Université Paul Sabatier
L2 PS Mathématiques

23 octobre 2017
Théorie des Groupes

Examen partiel

Durée : 1h30

Documents, calculatrice ou téléphone interdits. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (5 points) Chaque réponse doit être brièvement justifiée.

a) Donner un exemple de groupe cyclique et expliciter un générateur.

b) Donner, si c'est possible, un exemple d'élément d'ordre 24 dans le groupe symétrique S_{12}.

c) Donner un exemple de groupe G et de deux éléments $a, b \in G$ d'ordre 2 tels que ab soit d'ordre 3.

d) Donner un exemple de groupe G et de deux éléments $a, b \in G$ d'ordre fini tels que ab soit d'ordre infini.

e) Donner un exemple de groupe abélien qui n'est pas monogène.

Exercice 2. (4 points) On considère la permutation $\sigma = (1, 3, 5, 7, 9)(1, 2, 4, 6, 8, 9)$ de S_9.

a) Donner la décomposition de σ en cycles à supports disjoints.

b) Calculer l'ordre de σ et σ^2.

c) Déterminer la permutation $\omega\sigma\omega^{-1}$ avec $\omega = (1, 2)(3, 4, 5)(6, 7, 8, 9)$.

d) Calculer σ^{2017}.

Exercice 3. (7 points)

a) Soit G un groupe dans lequel tous les éléments g vérifient $g^2 = e$. Montrer que G est abélien.

b) Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Donner la démonstration de l'énoncé vu en cours suivant : pour tout $g \in G$ la classe à gauche gH est en bijection avec H.

c) Décrire tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Justifier votre réponse.

Exercice 4. (4 points) Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court (quelques lignes) argument (réponse non justifiée = 0 point !).

a) L'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ sur le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ est transitive. Vrai ou faux ?

b) Il existe un groupe fini G agissant sur un ensemble X de sorte que deux éléments d'une même orbite aient des stabilisateurs de cardinaux différents. Vrai ou faux ?

c) Le groupe symétrique S_4 a 4 classes de conjugaison. Vrai ou faux ?

d) Les groupes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont isomorphes. Vrai ou faux ?