

EXAMEN FINAL, GÉOMÉTRIE II

MARDI 10 MAI 2016

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés pendant toute la durée de l'épreuve. **La qualité de rédaction entrera pour une part substantielle dans la notation.** Tout énoncé du cours utilisé doit être énoncé clairement. Le barème donné n'est qu'indicatif. Dans la suite \mathbb{R}^d est toujours muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien orienté.

Problème 1 (4 points)

Question (1) Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ et s l'application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par :

$$s(x, y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \right)$$

Vérifier que s est une isométrie de \mathcal{E} , déterminer son type et donner ses caractéristiques géométriques.

Question (2) Soit r l'application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par :

$$r(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \right)$$

Montrer que r est une rotation dont on donnera l'angle et le centre.

Question (3.a) Soit :

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2 + (3\sqrt{2} - 4)x + (\sqrt{2} - 4)y + 6 - 4\sqrt{2}.$$

Calculer $f(r(x, y))$.

Question (3.b) Indiquer la nature de la conique $C = f^{-1}(\{0\})$ et la dessiner en indiquant les axes de coordonnées.

Question (3.c) Donner une paramétrisation de C (on pourra commencer par paramétrer $r(C)$).

Problème 2 (5 points)

Question (1) Soient $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, $y = (0, 0)$ et $z = (1, 0)$. Donner le point $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{E}$ tel que $x_2 > 0$ et les angles en x et y du triangle $\{x, y, z\}$ sont respectivement égaux à $2\pi/3, \pi/6$.

Question (2) Soient s_1, s_2, s_3 les symétries d'axes respectifs $(yz), (xy)$ et (xz) . Ecrire les rotations r_1, r_2 d'angle $\pi/3$ et de centres respectifs y et z comme composées de s_1, s_2 et s_3 .

Question (3.a) En utilisant la question précédente montrer que $r_3 = r_1 \circ r_2$ est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

Question (3.b) Montrer que $r_3 \circ r_2^{-2}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

Question (4) On identifie \mathcal{E} à \mathbb{C} via $(t_1, t_2) \mapsto t_1 + it_2$. Donner des expressions en nombres complexes pour r_1 et r_3 .

Question (5.a) Montrer que les points $r_1^n(x)$ pour $n \geq 0$ sont les sommets d'un polygone régulier (dont on précisera le nombre de sommets).

Question (5.b) En utilisant la question précédente décrire le groupe engendré par r_1 et s_2 .

Problème 3 (5 points)

Question (1) Soit r l'application affine $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$r(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4x_1 + x_2 + 8x_3 + 6}{9}, \frac{7x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 6}{9}, \frac{-4x_1 + 8x_2 + x_3 + 6}{9} \right)$$

Montrer que r est un vissage et donner son angle, son axe et son vecteur.

Question (2) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soient $\vec{v}, \vec{u} \in E$ non nuls et orthogonaux l'un à l'autre et soient ρ, η les rotations d'axes respectifs $\mathbb{R}\vec{v}, \mathbb{R}\vec{u}$ et d'angle π . Montrer que $\rho \circ \eta = \eta \circ \rho$ est une rotation d'angle π dont on précisera l'axe (*Indication : utiliser une base adaptée à ρ et η*).

Question (3.a) Soit $\vec{w} \in E$ un vecteur non nul orthogonal à \vec{v} et \vec{u} et $o \in \mathcal{E}$. Soient r et h les vissages d'axes respectifs $o + \mathbb{R}\vec{v}$ et $o + \vec{w} + \mathbb{R}\vec{u}$ et de vecteurs \vec{v} et \vec{u} . Montrer que $r(x) = o + \vec{v} + \rho(\vec{ox})$ et que $h(x) = o + 2\vec{w} + \vec{u} + \eta(\vec{ox})$.

Question (3.b) Montrer que $r \circ h$ est le vissage d'angle π , d'axe $o + \frac{\vec{v}-\vec{u}}{2} + \mathbb{R}\vec{w}$ et de vecteur $2\vec{w}$.

Question (3.c) Soient \mathcal{E} un espace affine de direction E et r, h deux applications affines de partie linéaires respectives ρ, η . Est-ce-que r et h commutent nécessairement l'une à l'autre (on justifiera la réponse) ?

Problème 4 (7 points)

Les deux parties sont indépendantes si l'on admet le résultat de la question (3) pour traiter la deuxième.

Première partie

Question (1.a) Calculer la racine positive a du polynôme $X^2 + X - 1$.

Question (1.b) Montrer que si $b = -a - 1$ alors on a la factorisation sur \mathbb{R} : $X^4 + X^3 + X^2 + 1 = (X^2 - aX + 1)(X^2 - bX + 1)$.

Question (1.c) Dédurre de la question précédente que $a = 2 \cos(2\pi/5)$ (on pourra commencer par factoriser $(X^5 - 1)$ sur \mathbb{C}).

Question (2) Soient R la matrice :

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & -a-1 & 1 \\ a+1 & 1 & a \\ -1 & a & a+1 \end{pmatrix}$$

et ρ l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est R .

Question (2.a) Montrer que ρ est une rotation d'angle $2\pi/5$ et d'axe $D = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix}$.

Question (2.b) Donner des expressions pour R^2, R^3 et R^4 dont les coefficients sont des polynômes de degré 1 en a (on pourra calculer R^2 puis utiliser les relations $R^5 = 1$ et $R^{-1} = {}^tA$).

Question (3) Soit $o = (0, 0, 0)$. Vérifier que les points :

$$\begin{aligned} x_1 &= (2, 0, 0), x_2 = (a, a+1, -1), x_3 = (-a-1, 1, -a), \\ x_4 &= (-a-1, -1, a), x_5 = (a, -a-1, 1) \end{aligned}$$

vérifient $\rho^i(\overrightarrow{ox_1}) = \overrightarrow{ox_i}$ pour $i = 1, \dots, 5$. En déduire qu'ils sont coplanaires et qu'ils forment un pentagone régulier.

Deuxième partie

Question (4) Montrer qu'il existe exactement deux points $x_6 \neq x_7 \in \mathcal{D} = o + D$ tels que $d(x_i, x_6) = d(x_i, x_7) = d(x_1, x_2)$ pour $i = 1, \dots, 5$ (on pourra remarquer que $d(x_1, o)$ est strictement inférieur à la longueur d'un côté du pentagone formé par les x_i , puis utiliser le théorème des valeurs intermédiaires).

Question (5.a) Soit \mathcal{C} le polyèdre de sommets x_1, \dots, x_7 . Sans justifier en détail décrire les faces de \mathcal{C} et vérifier que chacune est un triangle équilatéral.

Question (5.b) Est-ce-que \mathcal{C} est régulier ?

Question (5.c) En utilisant la formule d'Euler donner le nombre d'arêtes de \mathcal{C} .

Question (5.d) Quel est le cardinal du groupe d'isométries préservant \mathcal{C} ?

Question (6) Calculer l'angle dièdre entre deux faces adjacentes de \mathcal{C} contenant toutes deux le sommet x_6 .

Question TP (1 point)

Soit `s` la fonction Python définie par :

```
def s(x) :  
    return (-x[0], x[1])
```

et `h`, `t` définies pareillement avec les formules $(2x[0], 2x[1])$ et $(x[0]+1, x[1]+1)$. On définit une fonction `m` par (on rappelle que si `a`, `b` sont des entiers `a/b` renvoie le reste de la division euclidienne de `a` par `b`) :

```
def m(n, x, b = 0) :  
    if n == 0 :  
        return x  
    else :  
        q = n/2  
        r = n - 2*q  
        if r == 0 and b == 0 :  
            return m(q, h(x), 1)  
        elif r == 0 and b == 1 :  
            return m(q, s(x), 0)  
        else :  
            return m(q, t(x), b)
```

Soit $P = [(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)]$. Dessiner (en indiquant les axes de coordonnées) les points contenus dans les listes `[m(7, x, 0) for x in P]` et `[m(17, x, 0) for x in P]` (on tracera le segment entre deux points consécutifs).