et d'angle θ .

(6.e) Calculer la composée de deux symétries glissées.

3. NOMBRES COMPLEXES ET ISOMÉTRIES

Exercice 7

(7.a) Soient \mathcal{E} un plan euclidien orienté, $x_0 \in \mathcal{E}$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\theta \neq 0$ et r la rotation de centre x_0 et d'angle θ . Soit encore $\vec{v} \in \mathcal{E}$; calculer le point fixe de l'application $r + \vec{v}$.

(7.b) Soient $v \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $r(z) = e^{i\theta}z + v$. Calculer $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait $r(z) = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$. Comparer avec le résultat de la question précédente.

Exercice 8

Refaire la question b de l'exercice 2.6 en utilisant l'expression en complexes des rotations.

Exercice 9

Soit $\theta = \pi/12$ et $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto e^{i\theta}z + 6$. Donner une expression en coordonnées pour r dans le repère orthonormé $z_0, (1, i)$ où z_0 est le point fixe de r (dont on donnera l'affixe).

4. ANGLES

Exercice 10

Soient $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in E$ deux à deux non colinéaires et $x \in \mathcal{E}$. Soient $\mathcal{D}_+, \mathcal{D}'_+$ les demi-droites $x + \mathbb{R}_+ \vec{v}, x + \mathbb{R}_+ \vec{u}$, y le point $x + \vec{v}$ et $\mathcal{F}_+, \mathcal{F}'_+$ les demi-droites $y + \mathbb{R}_+(-\vec{v}), y + \mathbb{R}_+ \vec{w}$. On note θ, α les mesures des angles déterminés respectivement par $\mathcal{D}_+, \mathcal{D}'_+$ et $\mathcal{F}_+, \mathcal{F}'_+$. Montrer que si $\theta + \alpha > \pi$ alors les demi-droites \mathcal{D}'_+ et \mathcal{F}'_+ ne s'intersectent pas.

Exercice 11

(11.a) Montrer que si \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont deux angles géométriques ayant même mesure alors il existe une isométrie directe r de \mathcal{E} telle que $r(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$.

(11.b) Montrer que si \mathcal{A} est un angle géométrique et f une isométrie directe telle que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ alors $f = \text{Id}$. En déduire que si $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sont des angles géométriques et f, f' des isométries directes telles que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}' = f'(\mathcal{A}')$ alors $f = f'$.

(11.c) Montrer en utilisant la question précédente que si $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sont des angles géométriques il existe une unique isométrie indirecte g de \mathcal{E} telle que $g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$.

Exercice 12

(12.a) Montrer que la bissectrice de \mathcal{A} est déterminée par la propriété suivante : c'est l'unique droite affine \mathcal{F} de \mathcal{E} telle que si s est la symétrie d'axe \mathcal{F} alors $s(\mathcal{D}_+) = \mathcal{D}'_+$.

(12.b) Montrer que c'est aussi l'unique droite \mathcal{F} passant par x telle que les angles déterminés par $\mathcal{D}_+, \mathcal{F}_+$ et $\mathcal{D}'_+, \mathcal{F}_+$ soient isométriques (pour n'importe quelle orientation de \mathcal{F}).