

EXAMEN FINAL, GÉOMÉTRIE II

CORRIGÉ

Problème I

Question (1) La matrice de la partie linéaire ρ de r dans la base canonique B de \mathbb{R}^2 est :

$$\text{Mat}_B(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

dont on voit immédiatement qu'elle est orthogonale puisque la norme de chaque colonne vaut 1 et leur produit scalaire 0. De plus

$$\det(\rho) = \frac{1}{4}((-1)^2 + (\sqrt{3})^2) = 1$$

et on voit donc que ρ est une isométrie directe. Comme $\rho \neq \text{Id}$ l'application affine r est donc forcément une rotation.

Soit θ l'angle de r . Comme la base canonique est directe pour l'orientation canonique de \mathbb{R}^2 on a

$$\cos(\theta) = -1/2, \sin(\theta) = \sqrt{3}/2$$

et on voit donc que $\theta = 2\pi/3$.

Le centre de r est la solution du système :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_1 - \sqrt{3}x_2 + 4 \\ \sqrt{3}x_1 - x_2 + 4 \end{pmatrix}$$

pour lequel on trouve comme unique solution :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}.$$

Question (2) Soient s_1 la symétrie d'axe (xx'') , s_2 la symétrie d'axe (xx') et s_3 la symétrie d'axe $x'x''$. Comme $r \circ r' = r''$ on a $r = s_1 \circ s_2$ et $r' = s_2 \circ s_3$: en effet, on peut écrire $r = s \circ s_2$ avec s une symétrie d'axe passant par x et $r' = s_2 \circ s'$ avec s' une symétrie d'axe passant par x' . Le point d'intersection des axes de s et s' doit alors être égal à x'' , d'où il suit que ces axes sont respectivement (xx'') et $(x'x'')$, c'est-à-dire $s = s_1$ et $s' = s_3$.

Comme r est d'angle $2\pi/3$ l'angle $(\overrightarrow{xx'}, \overrightarrow{xx''})$ est égal à $\pi/3$. On a aussi $r'' = s_1 \circ s_3$ et comme r'' est d'angle π l'angle $(\overrightarrow{x''x}, \overrightarrow{x''x'})$ vaut $\pi/2$. Il suit que l'angle $(\overrightarrow{x'x''}, \overrightarrow{x'x})$ vaut $\pi - \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$.

On a $r' = s_2 \circ s_3$, d'après ce qui précède r' a donc pour angle $\pi/3$.

Question (3) L'angle $(\overrightarrow{x''x'}, \overrightarrow{x''x})$ vaut $-\pi/2$ d'après la question précédente). On a donc $x' \in x'' + \mathbb{R}_-(0, 1)$ puisque $(0, 1)$ est l'image de $\overrightarrow{x''x} = (-1, 0)$ par la rotation d'angle $-\pi/2$.

On a donc $x' = x'' + (0, -\ell \sin(\pi/3))$ où $\ell = d(x, x')$. On a aussi $\ell \cos(\pi/3) = d(x, x'') = 1$ et il suit donc que $\ell = 2$, autrement dit

$$x' = x'' + (0, \sqrt{3}) = \left(\frac{6 - \sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \right).$$

Problème II

Question (1) On vérifie que ρ est une isométrie : on a

$$4 \times (-8) + 4 + 7 \times 4 = 0, -4 + 4 \times 8 - 7 \times 4 = 0, 8 + 8 - 4 \times 4 = 0$$

donc les colonnes sont deux à deux orthogonales, et

$$4^2 + 4^2 + 7^2 = 81 = 9^2, 8^2 + 1 + 4^2 = 81$$

donc les colonnes sont de norme 1.

On sait que ρ est directe si et seulement si $\ker(\rho - \text{Id})$ est de dimension 1 (ou 3, mais ce n'est évidemment pas le cas ici puisque $\rho \neq \text{Id}$). Le calcul de $\ker(\rho - \text{Id})$ se ramène à la résolution du système de matrice

$$\begin{pmatrix} -5 & -8 & -1 \\ 4 & -8 & 8 \\ -7 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

qui se ramène par opérations successives à

$$\begin{pmatrix} -5 & -8 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le noyau est donc engendré par $(2, -1, -2)$, en particulier il est de dimension 1. Enfin, on $\text{tr}(\rho) = (4 + 1 + 4)/9 = 1$ et il suit que l'angle θ de ρ satisfait $\cos(\theta) = 0$, donc $\theta = \pi/2$.

Pour conclure : ρ est une rotation d'axe $\mathbb{R}(2, -1, -2)$ et d'angle au signe près $\pi/2$.

Question (2) Le vecteur $\overrightarrow{or(o)}$ apour coordonnées $(2, 2, 1)$ et on voit donc qu'il est orthogonal à l'axe $\ker(\rho - \text{Id})$ de ρ puisque

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 - 2 - 2 = 0.$$

Il suit que r a un point fixe, donc que c'est une rotation.

Pour déterminer l'axe on résout $r(x) = x$, ce qui revient à

$$(\rho - \text{Id})(\overrightarrow{ox}) = -\overrightarrow{or(o)}$$

(en effet $r(x) = r(o) + \rho(\overrightarrow{ox}) = o + \overrightarrow{or(o)} + \rho(\overrightarrow{ox})$ donc $r(x) = x$ revient à $\overrightarrow{ox} = \overrightarrow{or(o)} + \rho(\overrightarrow{ox})$). Ceci donne le système

$$\begin{pmatrix} -5 & -8 & -1 \\ 4 & -8 & 8 \\ -7 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ -9 \end{pmatrix}$$

qui en appliquant les mêmes opérations que pour le calcul de $\ker(\rho - \text{Id})$ devient

$$\begin{pmatrix} -5 & -8 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où on déduit que l'axe de r est la droite :

$$\{(0, 9/4, 0) + (2t, -t, -2t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

de direction $\ker(\rho - \text{Id})$ passant par la point $(0, 9/4, 0)$.

Question (3.a) **Coquille** : il faut lire f à la place de ϕ .

On a $\ker(\rho^2 - \text{Id}) = \ker(\rho - \text{Id})$: en effet ρ^2 est une isométrie directe différente de l'identité (l'angle de ρ n'est pas égal à π) donc $\dim(\ker(\rho^2 - \text{Id})) = 1$, et de plus $\ker(\rho^2 - \text{Id}) \subset \ker(\rho - \text{Id})$, ce qui force l'égalité. On calcule donc le projeté orthogonal de $\overrightarrow{of(o)}$ sur $\ker(\rho - \text{Id})$. On a

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = -9$$

et comme $(2, -1, -2)$ est de norme 9 il suit que $\vec{v} = (-2, 1, 2)$. On voit que \vec{v} est non-nul et f est donc un vissage de vecteur \vec{v} .

On aura besoin de la matrice de ρ^2 : en calculant R^2 on obtient

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -8 \\ -4 & -7 & -4 \\ -8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir l'axe on remarque que

$$\overrightarrow{of(o)} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{or(o)}$$

et pour trouver l'axe il faut donc résoudre le système provenant de $(\rho - \text{Id})(\vec{ox}) = -\overrightarrow{of(o)} + \vec{v}$, qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} -10 & -4 & -8 \\ -4 & -16 & -4 \\ -8 & 4 & -10 \end{pmatrix}, 9 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

ce qui donne après un pivot de Gauss sur la deuxième colonne :

$$\begin{pmatrix} -10 & -4 & -8 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont on déduit que l'axe de f est donné par :

$$\{(3/2 - 2t, 3/4 + t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$$

(on remarque qu'il contient le point $(1, 1, 1/2)$ qui est le milieu de $o, f(o) - \vec{v}$, ce qui est normal vu que $f - \vec{v}$ agit par -1 sur les plans orthogonaux à l'axe).

Enfin, comme on a remarqué plus haut ρ^2 est une rotation d'angle au signe près $2 \times \pi/2 = \pi$. Comme $-\pi = \pi - 2\pi$ cet angle est en fait aussi l'angle signé de ρ^2 .

Question (3.b) Soit P la direction de \mathcal{P} , \vec{u} un vecteur directeur de l'axe de f et $\vec{w} \in P$ orthogonal à $\ker(\rho - \text{Id})$. Soit encore x_0 un point de l'axe de f . Comme cet axe est stable par f on a $f(x_0) \in \mathcal{P}$. De plus $\rho^2(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\rho^2(\vec{w}) = -\vec{w}$, de sorte que $\rho^2(P) = P$. Il suit que

$$f(\mathcal{P}) = f(x_0) + \rho^2(P) = f(x_0) + P = \mathcal{P}.$$

L'application $f|_{\mathcal{P}}$ préserve l'axe de f et renverse la direction orthogonale, c'est donc une symétrie glissée d'axe cette droite et de vecteur \vec{v} .

Problème III

Question (1) Le groupe d'isométrie G de \mathcal{T} fixe cet isobarycentre vu qu'il préserve les sommets. De plus c'est le seul point $x \in \mathcal{E}$ tel que $gx = x$ pour tout $g \in G$, puisque \mathcal{T} est régulier et il existe donc deux rotations d'axes distincts dans G , dont l'intersection des axes est au plus un point.

Question (2.a) Comme $x'_1 \in (x_1x_0)$ on peut écrire $x'_1 = tx_1 + (1-t)x_0$. En utilisant l'associativité du barycentre il vient

$$x'_1 = \left(t + \frac{1-t}{4}\right)x_1 + \frac{1-t}{4}x_2 + \frac{1-t}{4}x_3 + \frac{1-t}{4}x_4.$$

Les points (x_1, x_2, x_3, x_4) forment une base affine de \mathcal{E} . Comme x'_1 est dans le plan engendré par x_2, x_3, x_4 sa coordonnée barycentrique sur x_1 est nulle. Il suit que $t + (1-t)/4 = 0$, autrement dit $t = -1/3$ et $(1-t)/4 = (4/3)/4 = 1/3$, de sorte que

$$x'_1 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

est bien l'isobarycentre de x_2, x_3, x_4 .

Question (2.b) On a vu que $x_1 = (-1/3)x_1 + (4/3)x_0$, c'est-à-dire que

$$\frac{4}{3}\overrightarrow{x_0x_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{x_1x_1} = 0$$

autrement dit $\overrightarrow{x_0x'_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{x_0x_1}$. Il suit que

$$d(x_0, x'_1) = \|\overrightarrow{x_0x'_1}\| = \frac{1}{3}\|\overrightarrow{x_0x_1}\| = \frac{1}{3}.$$

Question (2.c) Soit r la rotation d'axe orienté (x_0x_1) et d'angle $2\pi/3$. Alors r permute les sommets x_2, x_3, x_4 et donc préserve le plan \mathcal{P} qu'ils engendrent. Comme ce plan ne contient pas l'axe (x_0x_1) il lui est forcément orthogonal (les sous-espaces stables d'une isométrie vectorielle sont deux à deux orthogonaux).

Question (3) Le triangle $\{x_0, x'_1, x_2\}$ est rectangle en x'_1 d'après (2c) et il suit que l'on a :

$$d(x'_1, x_2) = \sqrt{d(x_0, x_2)^2 - d(x_0, x'_1)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

De plus on a $d(x'_1, x_3) = d(x'_1, x_2)$. D'autre part l'angle du triangle $\{x'_1, x_2, x_3\}$ en x'_1 vaut $2\pi/3$ et la loi du cosinus donne :

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3)^2 &= d(x'_1, x_2)^2 + d(x'_1, x_3)^2 - 2d(x'_1, x_2)d(x'_1, x_3)\cos(2\pi/3) \\ &= (2 - 2\cos(2\pi/3))d(x'_1, x_2)^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

et on a donc finalement que la longueur d'une arête est $2\sqrt{6}/3 \approx 1.63$.

Problème IV

Question (1) Soit s cette symétrie. Elle échange x_1 et x_2 . De plus l'angle en x_2 de l'image par s du triangle $\{x_1, x_2, x_4\}$ vaut α , donc ce triangle est égal à $\{x_2, x_1, x_5\}$ (ils partagent le côté $[x_1x_2]$, l'angle en x_2 —les deux valent α —ainsi que la longueur du côté adjacent). On a donc $s(x_5) = x_3$, et aussi $s(x_3) = x_5$. Il suit que l'axe de s est aussi la médiatrice de $[x_3x_4]$. Comme le triangle $x_3x_4x_5$

est isocèle en x_4 c'est aussi la médiane issue de x_4 et il suit que $s(x_4) = x_4$. On a montré que s préserve l'ensemble des sommets de \mathcal{C} , donc $s(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Question (2.a) Le quadrilatère convexe de sommets x_1, x_2, x_3, x_5 est symétrique par rapport à la médiatrice de $[x_1x_2]$ d'après (1) et ses angles en x_1, x_2 (respectivement x_3, x_5) sont donc tous deux égaux à α (respectivement β''). Comme la somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 2π on a donc bien que $2\alpha + 2\beta'' = 2\pi$.

Question (2.b) Correction : il faut donner $\cos(\alpha), \cos(\beta)$ en fonction de m et ℓ où $\ell = d(x_3, x_5)$.

La loi du cosinus donne d'une part

$$\cos(\alpha) = \frac{2 - m^2}{2}$$

dans le triangle $x_2x_1x_3$ et aussi

$$\cos(\beta'') = \frac{1 + \ell^2 - m^2}{2\ell}$$

dans le triangle $x_1x_3x_5$.

Question (3) Les deux égalités de (2b) ci-dessus montrent que

$$\cos(\beta'') = \frac{1}{\ell} \left(\frac{2 - m^2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\ell}{2} = \frac{1}{\ell} \left(\cos(\alpha) - \frac{1}{2} \right) + \frac{\ell}{2}.$$

D'autre par on a par (2a) que $\beta'' = \pi - \alpha$, de sorte que $\cos(\beta'') = -\cos(\alpha)$. Il suit que :

$$(-1 - \ell) \cos(\alpha) = -\frac{1}{2} + \frac{\ell^2}{2}$$

soit encore

$$\cos(\alpha) = \frac{1 - \ell^2}{2(\ell + 1)} = \frac{1 - \ell}{2}$$

et

$$\cos(\beta'') = -\cos(\alpha) = \frac{\ell - 1}{2}.$$

Question (4.a) Comme le triangle est isocèle la hauteur issue de x_4 a pour longueur $1 - \ell^2/4$. Il suit que l'aire du triangle vaut

$$A_1 = \frac{\ell}{4} \sqrt{4 - \ell^2}.$$

Question (4.b) Le premier triangle (de sommets x_3, x_5, x_6) est isocèle en x_6 et a pour angles β'', β'' et $\pi - 2\beta''$. Soit ℓ' la longueur du côté $[x_3x_6]$. Par la loi du sinus on a

$$\frac{\ell}{\sin(\pi - 2\beta'')} = \frac{\ell'}{\sin(\beta'')}.$$

D'autre part

$$\sin(\pi - 2\beta'') = \sin(2\beta'') = 2 \sin(\beta'') \cos(\beta'')$$

et on a donc

$$\ell' = \frac{\ell}{2 \cos(\beta'')} = \frac{\ell}{\ell - 1}.$$

La hauteur issue de x_6 a donc pour longueur

$$\sqrt{(\ell')^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \frac{\ell}{2(\ell - 1)} \sqrt{4 - (\ell - 1)^2}$$

et il suit que l'aire du triangle vaut

$$A_2 = \frac{\ell^2}{4(\ell-1)} \sqrt{4 - (\ell-1)^2}.$$

La triangle de sommets x_1, x_2, x_6 est semblable au premier avec un rapport $1/\ell$ par le théorème de Thalès. Il suit que son aire vaut

$$A_3 = \frac{A_2}{\ell^2} = \frac{1}{4(\ell-1)} \sqrt{4 - (\ell-1)^2}.$$

Question (4.c) L'aire du pentagone vaut

$$A_1 + A_2 - A_3 = \frac{\ell}{4} \sqrt{4 - \ell^2} + \frac{\ell^2 - 1}{4(\ell-1)} \sqrt{4 - (\ell-1)^2} = \frac{\ell}{4} \sqrt{4 - \ell^2} + \frac{\ell+1}{4} \sqrt{4 - (\ell-1)^2}.$$