

FEUILLE D'EXERCICES n° 5 :
POLYGONES, GROUPES D'ISOMÉTRIES PLANES, SIMILITUDES PLANES

1. POLYGONES

Exercice 1

Soit \mathcal{C} un polygone convexe. Montrer qu'un sommet de \mathcal{C} appartient à exactement deux côtés de \mathcal{C} ; en déduire que le nombre de côtés d'un polygone convexe est égal à son nombre de sommets.

Exercice 2

Soient $\theta_1, \dots, \theta_n$ les mesures des angles de \mathcal{C} . Montrer que $\sum_i \theta_i = (n - 2)\pi$.

Exercice 3

(3.a) En utilisant une méthode similaire à celle de la preuve de (1) de la proposition 2.22, calculer l'aire d'un disque de rayon 1 dans \mathcal{E} .

(3.b) Calculer l'aire d'un polygone convexe en fonction de ses angles et de la longueur de ses côtés.

(3.c) Retrouver le résultat de la question 2a) en utilisant la question 2b).

Exercice 4

Soient $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ les droites de \mathcal{E} portant les côtés de \mathcal{C} et x un point intérieur de \mathcal{C} . Pour tout i on note \mathcal{H}_i^+ la composante connexe de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{D}_i$ contenant x . Montrer que

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^n (\mathcal{H}_i^+ \cup \mathcal{D}_i).$$

Exercice 5

(5.a) Montrer qu'un triangle est régulier si et seulement si tous ses côtés ont la même longueur.

(5.b) Montrer que pour tout $n \geq 4$ il existe un polygone dont tous les côtés ont la même longueur mais qui n'est pas régulier.

(5.c) Montrer que pour tout $n \geq 4$ il existe un polygone dont tous les angles ont la même mesure mais qui n'est pas régulier.

2. GROUPES DIHÉDRAUX

Exercice 6

Soit $T = \{x, y, z\}$ un triangle de \mathcal{E} .

(6.a) Montrer que si $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ vérifie $f(T) = T$ alors f est une rotation ou une réflexion (montrer que f a un point fixe).

(6.b) Soit s une réflexion de \mathcal{E} telle que $s(T) = T$. Montrer que l'axe de s contient l'un des sommets de T et est orthogonal au côté opposé à ce sommet.

(6.c) Montrer que s'il existe une rotation r de \mathcal{E} telle que $r(T) = T$ alors on peut orienter \mathcal{E} de sorte que l'angle de r soit égal à $2\pi/3$. Montrer aussi que T est équilatéral.

(6.d) Conclure que le sous-groupe

$$G = \{g \in \text{Isom}(\mathcal{E}) : g(T) = T\}$$

est de cardinal 6, contenant trois réflexions et deux rotations, si T est équilatéral, de cardinal 2 contenant une réflexion si T est isocèle en un sommet mais pas équilatéral, et trivial dans les cas restants.

Exercice 7

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 quatre points de \mathcal{E} tels que pour tout $i = 1, 2, 3, 4$ le point x_i ne soit pas dans l'enveloppe convexe des $x_j, j \neq i$. Soit \mathcal{C} l'enveloppe convexe des x_i .

(7.a) Montrer que \mathcal{C} est un polygone convexe ayant exactement quatre sommets.

(7.b) Montrer que si $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ vérifie $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ alors f est une réflexion ou une rotation.

On notera $G_{\mathcal{C}} = \{f \in \text{Isom}(\mathcal{E}) : f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}$.

(7.c) Montrer que si $s \in G_{\mathcal{C}}$ est indirecte alors l'axe de s contient deux sommets de \mathcal{C} ou bien est la médiatrice de deux côtés de \mathcal{C} .

(7.d) Montrer que si $r \in G_{\mathcal{C}}$ est une rotation alors on peut orienter \mathcal{E} de façon à ce que son angle vaille $\pm\pi/2$ ou π . Montrer que dans le premier cas \mathcal{C} est régulier (i.e. est un carré), et dans le second \mathcal{C} a tous ses côtés de même longueur (i.e. est un losange) ou tous ses angles droits (i.e. est un rectangle).

(7.e) Montrer (en n'utilisant que les questions précédentes) que les cardinaux possibles pour $|G_{\mathcal{C}}|$ sont 1, 2, 4 et 8 et caractériser chaque cas où $G_{\mathcal{C}}$ est non-trivial.

Exercice 8

Soit \mathcal{C} un polygone régulier. Montrer que si H est un sous-groupe du groupe $G_{\mathcal{C}}$ alors H est lui-même diédral ou il est cyclique ; si H n'est composé que d'isométries directes montrer que l'on est toujours dans le second cas.

3. SIMILITUDES

Exercice 9

Soient $\lambda > 0$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\phi = \lambda \cdot \rho$ où ρ est la rotation linéaire d'angle θ . $x, y, z \in \mathcal{E}$. Soient x', y', z' les images respectives de z par la similitude de centre x et de partie linéaire ϕ , de x par la similitude de centre y et de partie linéaire ϕ et de y par la similitude de centre z et de partie linéaire ϕ . Montrer que les triangles $\{x, y, z\}$ et $\{x', y', z'\}$ ont le même centre de gravité.

Exercice 10

On fixe un triangle T_0 , une droite \mathcal{D} et un point $x \notin \mathcal{D}$ dans \mathcal{E} .

(10.a) A un point $y \in \mathcal{D}$ on associe le point $z \in \mathcal{E}$ tel que le triangle $T = \{x, y, z\}$ soit l'image par une similitude directe du triangle T_0 . Décrire l'ensemble des points z ainsi obtenus.

(10.b) Si f est une similitude de \mathcal{E} et T' un triangle de \mathcal{E} montre que l'orthocentre de $f(T')$ (respectivement les centres des cercles circonscrit et inscrit à $f(T')$) sont les images par f de ceux de T' .

(10.c) Décrire l'ensembles des orthocentres des triangles T de la question a).

Exercice 11

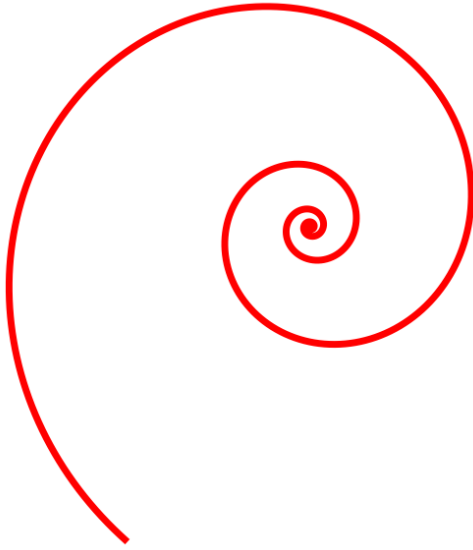
(11.a) Soient $x, y, x', y' \in \mathcal{E}$ tels que $x \neq y, x' \neq y'$. Construire géométriquement une similitude directe f^+ et une similitude indirecte f^- telles que $f^{\pm}(x) = x', f^{\pm}(y) = y'$ (commencer par f^-).

(11.b) Montrer que f^+, f^- sont les seules similitudes vérifiant cette propriété. A quelle condition sur x, y, x', y' sont-elles des isométries ?

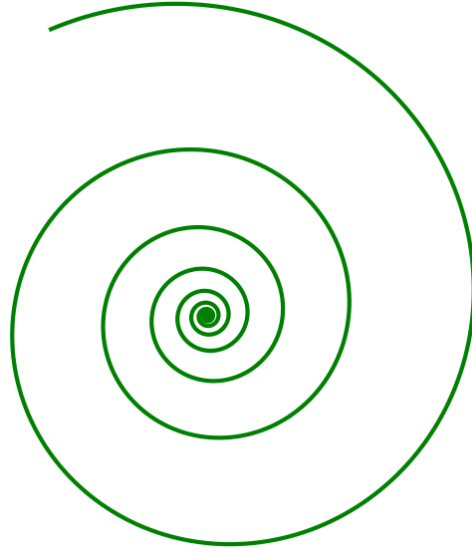
Exercice 12

Soit $a > 0$ et C_a la courbe définie par

$$C_a = \{(t \cos(a \ln(t)), t \sin(a \ln(t))) : t \in]0, +\infty[\}.$$



(A) $a = 5$



(B) $a = 10$

Montrer que C_a est stable par les homothéties de rapports $-e^{\pi/a}$ et $e^{2\pi/a}$ et de centre $(0,0)$. Montrer que C_a est stable par la composée de la rotation d'angle $\pi/2$ et de centre $(0,0)$ et l'homothétie de rapport $e^{\pi/2a}$. Quel est le groupe des isométries directes préservant C_a ?

4. GROUPES DE PAVAGE

Exercice 13

Dans tout cet exercice on suppose que G est un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathcal{E})$.

(13.a) On note T_G l'ensemble des translations contenues dans G . Montrer que T_G est un sous-groupe de G .

(13.b) On suppose que $T_G = \{t_n \vec{u} : n \in \mathbb{Z}\}$ pour un $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$. Montrer que pour toute rotation r contenue dans G l'angle de r est π , et que les centres de deux telles rotations diffèrent d'un multiple demi-entier de \vec{u} .

(13.c) On suppose qu'il existe des vecteurs linéairement indépendants $\vec{u}, \vec{v} \in E$ tels que

$$T_G = \{t_n \vec{u} + m \vec{v} : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Montrer que les angles des rotations de G sont contenus dans $\{\pm\pi/2 \pm 3\pi/4, \pi\}$ ou dans $\{\pm\pi/3, \pm 2\pi/3, \pi\}$. En déduire que les symétries contenues dans G ont au plus 6 directions différentes pour leurs axes.

(13.d) Quels peuvent être les centres des rotations de G ?

Exercice 14

(14.a) Soient $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{E}$ les sommets d'un carré \mathcal{C} . Soit G le sous-groupe de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ engendré par les réflexions d'axes $(x_i x_{i+1}), i = 1, 2, 3$ et $(x_4 x_1)$. Déterminer les vecteurs des translations de G , et les angles et les centres de ses rotations.

(14.b) Même questions pour le groupe H engendré par les réflexions dans les côtés d'un triangle équilatéral \mathcal{T} .

(14.c) Montrer que dans ces deux cas G, \mathcal{C} et H, \mathcal{T} pavent le plan.

(14.d) Que se passe-t-il si l'on prend un rectangle de côtés 2 et 1 ?