

FEUILLE D'EXERCICES n° 3 :
ESPACES EUCLIDIENS

1. ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

Exercice 1

(1.a) Soit $d = \dim \mathcal{E}$. Montrer que $\mathcal{B} = (x_0, \dots, x_d)$ est orthonormale si et seulement si :

- Pour tout $i \geq 1$ on a $d(x_0, x_i) = 1$;
- Pour tous $i, j \geq 1, i \neq j$ on a $d(x_i, x_j) = \sqrt{2}$.

(1.b) En déduire que si σ est une permutation sur l'ensemble $\{0, \dots, d\}$ alors la base affine $(x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(d)})$ est orthonormale si et seulement si $\sigma(0) = 0$.

Exercice 2

(2.a) Soit $n \geq 1$ et E l'espace vectoriel des matrices réelles $n \times n$, que l'on considère comme un espace affine de la façon habituelle. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle := \text{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur E .

(2.b) Ici $n = 2$. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et F le sous-espace de E engendré par A et B . Donner une base affine du sous-espace affine orthogonal à F passant par A (commencer par donner un système d'équations pour ce sous-espace).

Exercice 3

(3.a) Soit $E = \mathbb{R}_{\leq d}[X]$ l'espace des polynômes en X à coefficients réels de degré au plus d . Montrer que

$$(p, q) \mapsto \langle p, q \rangle := \int_0^1 f(t)p(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E . On note \mathcal{E} l'espace affine euclidien associé.

(3.b) On suppose $d = 1$. Calculer une base affine orthonormale de \mathcal{E} . Même question pour $d = 2$.

Exercice 4

Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites dans un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3.

(4.a) On suppose que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont pas parallèles. Montrer qu'il existe une unique droite \mathcal{D} qui soit orthogonale à chacune de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ (on l'appelle « perpendiculaire commune » à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2). (*Indication : soit D l'orthogonal de $D_1 + D_2$; étudier l'intersection du plan $\mathcal{D}_1 + D$ avec \mathcal{D}_2 .*)

(4.b) Que se passe-t'il si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles ?

(4.c) Montrer que si \mathcal{D} est une droite orthogonale à chacune de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $x_i = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_i$ alors

$$d(x_1, x_2) = \inf (d(x, y) : x \in \mathcal{D}_1, y \in \mathcal{D}_2).$$

(4.d) Généraliser les résultats ci-dessus à des sous-espaces arbitraires dans un espace affine euclidien.

Exercice 5

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien ; soient $C \subset \mathcal{E}$ une partie convexe fermée et $x \in \mathcal{E} \setminus C$.

* (5.a) Montrer que la fonction $y \mapsto d(x, y)$ atteint un minimum sur C .

(5.b) Montrer que ce minimum est atteint en un seul point.

(5.c) On note y_0 le point réalisant le minimum de $d(y, x)$ parmi les $y \in C$ et $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{xy_0}}{\|\overrightarrow{xy_0}\|}$.

En considérant la fonction affine $z \mapsto \langle \vec{v}, \overrightarrow{xz} \rangle + 1/2$ montrer qu'il existe un demi-espace fermé \mathcal{H}^+ de \mathcal{E} tel que $x \notin \mathcal{H}^+$ et $C \subset \mathcal{H}^+$ (on dit que l'hyperplan $\mathcal{H} = \partial \mathcal{H}^+$ sépare x de C).

(5.d) Dédurre de la question précédente qu'un convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

2. ISOMÉTRIES

Exercice 6

Montrer que si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont des bases affines orthonormales de \mathcal{E} alors il existe une unique isométrie f de \mathcal{E} telle que $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel euclidien.

(7.a) Montrer que pour $\vec{u}, \vec{v} \in E$ on a :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

(7.b) Dédurre de la question précédente que pour un endomorphisme linéaire ϕ de E on a :

$$(\forall \vec{v} \in E : \|\phi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|) \Leftrightarrow (\forall \vec{u}, \vec{v} \in E : \langle \phi(\vec{u}), \phi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle).$$

(7.c) Montrer que si une application affine f de \mathcal{E} dans lui-même vérifie $\forall x, y \in \mathcal{E} : d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, alors f est une isométrie affine de \mathcal{E} .

Exercice 8

Soit $E = M_2(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$

(noter que c'est la spécialisation au cas $n = 2$ du produit scalaire défini dans l'exercice 1.2). Soient $A, B \in O_2(\mathbb{R})$. Montrer que les endomorphismes linéaires de E définis par

$$M \mapsto AM, \quad M \mapsto MB, \quad M \mapsto AMB, \quad M \mapsto AMA^{-1}$$

sont des isométries de E .

Exercice 9

(9.a) Montrer qu'une application affine f est une symétrie si et seulement si c'est une involution (c'est-à-dire que $f \circ f = \text{Id}$).

(9.b) Montrer que la symétrie s par rapport à \mathcal{F} parallèlement à F' est une isométrie affine si et seulement si F et F' sont orthogonaux.

Exercice 10

(10.a) Montrer que si E est un espace vectoriel euclidien de dimension $\dim(E) \geq 2$ et $r > 0$ alors E est engendré comme groupe abélien par le sous-ensemble

$$\{\vec{v} \in E : \|\vec{v}\| = r\}$$

(faire une démonstration par récurrence ; pour $\dim(E) = 2$ montrer d'abord que le groupe engendré par ces vecteurs contient $t\vec{v}$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $\|\vec{v}\| = r$).

(10.b) Montrer que si $\vec{v}, \vec{v}' \in E$ ont même norme il existe une réflexion vectorielle σ de E telle que $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}'$.

* (10.c) Montrer que le groupe orthogonal de E est engendré par les réflexions.

(10.d) Dédurre des questions précédentes que si \mathcal{E} est un espace affine euclidien de direction E , t une translation non-triviale de \mathcal{E} et $x_0 \in \mathcal{E}$ alors le groupe des isométries de \mathcal{E} est engendré par t et les réflexions fixant x_0 .

(10.e) Montrer que le groupe des isométries de \mathcal{E} est engendré par les réflexions.

Exercice 11

(11.a) Montrer que si $\dim(E)$ est paire et ϕ est une isométrie indirecte de E alors ϕ a un vecteur fixe non-nul (i.e. il existe $\vec{v} \in E$, $\vec{v} \neq 0$ avec $\phi \vec{v} = \vec{v}$).

(11.b) Montrer que si $\dim(E)$ est impaire et ϕ est une isométrie directe de E alors ϕ a un vecteur fixe non-nul.

Exercice 12

(12.a) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4, $B = \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$ une base orthonormale de E et ρ l'application linéaire dont la matrice dans B est

$$\text{Mat}_B(\rho) = R = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Constater que ρ est une isométrie de E , montrer qu'il existe une infinité de bases orthonormales de E dans lesquelles la matrice de ρ est égale à R (ceci montre qu'en général la décomposition en espaces stables d'une isométrie n'est pas unique).

(12.b) Soit R la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 2/3 & 8/15 & -2/5 & 1/3 \\ -2/5 & 11/15 & -2/15 & -8/15 \\ 8/15 & 2/15 & 11/15 & -2/5 \\ -1/3 & 2/5 & 8/15 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Constater que R est une isométrie ; calculer son polynôme caractéristique et montrer que ce dernier est égal à $(X^2 - 6X/5 + 1)(X^2 - 8X/5 + 1)$. Soit ρ l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est R ; donner une base orthonormale de \mathbb{R}^4 dans laquelle ρ ait une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ et donner les valeurs de θ_1 et θ_2 .