

EXAMEN PARTIEL, GÉOMÉTRIE II

CORRIGÉ

Problème I

Question (1) Comme $y \in f(\mathcal{E})$ il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$. On a alors :

$$x' \in f^{-1}(\{y\}) \Leftrightarrow f(x') = f(x) \Leftrightarrow \overrightarrow{f(x)f(x')} = 0 \Leftrightarrow \phi(\overrightarrow{xx'}) = 0$$

donc $f^{-1}(\{y\})$ est un sous-espace affine de direction $\ker(\phi)$. En particulier il est de dimension

$$\dim(f^{-1}(\{y\})) = \dim(\ker(\phi)) = e.$$

Soit $x \in \mathcal{E}$. Tout $x' \in \mathcal{E}$ peut s'écrire sous la forme $x' = x + \overrightarrow{v}$ pour un $\overrightarrow{v} \in E$ et on a alors $f(x') = f(x) + \phi(\overrightarrow{v})$. Il suit que :

$$f(\mathcal{E}) = f(x) + \text{im}(\phi)$$

et $f(\mathcal{E})$ est donc un sous-espace affine de direction $\text{im}(\phi)$ et de dimension

$$\dim(f(\mathcal{E})) = \dim(\text{im}(\phi)) = d - e.$$

Question (2.a) Soit $y = x + \overrightarrow{v}$. Comme $\overrightarrow{v} \in F$ on a $y \in \mathcal{F}$, il faut voir en plus que $y \in \mathcal{F}'$. Pour ceci on écrit :

$$\overrightarrow{x'y} = \overrightarrow{x'x} + \overrightarrow{xy} = -(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{w} \in F'$$

d'où il suit que $y \in \mathcal{F}'$.

Question (2.b) Soient $x \in \mathcal{F}$ et $x' \in \mathcal{F}'$. Comme $E = F \oplus F'$ on peut écrire $\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in F, \overrightarrow{w} \in F'$ et il suit d'après la question précédente que $x + \overrightarrow{v} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$. En particulier ce dernier est non-vide, donc un sous-espace affine de direction $F \cap F'$. Sa dimension est donc 0 puisque $F \cap F' = \{0\}$.

Problème II

Question (1.a) Supposons que $\pi \circ \pi = \pi$. Si $\overrightarrow{v} \in E$ on a alors :

$$\pi(\overrightarrow{v} - \pi(\overrightarrow{v})) = \pi(\overrightarrow{v}) - \pi \circ \pi(\overrightarrow{v}) = 0,$$

c'est-à-dire que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} - \pi(\overrightarrow{v}) \in \ker(\pi)$. Comme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} + \pi(\overrightarrow{v}) \in \ker(\pi) + \text{im}(\pi)$ on en déduit que $E = \ker(\pi) + \text{im}(\pi)$. D'autre part, si $\overrightarrow{v} \in \ker(\pi) \cap \text{im}(\pi)$ il existe un $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{v} = \pi(\overrightarrow{u})$ et il vient

$$0 = \pi(\overrightarrow{v}) = \pi(\pi(\overrightarrow{u})) = \pi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$$

donc $\ker(\pi) \cap \text{im}(\pi) = \{0\}$.

Réciproquement, si $E = \ker(\pi) \oplus \text{im}(\pi)$ et $\pi(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$ pour tout $\overrightarrow{w} \in \text{im}(\pi)$ alors en décomposant $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{u} \in \ker(\pi)$ et $\overrightarrow{w} \in \text{im}(\pi)$ on voit que :

$$\pi(\pi(\overrightarrow{v})) = \pi(\pi(\overrightarrow{u}) + \pi(\overrightarrow{w})) = \pi(\pi(\overrightarrow{w})) = \overrightarrow{w}$$

donc $\pi \circ \pi = \pi$.

Question (1.b) La deuxième condition donne que $\text{im}(\pi) \subset \ker(\pi - \text{Id})$. On a toujours $\ker(\pi - \text{Id}) \subset \text{im}(\pi)$ (c'est valable pour tout sous-espace propre) et l'égalité suit.

Question (2.a) Le sous-espace $\ker(\pi)$ est stable par π et d'après la question précédente c'est un supplémentaire dans E à $\ker(\pi - \text{Id})$. Par un résultat de cours il suit que p a un point fixe si et seulement si $\overrightarrow{xp(x)} \in \ker(\pi)$.

On va donner aussi une preuve directe dans ce cas particulier : on vérifie facilement que $\text{im}(\pi - \text{Id}) = \ker(\pi)$ et on a

$$\exists x_0 : p(x_0) = x_0 \Leftrightarrow \exists x_0 : \overrightarrow{xp(x)} = \overrightarrow{xx_0} - \pi(\overrightarrow{xx_0}) \Leftrightarrow \exists \vec{v} : \overrightarrow{xp(x)} = (\text{Id} - \pi)(\vec{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{xp(x)} \in \text{im}(\pi - \text{Id}) = \ker(\pi).$$

Question (2.b) S'il est non-vide l'ensemble des points fixes est un sous-espace affine de direction $\ker(\pi - \text{Id})$. D'après la question précédente c'est le cas si $\overrightarrow{xp(x)} \in \ker(\pi)$ et si x_0 est un point fixe on a alors $x_0 = p(x_0)$ et donc $x_0 \in p(\mathcal{E})$. Comme on a d'autre part $\ker(\pi - \text{Id}) = \text{im}(\pi)$ il suit que l'ensemble des points fixes est égal à :

$$p(x) + \{\pi(\vec{v}) : \vec{v} \in E\} = \{p(x + \vec{v}) : \vec{v} \in E\} = p(\mathcal{E}).$$

Question (3) La partie linéaire de $p \circ p$ est égale à $\pi \circ \pi = \pi$. Donc $p \circ p = p$ si et seulement s'il existe un $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que $p(p(x_0)) = p(x_0)$. Si un tel point existe alors $p(x_0)$ est un point fixe de p . Réciproquement, si x_0 est un point fixe de p alors $p(p(x_0)) = p(x_0)$.

Question (4) On vérifie que $\pi \circ \pi = \pi$ par un calcul matriciel immédiat et que $\overrightarrow{xp(x)} \in \ker(\pi)$. Il suit que p a un point fixe, par exemple $p(x)$ par la question précédente.

D'autre part P est de rang au moins 2 (par exemple le mineur $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4$ est non-nul) il suit que $\dim(\ker(\pi)) = 1$. La direction de l'espace des points fixes est donnée par $\text{im}(\pi)$ et une base de cette dernière est donnée en coordonnées dans B par les deux premières colonnes de P' .

Finalement, un repère pour le plan fixe de p est donné par $(x_0, (\vec{u}, \vec{v}))$ où :

- x_0 est le point de coordonnées $(1, -2, -2)$ dans le repère (x, B) ;
- \vec{u}, \vec{v} sont les vecteurs de coordonnées respectives $(0, 2, 2)$ et $(-2, 5, 4)$ dans B .

Problème III

Question (1) Comme $y' \in (xz)$ c'est un barycentre de x et z et on peut donc écrire ses coordonnées barycentriques sous la forme $(1 - t, 0, t)$ pour un $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De même celles de z' sont de la forme $(1 - s, s, 0)$. On veut montrer que les droites sont parallèles si et seulement si $t = s$.

On a :

$$(1 - t)\overrightarrow{xy'} + t\overrightarrow{zy'} = 0$$

d'où il suit que

$$0 = (1 - t)\overrightarrow{xy'} + t(\overrightarrow{zx} + \overrightarrow{xz'}) = \overrightarrow{xy'} - t\overrightarrow{xz},$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{xy'} = t\overrightarrow{xz}$. De même on obtient que $\overrightarrow{xz'} = s\overrightarrow{xy}$. Les droites $(yz), (y'z')$ sont parallèles si et seulement si \overrightarrow{yz} et $\overrightarrow{y'z'}$ sont colinéaires. D'après ce qui précède on a :

$$\overrightarrow{y'z'} = \overrightarrow{y'x} + \overrightarrow{xz'} = t\overrightarrow{xy} - s\overrightarrow{xz}$$

et les coordonnées de $\overrightarrow{y'z'}$ dans la base $(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz})$ sont donc $(t, -s)$. Celles de \overrightarrow{yz} sont $(1, -1)$ et on voit que les vecteurs sont colinéaires si et seulement si $t = s$.

Question (2.a) La résolution du système donne comme unique solution $(1/2, 1/2, 1/2)$.

Question (2.b) On écrit $y' = (1 - t, 0, t)$, $z' = (1 - s, s, 0)$ et $x' = (0, u, 1 - u)$. D'après la question précédente on a $s = t$ ((yz) et $(y'z')$ sont parallèles), $t = 1 - u$ ((xy) et $(x'y')$ sont parallèles) et $s = u$ ((xz) et $(x'z')$ sont parallèles). Il suit que (t, s, u) est une solution du système précédent, donc $t = s = u = 1/2$, c'est-à-dire que les coordonnées barycentriques de x', y', z' sont respectivement $(0, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 0, 1/2)$ et $(1/2, 1/2, 0)$.

Question (3.a) On a $\overrightarrow{x_0 h(x)} = \lambda \overrightarrow{x_0 x}$. Il suit que :

$$0 = \overrightarrow{x_0 h(x)} - \lambda \overrightarrow{x_0 x} = \overrightarrow{x_0 h(x)} - \lambda \overrightarrow{x_0 h(x)} + \overrightarrow{h(x)x} = (1 - \lambda) \overrightarrow{x_0 h(x)} + \lambda \overrightarrow{h(x)x}$$

c'est-à-dire que

$$h(x) = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x.$$

Question (3.b) D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{3}{2}x_0 - \frac{1}{2}x \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \right) - \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}(y + x - x). \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $y + x - x = y$ (on ne peut pas utiliser l'associativité vu que $1 - 1 = 0$). C'est évident d'après la définition : $\overrightarrow{yx'} + \overrightarrow{xx'} - \overrightarrow{xx'} = 0$ revient à $\overrightarrow{yx'} = 0$.

Le même calcul donne le résultat pour $h(y)$ et $h(z)$.

Question (3.c) Comme h est affine et les coordonnées barycentriques aussi il existe des coefficients $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 3$ tels que

$$h(t_1x + t_2y + t_3z) = \left(\left(\sum_j a_{1,j} t_j \right) x, \dots \right).$$

En utilisant l'égalité

$$h(x) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

obtenue à la question précédente on voit que $a_{1,1} = 0$ et $a_{1,2} = a_{1,3} = 1/2$. On calcule les autres coefficients de la même manière et on obtient au final :

$$h(t_1x + t_2y + t_3z) = \left(\frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3 \right) x + \left(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_3 \right) y + \left(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 \right) z.$$