

EXAMEN PARTIEL, GÉOMÉTRIE II CORRIGÉ

Problème I

Question (1) Supposons que $\overrightarrow{x_1x_2} = \overrightarrow{x_4x_3}$. Il vient :

$$\overrightarrow{x_1x_4} = \overrightarrow{x_1x_2} + \overrightarrow{x_2x_4} = \overrightarrow{x_2x_4} + \overrightarrow{x_4x_3} = \overrightarrow{x_2x_3}$$

et comme le problème est symétrique l'autre implication se démontre exactement de la même manière.

Question (2.a) Supposons que $\overrightarrow{x_1x_2} = \overrightarrow{x_4x_3}$. On a alors :

$$\overrightarrow{x_0x_4} = \overrightarrow{x_0x_3} + \overrightarrow{x_3x_4} = -\overrightarrow{x_0x_1} - \overrightarrow{x_1x_2} = -\overrightarrow{x_0x_2};$$

c'est-à-dire que x_0 est le milieu de $[x_2x_4]$. Réciproquement, si $\overrightarrow{x_0x_4} = -\overrightarrow{x_0x_2}$ il vient :

$$\overrightarrow{x_1x_2} = \overrightarrow{x_1x_0} + \overrightarrow{x_0x_2} = -\overrightarrow{x_3x_0} - \overrightarrow{x_0x_4} = \overrightarrow{x_4x_3}.$$

Question (2.b) Soient $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{E}$: ils déterminent un quadrilatère, qui est un parallélogramme si et seulement si tous les points ne sont pas alignés et $\overrightarrow{x_1x_2} = \overrightarrow{x_4x_3}$. D'après la question précédente c'est le cas si et seulement si $[x_1x_3]$ et $[x_2x_4]$ ont même milieu, ce qui signifie exactement (en prenant en compte leur non-alignement) que les droites (x_1x_3) et (x_2x_4) s'intersectent en leur milieu.

Question (2.c) D'après les question précédente le quadrilatère déterminé par $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{E}$ est un parallélogramme si et seulement si $[x_1x_3]$ et $[x_2x_4]$ ont même milieu x_0 , qui est alors le point d'intersection des diagonales. Par associativité du barycentre on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \right) \\ &= \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_0 = x_0. \end{aligned}$$

Question (3) Soit $g = 1/3x + 1/3y + 1/3z$; on a alors :

$$g = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x'$$

et donc $g \in (xx')$. On démontre exactement de la même manière que $g \in (yy')$ et $g \in (zz')$, et il suit que ces trois droites sont bien concourantes en g .

Problème II

Question (1.a) Le polynôme caractéristique de σ est donné par :

$$\det(\sigma - X \cdot \text{Id}) = \det(A - X \cdot I_2) = \begin{vmatrix} -7-X & 4 \\ -12 & 7-X \end{vmatrix} = X^2 - 49 - (-48) = X^2 - 1$$

et il suit que les valeurs propres de σ sont ± 1 . En calculant les noyaux respectifs des matrices

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}, \quad A + I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$$

on voit que l'espace propre de σ pour 1 (resp. -1) est engendré par le vecteur \vec{e}_1 (resp. \vec{e}_2) de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$) dans B . La base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) diagonalise donc σ .

Question (1.b) Comme σ est diagonalisable sur \mathbb{R} , d'après le cours s a un point fixe si et seulement si la projection de $\overrightarrow{x_0 f(x_0)}$ sur $\ker(\sigma - \text{Id})$ parallèlement à la somme des autres espaces propres est nulle : dans ce cas, comme on a $E = \ker(\sigma - \text{Id}) + \ker(\sigma + \text{Id})$ ceci revient à ce que $\overrightarrow{x_0 f(x_0)} \in \ker(\sigma + \text{Id})$.

En coordonnées dans B on a $\overrightarrow{x_0 f(x_0)} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$; on a donc $\overrightarrow{x_0 f(x_0)} \in \ker(\sigma + \text{Id}) = \mathbb{R}\vec{e}_2$ si et seulement si

$$0 = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 2,$$

c'est-à-dire si et seulement si $a = 2/3$.

Question (1.c) Pour un point $x \in \mathcal{E}$ on a

$$s(x) = s(x_0) + \sigma(\overrightarrow{x_0 x}) = x_0 + \overrightarrow{x_0 s(x_0)} + \sigma(\overrightarrow{x_0 x});$$

si les coordonnées de x dans (x_0, B) sont (x_1, x_2) celles de $s(x)$ sont donc $(a - 7x_1 + 4x_2, 1 - 12x_1 + 7x_2)$. La résolution du système :

$$\begin{cases} a - 7x_1 + 4x_2 &= x_1 \\ 1 - 12x_1 + 7x_2 &= x_2 \end{cases}$$

pour $a = 2/3$ donne comme solutions

$$\left\{ \left(\frac{1}{12} + s, 2s \right) : s \in \mathbb{R} \right\}$$

qui est donc un paramétrage dans (x_0, B) de la droite fixe de s .

Question (2.a) On a

$$\text{Mat}_B(\phi - \text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et un pivot de Gauss montre que cette dernière matrice est inversible (de sorte que $\phi - \text{Id}$ l'est aussi), d'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est donc la matrice de ψ dans B .

Question (2.b) (**Erratum : dans la question $\phi(x_0) = (1, 1, 1)$ devrait être $f(x_0) = (1, 1, 1)$**)

D'après le cours f a un unique point fixe x . Ce dernier est égal à $x_0 - \psi(\overrightarrow{x_0 f(x_0)})$: on rappelle la calcul montrant cette égalité :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \overrightarrow{x_0 x} = \overrightarrow{x_0 f(x_0)} + \phi(\overrightarrow{x_0 x}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{x_0 x} = (\text{Id} - \phi)^{-1}(\overrightarrow{x_0 f(x_0)}) = -\psi(\overrightarrow{x_0 f(x_0)}). \end{aligned}$$

Les coordonnées de x dans B sont donc :

$$- \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Problème III

Question (1) (**Erratum : la question devrait être : « Montrer que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est vide ou un point. »**)

Si $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est non-vide alors c'est un sous-espace affine de direction est $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{0\}$ (deux droites vectorielles distinctes ont une intersection triviale), c'est à dire un point.

Question (2.a) On a :

$$\dim(P) = \dim(D_1) + \dim(D_2) - \dim(D_1 \cap D_2) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Question (2.b) Soient $x, y \in \mathcal{E}$. On a :

$$\overrightarrow{p(x)p(y)} = \overrightarrow{p(x)o} + \overrightarrow{op(y)} = -\pi(\overrightarrow{ox}) + \pi(\overrightarrow{oy}) = \pi(\overrightarrow{xy})$$

d'où il suit que p est une application affine de partie linéaire π .

L'image $p(\mathcal{E})$ est le sous-espace affine de direction $\pi(E) = P$ et contenant le point $p(o) = o$; on a donc $p(\mathcal{E}) = o + P = \mathcal{P}$.

Question (2.c) Pour $i = 1, 2$ l'image $p(\mathcal{D}_i)$ est une droite de direction $\pi(D_i) = D_i$ (vu que $D_i \subset P$). Comme $p(\mathcal{D}_1)$ et $p(\mathcal{D}_2)$ sont toutes deux contenues dans un même plan \mathcal{P} et $D_1 \neq D_2$ il suit qu'elles s'intersectent en exactement un point.

Question (3.a) Soit $D = P^\perp$, de sorte que $\mathcal{D} = x_0 + D$. Comme pour $i = 1, 2$ on a $x_0 \in p(\mathcal{D}_i)$ il existe des points $x_i \in \mathcal{D}_i$ tels que $x_0 = p(x_i)$. On a alors :

$$\pi(\overrightarrow{x_0 x_i}) = \overrightarrow{p(x_0)p(x_i)} = \overrightarrow{x_0 x_0} = 0$$

et il suit donc que $\overrightarrow{x_0 x_i} \in \ker(\pi) = D$, donc que $x_i \in \mathcal{D}$: en particulier $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_i$ est non-vide.

Question (3.b) Pour $i = 1, 2$ on a $D_i \subset P = D^\perp$ donc les directions de \mathcal{D} et \mathcal{D}_i sont orthogonales. Comme de plus \mathcal{D} et \mathcal{D}_i sont sécantes d'après la question précédente il suit que \mathcal{D} est orthogonale à \mathcal{D}_i .

Question (4.a) On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base $(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})$: il en résulte la base orthonormée

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

de P . (En appliquant Gram–Schmidt à \vec{v}_1, \vec{v}_2) on obtient une base orthonormée dont les coordonnées sont moins aisées à manipuler.)

Question (4.b) (Erratum : l'expression pour π est $\pi(\vec{v}) = \langle \vec{e}_1, \vec{v} \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{e}_2, \vec{v} \rangle \vec{e}_2$)

Il suffit de vérifier que $\pi(\vec{v}) = 0$ si $\vec{v} \in P^\perp$ et que $\pi(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$ pour $i = 1, 2$ (ces dernières égalités impliquant que $\pi|_P = \text{Id}_P$).

Le premier point est clair : si $\vec{v} \in P^\perp$ on a $\langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle = 0$ pour $i = 1, 2$ et il suit que $\pi(\vec{v}) = 0$. Pour le second on voit que :

$$\begin{aligned}\pi(\vec{e}_1) &= \|\vec{e}_1\|^2 \cdot \vec{e}_1 + \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_2 \\ &= 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1\end{aligned}$$

et de même $\pi(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$.

Question (4.c) La droite P^\perp est l'ensemble des solutions au système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

dont un vecteur directeur est $(1, -1, 0)$.

Question (4.d) On a $p(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1$ vu que $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}$ (on a $o \in \mathcal{D}_1$ et $D_1 \subset P$) et $p(\mathcal{D}_2) = p(0, 1, 1) + D_2$ vu que $D_2 \subset P$.

Posons $\vec{u} = (0, 1, 1)$ (de sorte que $\mathcal{D}_2) = o + \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}_2$) et calculons $\pi(\vec{u})$: on a

$$\langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle \vec{v}_2, \vec{e}_2 \rangle = 1$$

d'où il suit que $\pi(\vec{v}_2) = (1/2, 1/2, 1)$.

On a alors $p(\mathcal{D}_2) = p(0, 1, 1) + \mathbb{R}\vec{v}_2$ (vu que $\pi(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$) et d'après le calcul précédent

$$p(0, 1, 1) = p(o) + \pi(\vec{u}) = (1/2, 1/2, 1),$$

ce qui donne la paramétrisation suivante :

$$p(\mathcal{D}_2) = \{(1/2 + s, 1/2 + s, 1) : s \in \mathbb{R}\}.$$

D'autre part un système d'équations pour \mathcal{D}_1 est :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Il suit que l'intersection de $p(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1$ et $p(\mathcal{D}_2)$ est le point de coordonnées $(1/2 + s, 1/2 + s, 1)$ où s est une solution au système :

$$\begin{cases} (1/2 + s) - (1/2 + s) = 0 \\ (1/2 + s) - 1 = 0 \end{cases}$$

autrement dit $s = 1/2$ et le point est $(1, 1, 1)$.

Question (4.e) On a $\mathcal{D} = (1, 1, 1) + P^\perp$, soit encore :

$$\mathcal{D} = \{(1 + s, 1 - s, 1) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Question (5.a) On a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2(t - s) + 2(t - s - 1) + 2(t - 1) = 6t - 4s - 4$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -2(t-s) - 2(t-s-1) = 4s - 4t + 2$$

qui s'annulent en même temps si et seulement si $t = 1, s = 1/2$. Il suit que f a au plus un extrema local. Pour montrer que le point $(1, 1/2)$ est un minimum local (ce qui implique alors immédiatement qu'il est aussi un minimum global) il faut montrer que la matrice hessienne y est positive; cette dernière est constante, égale à :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $5 \pm \sqrt{17}$ qui sont toutes deux positives.

Soit $p(s) = (s, s+1, 1)$ et $q(t) = (t, t, t)$. On a

$$f(t, s) = d(p(s), q(t))^2$$

et il suit donc que

$$\inf (d(x, y) : x \in \mathcal{D}_1, y \in \mathcal{D}_2) = \sqrt{f(1, 1/2)} = \sqrt{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Question (5.b) On voit facilement que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D} = (1, 1, 1) =: x_1$ (le point est sur les deux droites et elles ont des directions différentes) et le point $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}$ est donné par $(1+s, 1-s, 1) = (t, 1+t, 1)$ où (t, s) est donc une solution au système :

$$\begin{cases} t - s = 1 \\ t + s = 0 \end{cases}$$

soit $t = 1/2, s = -1/2$: c'est donc le point $(1/2, 3/2, 1) =: x_2$.

Soient $x \in \mathcal{D}_1$ et $y \in \mathcal{D}_2$; on peut écrire $x = x_1 + \overrightarrow{x_1 x}$ et $y = x_2 + \overrightarrow{x_2 y}$; on a alors $\overrightarrow{x_1 x} \in D_1$, $\overrightarrow{x_2 y} \in D_2$ et comme $\overrightarrow{x_1 x_2} \in D$ il suit que $\langle \overrightarrow{x_1 x}, \overrightarrow{x_1 x_2} \rangle = 0$ et $\langle \overrightarrow{x_2 y}, \overrightarrow{x_1 x_2} \rangle = 0$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} d(x, y)^2 &= \|\overrightarrow{xy}\|^2 = \|\overrightarrow{xx_1} + \overrightarrow{x_1 x_2} + \overrightarrow{x_2 y}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{x_1 x_2}\|^2 + \|\overrightarrow{xx_1} + \overrightarrow{x_2 y}\|^2 \geq \|\overrightarrow{x_1 x_2}\|^2 = d(x_1, x_2)^2 \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \inf (d(x, y) : x \in \mathcal{D}_1, y \in \mathcal{D}_2) &= d(x_1, x_2) \\ &= \sqrt{(1-1/2)^2 + (1-3/2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1/2} \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat trouvé à la question précédente.