

**EXAMEN FINAL, GÉOMÉTRIE II**  
**JEUDI 7 MAI 2015**  
**DURÉE : 3 HEURES**

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés pendant toute la durée de l'épreuve. **La qualité de rédaction entrera pour une part substantielle dans la notation.** Tout énoncé du cours utilisé doit être énoncé clairement.

Les questions indiquée par un  $*$  sont facultatives (et apportent des points supplémentaires si traitées). Il est possible d'admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Barème indicatif (hors bonus) : problème I : 6 points, problème II : 6 points, problème III : 5 points, problème IV : 5 points.

**Problème I**

*Question (1) (Question de cours)* Soit  $\mathcal{E}$  un plan euclidien et  $T$  un triangle de  $\mathcal{E}$  de sommets  $x, y, z$ . On note  $\ell_x, \ell_y, \ell_z$  les longueurs respectives des segments  $[yz], [zx]$  et  $[xy]$  et  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  les mesures respectives des angles de  $T$  en  $x, y$  et  $z$ .

*Question (1.a)* Définir (comme intersections de certaines droites) le centre du cercle inscrit dans  $T$  et le centre du cercle circonscrit à  $T$ .

*Question (1.b)* Énoncer la loi des cosinus pour  $T$  (on donnera une relation entre  $\ell_x, \ell_y, \ell_z$  et  $\theta_x$ ). En donner une démonstration.

*Question (1.c)* On notera  $R$  le rayon du cercle circonscrit à  $T$ . Énoncer la loi des sinus pour  $T$ .

*Question (2)* Soit  $\ell$  la racine  $> 1$  du polynôme  $X^2 - X - 1$ . Calculer  $\ell$ .

Dans la suite on notera  $T$  le triangle de sommets  $x, y, z$  tel que  $d(x, y) = \ell = d(x, z)$  et  $d(y, z) = 1$  et  $\alpha, \beta, \gamma$  les mesures respectives des angles de  $T$  en  $x, y, z$ .

*Question (3.a)* Montrer que  $\beta = \gamma$ .

*Question (3.b)* Calculer  $\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz} \rangle$  en fonction de  $\ell$  (*indication : développer  $\|yz\|^2$* ).

*Question (3.c)* Soit  $p = x + \ell^{-1}\overrightarrow{xz}$ . Montrer que  $d(y, p) = 1$  et que  $d(z, p) = \ell^{-1}$ .

*Question (3.d)* Dédurre de la question précédente que le triangle de sommets  $y, z, p$  est similaire à  $T$  et isocèle en  $y$ .

*Question (3.e)* Montrer que  $2\beta + \alpha = \pi$  et que  $2\alpha + \pi - \beta = \pi$  (*indication : le triangle de sommets  $p, x, y$  est isocèle en  $p$* ). En déduire que  $\alpha = \pi/5$ .

*Question (3.f)* En utilisant la loi du cosinus et les questions précédentes, calculer  $\cos(\pi/5)$  et  $\cos(2\pi/5)$ .

## Problème II

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien de dimension 3 et  $E$  son espace directeur. Soit  $R$  la matrice donnée par

$$R = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Question (1.a)* Soit  $\rho$  une application linéaire  $E \rightarrow E$  dont la matrice dans une base orthonormée de  $E$  est égale à  $R$ . Montrer que  $\rho$  est une isométrie.

*Question (1.b)* Soit  $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base orthonormée de  $E$  et  $\rho$  l'application linéaire telle que  $\text{Mat}_B(\rho) = R$ . Donner (en coordonnées dans  $B$ ) une base de  $\ker(\rho - \text{Id})$ .

*Question (1.c)* Montrer que  $\rho$  est une rotation de  $E$  et donner son angle au signe près.

*Question (2.a)* On se donne un point  $x \in \mathcal{E}$ . Soit  $r$  l'application affine  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  dont la partie linéaire est  $\rho$  et telle que  $r(x) = x + 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ . Donner les coordonnées dans le repère  $(x, B)$  du point  $r(x + y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3)$ .

*Question (2.b)* Montrer que  $r$  est une rotation.

*Question (2.c)* Calculer la droite fixe de  $r$  (on en donnera un point et la direction).

*Question (2.d)* Soit  $\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$  et  $t$  la translation de vecteur  $\vec{v}$ . Soit  $g$  la composée  $t \circ r$ . Montrer que  $g$  est une visée et donner son axe et son vecteur.

*Question (3)\** Soit  $h$  l'application affine fixant le point de  $x + 3\vec{e}_1/4 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$  et dont la partie linéaire est  $-\text{Id}$ . Quel est le type de l'isométrie  $h \circ g$ ? A-t-elle un point fixe? Si oui donner ses coordonnées dans le repère  $(x, B)$  (*indication : montrer que le point fixe de  $h$  est fixé par  $r$* ).

### Problème III

Soit  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$  muni de sa structure naturelle de plan affine euclidien. Pour  $t \in \mathbb{R}$  soit  $C_t$  la conique de  $\mathcal{E}$  donnée par son équation cartésienne dans le repère canonique :

$$C_t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (3t + 4) \cdot x_1^2 - 6\sqrt{3}t \cdot x_1x_2 + (5t + 8) \cdot x_2^2 - 1 = 0\}.$$

*Question (1.a)* Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 3t + 4 & -3\sqrt{3}t \\ -3\sqrt{3}t & 5t + 8 \end{vmatrix}.$$

*Question (1.b)* Quel est le type de  $C_t$  pour  $t = -1, 0, 1, 10^6$ ?

*Question (1.c)* Quel est le centre de  $C_t$  (dans les cas où elle n'est pas une parabole)?

La suite est consacrée à l'étude de la conique  $C_t$  pour  $t = 1$ ; on notera  $C = C_1$  pour le reste du problème.

*Question (2.a)* Donner des coordonnées  $(y_1, y_2)$  (en fonction de  $x_1, x_2$ ) pour lesquelles l'équation de  $C$  s'écrit  $a_1y_1^2 + a_2y_2^2 - 1 = 0$  (on déterminera aussi  $a_1$  et  $a_2$ ).

*Question (2.b)* Donner les équations en les coordonnées  $x_1, x_2$  des axes de  $C$ , et pour chacun un point et un vecteur directeur.

*Question (3.a)* Calculer l'excentricité de  $C$ .

*Question (3.b)* \* Donner, en coordonnées dans  $\mathcal{R}$  puis dans le repère canonique, un foyer et la directrice associée de  $C$ .

## Problème IV

*Question (1)* Décrire le groupe diédral  $D_{10}$  (groupe d'isométries d'un pentagone régulier  $\mathcal{C}_{\text{reg}}$ ). On donnera une liste de ses éléments (rotations, symétries).

Dans la suite on fixe un pentagone  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire un polyèdre convexe ayant exactement cinq sommets que l'on notera  $x_1, \dots, x_5$ . On suppose qu'il existe une rotation non-triviale  $r$  telle que  $r(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ . On a alors  $r(x_i) \in \{x_1, \dots, x_5\}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, 5\}$  ( $r$  préserve les sommets de  $\mathcal{C}$ ). On notera  $\sigma$  la permutation de  $\{1, \dots, 5\}$  telle que  $r(x_i) = x_{\sigma(i)}$ .

*Question (2.a)* Montrer que si  $r^2 = \text{Id}$  alors  $r$  a nécessairement un point fixe, et en déduire que dans ce cas on a  $r = \text{Id}$ .

*Question (2.b)* En déduire que si la décomposition en cycles de  $\sigma$  contient un cycle d'ordre 2 alors  $r = \text{Id}$  (*indication : montrer que  $r^2$  a un point fixe*), puis que si elle contient un cycle d'ordre 4 alors  $r = \text{Id}$ .

*Question (2.c)* En utilisant la question précédente, montrer que si la décomposition en cycles de  $\sigma$  contient un cycle d'ordre trois alors  $r = \text{Id}$ .

*Question (2.d)* Conclure que toute rotation non-triviale préservant  $\mathcal{C}$  doit être d'ordre 5, puis que si  $G_{\mathcal{C}}$  contient une rotation non-triviale alors  $\mathcal{C}$  est régulier.

*Question (3)* En utilisant les deux questions précédentes, énumérer les possibilités pour le groupe d'isométries d'un pentagone.