

EXAMEN PARTIEL, GÉOMÉTRIE II
VENDREDI 13 MARS 2015

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés pendant toute la durée de l'épreuve. **La qualité de rédaction entrera pour une part substantielle dans la notation.** Tout énoncé du cours utilisé doit être énoncé clairement.

Le barème suivant est indicatif (sujet à changement après correction, mais les proportions entre problèmes devraient rester les mêmes) : la question de cours vaut 3 points et les problèmes 1, 2 et 3 valent respectivement 12, 6 et 3 points.

Question de cours

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien et \mathcal{D} une droite de \mathcal{E} . Donner les définitions respectives d'une réflexion d'axe \mathcal{D} et d'une symétrie glissée d'axe \mathcal{D} de \mathcal{E} .

Problème 1

Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique de plan affine euclidien, de sorte que la base

$$((1, 0), (0, 1))$$

de son espace directeur $E = \mathbb{R}^2$ soit orthonormée. On munit \mathcal{E} de l'orientation pour laquelle cette base est une base directe de E .

Question (1.a) Soit r l'application $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par :

$$r(x, y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5}, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5}\right).$$

Montrer que r est une rotation de \mathcal{E} et donner son angle.

Question (1.b) Calculer le centre de r .

Question (1.c) Soient s_1 et s_2 les applications $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définies par :

$$\begin{aligned} s_1(x, y) &= (-x + 2, y) \\ s_2(x, y) &= \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right). \end{aligned}$$

Montrer que s_1 et s_2 sont des isométries indirectes de \mathcal{E} .

Question (1.d) Calculer les ensembles de points fixes de s_1 et s_2 . En déduire que s_1 et s_2 sont des réflexions de \mathcal{E} , et donner pour chacune un point et un vecteur directeur de sa droite fixe.

Question (1.e) Montrer que $s_2 \circ s_1$ est une rotation et donner son angle et son point fixe.

Question (1.f) Montrer que le point fixe de r est fixé par s_1 . En déduire que $r \circ s_1$ est une symétrie et calculer sa droite fixe (pour ce faire exprimer r comme produit de symétries).

Problème 2

Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace affine. Soient a et b deux nombres réels ; on définit une application f de \mathcal{E} dans lui-même par :

$$f(x, y) = (3x + y + a, -2x + b).$$

Question (2.a) Montrer que f est une application affine.

Question (2.b) Soit B la base $((1, 0), (0, 1))$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 et φ la partie linéaire de f . Donner la matrice de φ dans la base B et calculer son polynôme caractéristique.

Question (2.c) Donner une base C de E telle que l'on ait :

$$\text{Mat}_C(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et calculer alors l'image de l'application linéaire $\phi - \text{Id}$.

Question (2.d) Soient D_1, D_2 les droites vectorielles engendrées respectivement par $(1, -1)$ et $(1, -2)$ et π la projection (vectorielle) sur D_2 parallèlement à D_1 . Soient encore x_0 un point de \mathcal{E} , f' une application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ dont la partie linéaire est φ et $\vec{v} = \overrightarrow{x_0 f'(x_0)}$. Déduire de la question précédente que f' a un point fixe dans \mathcal{E} si et seulement si $\pi(\vec{v}) = 0$.

Question (2.e) Calculer la matrice de π dans la base B . Déduire alors de la question précédente une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que f ait un point fixe dans \mathcal{E} .

Problème 3

Soient \mathcal{E} un espace affine, E son espace directeur et γ une application linéaire inversible de E dans lui-même. Soient encore $x_0 \in \mathcal{E}$ et g l'application affine de \mathcal{E} dans lui-même définie par $g(x) = x_0 + \gamma(\overrightarrow{x_0 x})$.

Question (3.a) Montrer que g est inversible (c'est-à-dire bijective). Montrer que son inverse est donné par $g^{-1}(x) = x_0 + \gamma^{-1}(\overrightarrow{x_0 x})$ (on pourra traiter la seconde partie sans l'avoir fait pour la première, mais on donnera une preuve de l'inversibilité de g sans utiliser l'expression donnée).

Question (3.b) Soient $\vec{v} \in E$ et t la translation de vecteur \vec{v} . Quelle est la partie linéaire de l'application affine $f = g \circ t \circ g^{-1}$?

Question (3.c) Calculer le vecteur $\overrightarrow{x_0 f(x_0)}$ et en déduire avec la question précédente que f est la translation de vecteur $\gamma(\vec{v})$.