

**FEUILLE D'EXERCICES n° 1 :  
ESPACES AFFINES EUCLIDIENS**

**Exercice 1**

(1.a) Soit  $E$  est un espace vectoriel réel ; montrer que l'application  $E \times E \rightarrow E$  définie par  $(v, w) \mapsto w - v$  munit  $E$  d'une structure d'espace affine de direction  $E$ .

(1.b) Soient  $E, E'$  des espaces vectoriels réels,  $\phi$  une application linéaire de  $E$  vers  $E'$  et  $v \in E'$ . Munir le sous-ensemble  $\phi^{-1}(\{v\})$  d'une structure d'espace affine de direction  $\ker(\phi)$ .

**Exercice 2**

(2.a) Montrer que si  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  alors l'ensemble  $\{\overrightarrow{xy}, y \in \mathcal{F}\}$  ne dépend pas de  $x \in \mathcal{F}$ .

(2.b) Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine d'espace directeur  $E$  et soit  $\mathcal{F}$  une partie de  $\mathcal{E}$  telle  $\{\overrightarrow{xy} : x \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{F}\}$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$ . La partie  $\mathcal{F}$  est-elle nécessairement un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  ?

**Exercice 3**

(3.a) Montrer que si  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  sont des sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  alors  $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$  ou  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ .

(3.b) Montrer que si  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  sont des sous-espaces affines d'un espace affine  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}''$  le sous-espace affine engendré par  $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$  on a

$$\dim(\mathcal{F}'') = \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{F}') - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}')$$

(on rappelle que par convention  $\dim(\emptyset) = -1$ ).

(3.c) Discuter les configurations possibles de deux droites dans un espace affine de dimension 3.

**Exercice 4**

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et soit  $\mathcal{F}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases} ;$$

montrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^3$  (on en donnera un point et l'espace directeur ; la réponse dépend en partie de  $a$  et  $b$ ) ; quelle est sa dimension ?

**Exercice 5**

Soit  $u \in \mathbb{R}$ . Vérifier que les deux sous-ensembles  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{R}^4$  respectivement définis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = u \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x + y + 2z + t = 1 \\ x - y + 2z + 3t = 2u \end{cases}$$

sont des sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^4$ , dont on donnera pour chacun un point, l'espace directeur et la dimension. Pour quelle valeur de  $u$  s'intersectent-ils ? Donner alors un point, l'espace directeur et la dimension de l'intersection.

**Exercice 6**

A quelle condition sur le réel  $t$  les quatre points

$$(1; 1; t), (2; 3; 2t), (3; 1 - t; t - 1), (2; 3; 3 + t)$$

de  $\mathbb{R}^3$  sont-ils affinement indépendants ? Pour chaque valeur de  $t$  pour lequel ils ne le sont pas, donnez la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

### Exercice 7

(7.a) Soit  $\mathcal{E}$  un  $k$ -espace affine de dimension 3 et soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites de  $\mathcal{E}$  non parallèles et d'intersection vide. Montrez qu'il existe un unique plan  $\mathcal{P}$  contenant  $\mathcal{D}$  et parallèle à  $\mathcal{D}'$ ; on définit de même  $\mathcal{P}'$ .

(7.b) Soit  $M \in \mathcal{E}$ . Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) il existe une droite  $\Delta$  contenant  $M$  et rencontrant  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ;
- (b)  $M \in (\mathcal{E} - (\mathcal{P} \cup \mathcal{P}')) \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ .

### Exercice 8

(8.a) Soit  $d = \dim \mathcal{E}$ . Montrez que  $\mathcal{B} = (x_0, \dots, x_d)$  est orthonormale si et seulement si :

- Pour tout  $i \geq 1$  on a  $d(x_0, x_i) = 1$  ;
- Pour tous  $i, j \geq 1, i \neq j$  on a  $d(x_i, x_j) = \sqrt{2}$ .

(8.b) En déduire que si  $\sigma$  est une permutation sur l'ensemble  $\{0, \dots, d\}$  alors la base affine  $(x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(d)})$  est orthonormale si et seulement si  $\sigma(0) = 0$ .

### Exercice 9

(9.a) Soit  $n \geq 1$  et  $E$  l'espace vectoriel des matrices réelles  $n \times n$ , que l'on considère comme un espace affine de la façon habituelle. Montrez que l'application

$$(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle := \text{tr}({}^t AB)$$

définit un produit scalaire sur  $E$ .

(9.b) Ici  $n = 2$ . Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $F$  le sous-espace de  $E$  engendré par  $A$  et  $B$ . Donner une base affine du sous-espace affine orthogonal à  $F$  passant par  $A$  (commencer par donner un système d'équations pour ce sous-espace).

### Exercice 10

(10.a) Soit  $E = \mathbb{R}_{\leq d}[X]$  l'espace des polynômes en  $X$  à coefficients réels de degré au plus  $d$ . Montrez que

$$(p, q) \mapsto \langle p, q \rangle := \int_0^1 f(t)p(t)dt$$

définit un produit scalaire sur  $E$ . On note  $\mathcal{E}$  l'espace affine euclidien associé.

(10.b) On suppose  $d = 1$ . Calculer une base affine orthonormale de  $\mathcal{E}$ . Même question pour  $d = 2$ .