

**FEUILLE D'EXERCICES n° 3 :
ISOMÉTRIES DU PLAN EUCLIDIEN, ANGLES**

1. ISOMÉTRIES

Exercice 1

Soit s une symétrie glissée de vecteur \vec{v} et d'axe \mathcal{D} . Montrer que l'on a :

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{E} : s(x) = x + \vec{v}\}.$$

Exercice 2

(2.a) Soit r une rotation de centre x et d'angle θ , et soit f une isométrie de \mathcal{E} . Montrer que $f \circ r \circ f^{-1}$ est la rotation de centre $f(x)$ et d'angle θ si f est directe, $-\theta$ si f est indirecte (donner une preuve matricielle et une preuve géométrique pour ce dernier résultat).

(2.b) Dédurre de la première question une preuve alternative de la proposition ??.

Exercice 3

(3.a) Soient s, s' des symétries affines d'axes non-parallèles. Soit x le point d'intersection de leurs axes et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'angle orienté entre des vecteurs directeurs de ces axes. Montrer que $s \circ s'$ est une rotation de centre x et d'angle 2θ (qui ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs).

(3.b) Soient r, r' des rotations affines de centres distincts et d'angles θ, θ' tels que $\theta + \theta' \neq 0 \pmod{2\pi}$. Montrer que $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$, puis utiliser la question précédente pour déterminer son centre.

(3.c) Soient s, s' des symétries d'axes parallèles distincts ; montrer que $s \circ s'$ est une translation et calculer son vecteur. Soient r, r' des rotations affines de centres distincts et d'angles θ, θ' avec $\theta + \theta' = 0 \pmod{2\pi}$; montrer que $r \circ r'$ est une translation et calculer son vecteur.

(3.d) Soient $\vec{v} \in E$ et s une symétrie d'axe \mathcal{D} ; on note π la projection orthogonale sur \mathcal{D} . Montrer que la composée $s \circ t_{\vec{v}}$ est la symétrie glissée d'axe $\mathcal{D} - \vec{v}/2$ et de vecteur $\pi(v)$. Utiliser ceci pour calculer les composées $r \circ s$ et $s \circ r$, où r est une rotation de centre x et d'angle θ .

(3.e) Calculer la composée de deux symétries glissées.

Exercice 4

(4.a) Soient \mathcal{E} un plan euclidien orienté, $x_0 \in \mathcal{E}$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\theta \neq 0$ et r la rotation de centre x_0 et d'angle θ . Soit encore $\vec{v} \in \mathcal{E}$; calculer le point fixe de l'application $r + \vec{v}$.

(4.b) Soient $v \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $r(z) = e^{i\theta}z + v$. Calculer $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait $r(z) = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$. Comparer avec le résultat de la question précédente.

Exercice 5

Refaire la question b de l'exercice 3 en utilisant l'expression en complexes des rotations.

Exercice 6

(6.a) Soit $s(z) = e^{i\theta}\bar{z} + v$. Calculer l'axe (ou la droite fixe) de s

(6.b) Soit $\theta' \in \mathbb{R}$ et $r(z) = e^{i\theta'}z$. Calculer la composée $s \circ r$. Retrouver ainsi (sans plus de calcul) le résultat de la question précédente pour $v = 0$.

Exercice 7

Soit f une isométrie affine de \mathcal{E} . Donner en fonction du type de f (selon que f est une symétrie, une translation, une rotation ou une symétrie glissée) le nombre minimal de symétries dont la composée est égale à f .

2. ANGLES**Exercice 8**

Soient $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in E$ deux à deux non colinéaires et $x \in \mathcal{E}$. Soient $\mathcal{D}_+, \mathcal{D}'_+$ les demi-droites $x + \mathbb{R}_+\vec{v}, x + \mathbb{R}_+\vec{u}$, y le point $x + \vec{v}$ et $\mathcal{F}_+, \mathcal{F}'_+$ les demi-droites $y + \mathbb{R}_+(-\vec{v}), y + \mathbb{R}_+\vec{w}$. On note θ, α les mesures des angles déterminés respectivement par $\mathcal{D}_+, \mathcal{D}'_+$ et $\mathcal{F}_+, \mathcal{F}'_+$. Montrer que si $\theta + \alpha > \pi$ alors les demi-droites \mathcal{D}'_+ et \mathcal{F}'_+ ne s'intersectent pas.

Exercice 9

(9.a) Montrer que si \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont deux angles géométriques ayant même mesure alors il existe une isométrie directe r de \mathcal{E} telle que $r(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$.

(9.b) Montrer que si \mathcal{A} est un angle géométrique et f une isométrie directe telle que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ alors $f = \text{Id}$. En déduire que si $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sont des angles géométriques et f, f' des isométries directes telles que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}' = f'(\mathcal{A}')$ alors $f = f'$.

(9.c) Montrer en utilisant la question précédente que si $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sont des angles géométriques il existe une unique isométrie indirecte g de \mathcal{E} telle que $g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$.

Exercice 10

(10.a) Montrer que la bissectrice de \mathcal{A} est déterminée par la propriété suivante : c'est l'unique droite affine \mathcal{F} de \mathcal{E} telle que si s est la symétrie d'axe \mathcal{F} alors $s(\mathcal{D}_+) = \mathcal{D}'_+$.

(10.b) Montrer que c'est aussi l'unique droite \mathcal{F} passant par x telle que les angles déterminés par $\mathcal{D}_+, \mathcal{F}_+$ et $\mathcal{D}'_+, \mathcal{F}_+$ soient isométriques (pour n'importe quelle orientation de \mathcal{F}).