

FEUILLE D'EXERCICES n° 1 :
ESPACES AFFINES

1. ESPACES AFFINES

Exercice 1

(1.a) Soit E est un espace vectoriel réel ; montrer que l'application $E \times E \rightarrow E$ définie par $(v, w) \mapsto w - v$ munit E d'une structure d'espace affine de direction E .

(1.b) Soient E, E' des espaces vectoriels réels, ϕ une application linéaire de E vers E' et $v \in E'$. Munir le sous-ensemble $\phi^{-1}(\{v\})$ d'une structure d'espace affine de direction $\ker(\phi)$.

Exercice 2

Montrer que la définition d'espace affine donnée dans le cours est équivalente à la définition suivante : une structure d'espace affine de direction E sur un ensemble \mathcal{E} est la donnée d'une application $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$, notée $(x, \vec{v}) \mapsto x + \vec{v}$, telle que $(x + \vec{v}) + \vec{u} = x + (\vec{v} + \vec{u})$ et pour tout $x \in \mathcal{E}$, l'application $\vec{v} \mapsto x + \vec{v}$ est une bijection $E \rightarrow \mathcal{E}$.

Exercice 3

(3.a) Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine canonique (cf. l'exercice 1.1). Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}$. Donner les coordonnées affines d'un point $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans le repère (x, B) .

(3.b) Soit $B' = (e_1, e_2 + e_1, \dots, e_n + e_1)$. Montrer que B' est une base de E et donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in E$ dans la base B' .

(3.c) Donner les coordonnées affines d'un point y dans le repère (x, B') .

(3.d) Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, $x = (1, 2, 3)$ et B la base :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donner les coordonnées de $(y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{E}$ dans le repère (x, B) .

Exercice 4

Soient \mathcal{E} un espace affine et $x, y, z, t \in \mathcal{E}$. Montrer que x, z et y, t ont même milieu si et seulement si $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{tz}$.

2. SOUS-ESPACES AFFINES, SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AFFINES

Exercice 5

(5.a) Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} . Pour $x \in \mathcal{E}$ on pose :

$$F_x = \{\overrightarrow{xy} : y \in \mathcal{F}\}.$$

Montrer que F_x ne dépend pas de x . On note $F = F_x$, montrer que \mathcal{F} est un espace affine de direction F .

(5.b) Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, montrer que \mathcal{F} est un sous-espace affine si et seulement s'il existe un $x \in \mathcal{E}$ tel que F_x soit un sous-espace vectoriel de E .

(5.c) Soit \mathcal{E} un espace affine d'espace directeur E et soit \mathcal{F} une partie de \mathcal{E} telle $\{\overrightarrow{xy} : x \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{F}\}$ soit un sous-espace vectoriel de E . La partie \mathcal{F} est-elle nécessairement un sous-espace affine de \mathcal{E} ?

Exercice 6

Soient $S \subset \mathcal{E}$, $x \in S$ et \mathcal{F} le sous-espace affine engendré par S . Montrer que la direction de \mathcal{F} est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\{\overrightarrow{xy} : y \in S\}$.

Exercice 7

(7.a) Montrer que si $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sont des sous-espaces affines de \mathcal{E} alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} si et seulement si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ ou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

(7.b) Montrer que si $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sont des sous-espaces affines d'un espace affine \mathcal{E} tels que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$, et \mathcal{F}'' est le sous-espace affine engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ on a

$$\dim(\mathcal{F}'') = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{F}') - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}').$$

(7.c) Dans le cas où $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \emptyset$ montrer que l'on a :

$$\dim(\mathcal{F}'') = \dim(F + F') + 1 = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{F}') - \dim(F \cap F') + 1.$$

(7.d) Discuter les configurations possibles de deux droites dans un espace affine de dimension 3.

Exercice 8

Soient a et b deux nombres réels et soit \mathcal{F} le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases};$$

montrer que \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathbb{R}^3 (on en donnera un point et l'espace directeur ; la réponse dépend en partie de a et b) ; quelle est sa dimension ?

Exercice 9

Soit $u \in \mathbb{R}$. Vérifier que les deux sous-ensembles \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathbb{R}^4 respectivement définis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = u \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x + y + 2z + t = 1 \\ x - y + 2z + 3t = 2u \end{cases}$$

sont des sous-espaces affines de \mathbb{R}^4 , dont on donnera pour chacun un point, l'espace directeur et la dimension. Pour quelle valeur de u s'intersectent-ils ? Donner alors un point, l'espace directeur et la dimension de l'intersection.

Exercice 10

A quelle condition sur le réel t les quatre points

$$(1; 1; t), (2; 3; 2t), (3; 1 - t; t - 1), (2; 3; 3 + t)$$

de \mathbb{R}^3 sont-ils affinement indépendants ? Pour chaque valeur de t pour lequel ils ne le sont pas, donnez la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

Exercice 11

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 3 et soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites de \mathcal{E} non parallèles et d'intersection vide.

(11.a) Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 3 et soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites de \mathcal{E} non parallèles et d'intersection vide. Montrez qu'il existe un unique plan \mathcal{P} contenant \mathcal{D} et parallèle à \mathcal{D}' ; on définit de même \mathcal{P}' .

(11.b) Soit $x \in \mathcal{E}$. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) il existe une droite Δ contenant x et rencontrant \mathcal{D} et \mathcal{D}' ;
- (b) $x \in (\mathcal{E} - (\mathcal{P} \cup \mathcal{P}')) \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$.

3. APPLICATIONS AFFINES

Exercice 12

Soient t une translation de vecteur \vec{v} , h, h' des homothéties de rapports respectifs λ, λ' et de centres respectifs x, x' .

(12.a) Montrer que $h \circ t, t \circ h$ sont des homothéties de rapport λ (on calculera le centre de chacune).

(12.b) On suppose que $\lambda \cdot \lambda' \neq 1$. Montrer que $h \circ h'$ est une homothétie de rapport $\lambda \cdot \lambda'$, dont on donnera le centre.

(12.c) Quelle est la nature de $h \circ h'$ quand $\lambda \cdot \lambda' = 1$?

Exercice 13

(13.a) Montrer que si t, t' sont des translations et s'il existe un point $x \in \mathcal{E}$ tel que $t(x) = t'(x)$ alors $t = t'$

(13.b) Soit g une transformation affine inversible de \mathcal{E} et $\vec{v} \in E$. Montrer que $g \circ t_{\vec{v}} \circ g^{-1}$ est égale à $t_{\vec{g}(\vec{v})}$.

* (13.c) Dédurre de la question précédente que l'ensemble des translations de \mathcal{E} (y compris l'identité) est un sous-groupe distingué du groupe affine de \mathcal{E} . Montrer que le quotient est isomorphe à $GL(E)$.

Exercice 14

Soit \mathcal{E} un espace affine. On dit qu'une application affine p de \mathcal{E} dans lui-même est une projection s'il existe un sous-espace affine \mathcal{F} de \mathcal{E} et un sous-espace vectoriel D de E tels que $F \oplus D = E$, et que l'on ait $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$ et $\forall x \in \mathcal{E} : \overrightarrow{xp(x)} \in D$.

(14.a) Montrer que la partie linéaire π de p est une projection vectorielle (on rappelle que ceci est équivalent à ce que $E = \ker(\pi) + \ker(\pi - \text{Id})$).

(14.b) Etant donnés \mathcal{F}, D comme ci-dessus, construire un p vérifiant les hypothèses et montrer qu'il est unique.

(14.c) Montrer qu'une application affine $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une projection si et seulement si on a $p \circ p = p$.

4. POINTS FIXES DES APPLICATIONS AFFINES

Exercice 15

Soit \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace affine de dimension 2 et soit E son espace directeur. Soit $x_0 \in \mathcal{E}$, soit (e_1, e_2) une base de E et soit \mathcal{R} le repère (x_0, e_1, e_2) de \mathcal{E} . Soit f l'application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} donnée en coordonnées dans le repère \mathcal{R} par la formule

$$(x, y) \mapsto (2x - 3y + 5, 7x - 2y + 3).$$

(15.a) Quelle est la dimension de l'espace des points fixes de f ?

(15.b) Soient x'_0 le point de \mathcal{E} de coordonnées $(2, -1)$ dans \mathcal{R} , $e'_1 = e_1 - 2e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$. Vérifiez que (e'_1, e'_2) est une base de E . Soit \mathcal{R}' le repère (x'_0, e'_1, e'_2) de \mathcal{E} . Donner une formule en coordonnées dans le repère \mathcal{R}' pour f .

(15.c) Trouver le repère $\mathcal{R}'' = (x''_0, e''_1, e''_2)$ de \mathcal{E} caractérisé par la propriété suivante : si x est un point de \mathcal{E} de coordonnées (x_1, x_2) dans \mathcal{R} , ses coordonnées dans \mathcal{R}'' sont $(x_1 - x_2 + 3, 2x_1 + x_2 - 6)$.

(15.d) Trouver un repère \mathcal{R}''' de \mathcal{E} dans lequel f peut être définie par une formule sans termes constants.

Exercice 16

Soit \mathcal{E} un plan affine et (x_0, B) un repère de \mathcal{E} . Soit ϕ l'application linéaire de E dont la matrice dans B est

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

et f l'application affine de partie linéaire ϕ et telle que $f(x_0)$ soit de coordonnées $(1, a)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f ait un point fixe et calculer ce dernier quand il existe.

Exercice 17

Soit ϕ l'endomorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 défini par

$$(x, y) \mapsto (x + y, y).$$

Montrer que ϕ n'est pas diagonalisable sur \mathbb{C} . Trouver un endomorphisme affine f de \mathbb{R}^2 dont la partie linéaire est ϕ et qui ait un point fixe dans \mathbb{R}^2 , et un endomorphisme f' dont la partie linéaire est aussi ϕ mais qui n'a pas de point fixe dans \mathbb{R}^2 .