

SOLUTIONS POUR LES EXERCICES NUMÉRIQUES

Feuille 1

2.d Les coordonnées dans (x, B) sont :

$$\begin{pmatrix} 2(y_1 - 1) - 5(y_2 - 2) + (y_3 - 3) \\ -(y_1 - 1) + 4(y_2 - 2) - (y_3 - 3) \\ -2(y_2 - 2) + (y_3 - 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - 5y_2 + y_3 + 5 \\ -y_1 + 4y_2 - y_3 - 4 \\ -2y_2 + y_3 + 1 \end{pmatrix}$$

7 On a :

$$\mathcal{F} = \left(\frac{2a+b}{2}, \frac{a-2b}{2}, 0 \right) + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

8 On a

$$\mathcal{F} = \left(0, 0, \frac{u}{2}, \frac{u}{2} \right) + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{G} = \left(\frac{1+2u}{1}, \frac{1-2u}{2}, 0, 0 \right) + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est vide si $u \neq 1$ et si $u = 1$ on a

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = (1, 0, 0, 1) + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9 Les points sont affinement indépendants si $t \neq -4, 3$. Pour $t = 3, -4$ les sous-espace affine qu'ils engendrent sont les plans d'équations respectives $x + y + z = 5$ et $2x - y = 1$.

14 b En coordonnées (x', y') dans le repère \mathcal{R}' on a :

$$f(x', y') = (-x' - 2y' - 4, 9x' + y' + 12).$$

14 d N'importe quel repère basé en $(1/3, 16/9)$ convient.

15 L'application f a un point fixe si et seulement si $a = 1$; dans ce cas l'ensemble des points fixes est la droite

$$\left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Feuille 3

2b Le sous-espace orthogonal à $\mathcal{F} = A + F$ passant par A est défini (dans les coordonnées canoniques de $M_2(\mathbb{R})$) par le système d'équations :

$$\begin{cases} x_{12} + x_{21} & = 2 \\ x_{11} + x_{12} & + x_{22} = 1 \end{cases}$$

1

En résolvant ce système on obtient une base pour sa direction :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et un repère en est $(A, (\vec{v}, \vec{w}))$.

3b Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ donne la base orthonormée :

$$\left(1, 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)\right).$$

Feuille 5

2b L'angle de r est $\arccos(5/13)$.

2c Les coordonnées dans (x_0, B) du point fixe de r sont $(-1, 7/4)$.

3 La droite fixe de s est la droite passant par le point $x + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (les vecteurs sont donnés en coordonnées dans B).

4b Les coordonnées d'un vecteur directeur de $\ker(\sigma - \text{Id})$ dans B sont par exemple $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4c **ERRATUM** : s est une symétrie glissée pour $a \neq 3$. Son axe passe par le point de coordonnées $\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 9a+3 \end{pmatrix}$ dans le repère (x, B) .

Feuille 6

1b On note $\mathcal{R} = (x_0, B)$. L'axe de f est dirigé par le vecteur unitaire \vec{e}_1 dont les coordonnées dans B sont $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et le vecteur de f est $\frac{a+b}{2}\vec{e}_1$.

L'axe de f passe par le point de coordonnées $\left(0, \frac{2(b-a)+2c}{4}, \frac{c}{2}\right)$ dans \mathcal{R} .

1c L'angle de f est au signe près $\pm \arccos(-1/3)$; si on oriente l'axe par \vec{e}_1 (et E par B) l'angle est $-\arccos(-1/3)$.

2a Le plan fixe de σ est engendré par les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans B .

2b Le vecteur de s a pour coordonnées dans B :

$$\frac{3}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

L'axe de S passe par le point de coordonnées $(5/2, 0, 0)$ dans (x_0, B) .

3b La matrice de $\rho_\theta \circ \rho$ dans B est :

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

L'angle au signe près de $\rho \circ \rho_\theta$ est égal à :

$$\arccos\left(\frac{1}{2}(\cos \theta - 1)^2 - 2\right).$$