

**FEUILLE D'EXERCICES n° 6 :  
GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE**

1. ISOMÉTRIES

**Exercice 1**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres réels et soit  $f$  l'application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  donnée, dans un certain repère orthonormé  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{E}$ , par la formule :

$$f(x, y, z) = (x/3 + 2y/3y - 2z/3 - +a, 2x/3 + y/3 + 2z/3 + b, 2x/3 - 2y/3 - z/3 + c).$$

(1.a) Montrez que  $f$  est une isométrie directe.

(1.b) Déterminer l'axe et le vecteur de  $f$ . Pour quelles valeurs de  $(a, b, c)$  l'application  $f$  est-elle une rotation ?

(1.c) Déterminer l'angle de  $f$  au signe près. Déterminer le signe de ce dernier pour chaque orientation l'axe de  $f$ .

**Exercice 2**

Soit  $\sigma$  l'application linéaire  $E \rightarrow E$  dont la matrice dans une base orthonormée  $B = (e_1, e_2, e_3)$  est :

$$\text{Mat}_B(\sigma) = \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & -3/7 \\ -2/7 & 3/7 & -6/7 \\ -3/7 & -6/7 & -2/7 \end{pmatrix}.$$

(2.a) Montrer que  $\sigma$  est une réflexion vectorielle, calculer son plan fixe  $\ker(\sigma - \text{Id})$ .

(2.b) Soit  $x_0 \in \mathcal{E}$  et soit  $s$  l'application affine de  $\mathcal{E}$  dans lui-même de partie linéaire  $\sigma$  et telle que  $s(x) = x + e_1 + 2e_2$ . Montrer que  $s$  est une symétrie glissée, calculer son vecteur et son plan stable.

**Exercice 3**

(3.a) Soit  $B = (e_1, e_2, e_3)$  une base orthonormale directe de  $E$ . Pour  $\theta \in ]0, \pi[$  on note  $B_\theta$  la base

$$(\cos(\theta)e_1 - \sin(\theta)e_2, \sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2, e_3).$$

Montrer que c'est aussi une base orthonormée directe de  $E$ .

(3.b) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et soient  $\rho, \rho_\theta$  les applications linéaires  $E \rightarrow E$  déterminées par  $\text{Mat}_B(\rho) = A$  et  $\text{Mat}_{B_\theta}(\rho_\theta) = A$ .

Montrer que  $\rho_\theta \circ \rho$  est une rotation et calculer son angle (au signe près) en fonction de  $\theta$ .

**Exercice 4**

Soient  $r, r'$  deux rotations d'axes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  tels que  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{x_0\}$ . Montrer que  $r \circ r'$  est une rotation dont l'axe  $\mathcal{D}''$  passe par  $x_0$ , et donner une construction géométrique de  $\mathcal{D}''$ .

## 2. POLYÈDRES

### Exercice 5

Montrer directement que si  $\mathcal{C}$  est un polyèdre régulier alors ses faces sont des polygones réguliers.

### Exercice 6

(6.a) Soit  $\mathcal{P}$  un plan de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{T}$  un triangle équilatéral dans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  la droite orthogonale à  $\mathcal{P}$  passant par le centre de gravité de  $\mathcal{T}$ . Construire un tétraèdre régulier dont l'une des faces est  $\mathcal{T}$  et dont le sommet hors de cette face est sur  $\mathcal{D}$ .

(6.b) Construire un cube ; montrer que si  $\mathcal{C}$  est l'enveloppe convexe des centres des faces de ce cube alors  $\mathcal{C}$  est un octaèdre régulier.

(6.c) Soit  $\mathcal{C}$  un dodécaèdre régulier ; montrer que si  $\mathcal{C}'$  est l'enveloppe convexe des centres des faces de  $\mathcal{C}$  alors  $\mathcal{C}'$  est un icosaèdre régulier.

(6.d) Que sont les polyèdres engendrés par les centres des faces d'un tétraèdre, d'un octaèdre et d'un dodécaèdre ?

### Exercice 7

(7.a) En utilisant les groupes d'isométries, montrer que tout polyèdre régulier  $\mathcal{C}$  est inscrit dans une sphère (c'est-à-dire qu'il existe un point de  $\mathcal{E}$  dont tous les sommets de  $\mathcal{C}$  sont à égale distance).

(7.b) Calculer la longueur d'une arête d'un cube inscrit dans une sphère de rayon 1. Même question pour un tétraèdre et un octaèdre.

### Exercice 8

Calculer les angles dièdres des polyèdres réguliers : plus précisément, étant donné un polyèdre régulier  $\mathcal{C}$  et deux faces adjacentes  $F, F'$  de  $\mathcal{C}$ , montrer que la mesure de l'angle dièdre entre (les demi-plans déterminés par)  $F$  et  $F'$  vaut :

- $\pi/2$  si  $\mathcal{C}$  est un cube ;
- $\arccos(2/3)$  si  $\mathcal{C}$  est un tétraèdre ;
- $\arccos(-2/3)$  si  $\mathcal{C}$  est un octaèdre ;
- $\arccos(-\sqrt{5}/5)$  si  $\mathcal{C}$  est un dodécaèdre

(pour le dernier cas on pourra utiliser l'égalité  $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$ ).

### Exercice 9

Soit  $\mathcal{C}$  un tétraèdre régulier dont les arêtes sont de longueur 1.

(9.a) On fixe un sommet  $x$  de  $\mathcal{C}$ . Calculer les produits scalaires  $\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy'} \rangle$  pour  $y, y' \neq x$  des sommets de  $\mathcal{C}$ .

(9.b) En déduire que si  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont les sommets de  $\mathcal{C}$  et  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, 2, 3, 4\}$  il existe une isométrie  $g \in G_{\mathcal{C}}$  telle que  $g(x_i) = x_{\sigma(i)}$ .

(9.c) Montrer (sans utiliser que  $|G_{\mathcal{C}}| = 24$ ) que  $G_{\mathcal{C}}$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_4$ , et le sous-groupe des rotations à  $\mathfrak{A}_4$ .

### Exercice 10

Calculer le volume de l'octaèdre régulier inscrit dans une sphère de rayon 1 (voir l'exercice 7).