Université Paul Sabatier 23 octobre 2017
L2 PS Mathématiques Théorie des Groupes

Examen partiel

Durée : 1h30

Documents, calculatrice ou téléphone interdits. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (5 points) Justifier en une ou deux phrases chacune des réponses :

a) Donner un exemples de groupe cyclique et expliciter un générateur.

Solution. *Le groupe* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *est cyclique (monogène et d'ordre fini) engendré par* $\bar{1}$.

b) Donner, si c'est possible, un exemple d'élément d'ordre 24 dans le groupe symétrique S_{12}.

Solution. *L'élément* $\sigma = (1,2,3,4,5,6,7,8)(9,10,11)$ *de* S_{12} *est un produit de deux cycles à supports disjoints de longueur* 8 *et* 3. *Donc l'ordre de* σ *est le* $\mathrm{ppcm}(3,8) = 24$.

c) Donner un exemple de groupe G et de deux éléments $a, b \in G$ d'ordre 2 tels que ab soit d'ordre 3.

Solution. *Dans le groupe* S_3 *les éléments* (12) *et* (23) *sont d'ordre* 2 *et leur produit* $(12)(23) = (123)$ *est d'ordre* 3.

d) Donner un exemple de groupe G et de deux éléments $a, b \in G$ d'ordre fini tels que ab soit d'ordre infini.

Solution. *Voir l'exercice 16 b) de la feuille 1.*

e) Donner un exemple de groupe abélien qui n'est pas monogène.

Solution. *Le groupe* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2Z$ *est abélien d'ordre 4 mais aucun de ses éléments est d'ordre 4. Donc ce groupe n'est pas monogène.*

Exercice 2. (4 points) On considère la permutation $\sigma = (1,3,5,7,9)(1,2,4,6,8,9)$ de S_9.

a) Donner la décomposition de σ en cycles à supports disjoints.

Solution. $\sigma = (1,2,4,6,8)(3,5,7,9)$.

b) Calculer l'ordre de σ et σ^2.

Solution. *Dans la décomposition de* σ *en cycles à supports disjoints il y a un cycle de longueur* 5 *et un de longueur* 4. *Donc l'ordre de* σ *est le* $\mathrm{ppcm}(4,5) = 24$.
$\sigma^2 = (1,4,8,2,6)(3,7)(5,9)$ *et donc son ordre est le* $\mathrm{ppcm}(2,2,5) = 10$.

c) Déterminer la permutation $\omega\sigma\omega^{-1}$ avec $\omega = (1,2)(3,4,5)(6,7,8,9)$.

Solution. *En utilisant le résultat du cours sur la conjugaison d'une permutation, on obtient*

$$\omega\sigma\omega^{-1} = (\omega(1), \omega(2), \omega(4), \omega(6), \omega(8))(\omega(3), \omega(5), \omega(7), \omega(9)) = (2,1,5,7,9)(4,3,8,6).$$

d) Calculer σ^{2017}.

Solution. *Les cycles à supports disjoints commutent.*
Donc $\sigma^{2017} = (1,2,4,6,8)^{2017}(3,5,7,9)^{2017} = (1,2,4,6,8)^{5\times 403+2}(3,5,7,9)^{4\times 504+1} = (1,2,4,6,8)^2(3,5,7,9) = (1,4,8,2,6)(3,5,7,9)$.

Exercice 3. (7 points)

a) Soit G un groupe dans lequel tous les éléments g vérifient $g^2 = e$. Montrer que G est abélien.

Solution. *Voir l'exercice 10 a) de la feuille 1.*

b) Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer le résultat du cours que pour tout $g \in G$ la classe à gauche gH est en bijection avec H.

Solution. *On rappelle que* $gH = \{gh \mid h \in H\}$. *On montre que l'application* $f : H \to gH, h \mapsto gh$ *est une bijection. En effet, elle est injective car* $f(h_1) = f(h_2)$, *c'est-à-dire* $gh_1 = gh_2$ *implique* $h_1 = g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2 = h_2$. *Et elle est surjective car tout élément* y *de* gH *est de la forme* $y = gh$ *et donc* $y = f(h)$.

c) Déterminer tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Justifier votre réponse.

Solution. *Voir l'exercice 11 a) de la feuille 1.*

Exercice 4. (4 points) Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument (trois, quatre lignes maximum) ou un contre-exemple (réponse non justifiée = 0 point !).

a) L'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ sur le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ est transitive. Vrai ou faux ?

Solution. *Vrai :*
Une action est transitive si elle a qu'une seule orbite. Dans notre cas, tout élément $z = x + iy \in \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}_{>0}$, *est dans l'orbite de* i *car*

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i \right] = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (iy) = x + iy.$$

b) Il existe une action de groupe fini G sur un ensemble X telle que les éléments d'une orbite ont des stabilisateurs de cardinaux différents. Vrai ou faux ?

Solution. *Faux :*
Dans le cas d'un groupe fini G, *on a* $|G| = |\mathrm{Orb}(x)||\mathrm{Stab}(x)|$ *pour tout* $x \in X$.
Soient x *et* y *dans la même orbite, c'est-à-dire* $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(y)$. *Donc* $|\mathrm{Orb}(x)| = |\mathrm{Orb}(y)| = k$ *et on obtient pour les stabilisateurs* $|\mathrm{Stab}(x)| = |\mathrm{Stab}(y)| = \frac{|G|}{k}$.

c) Le groupe symétrique S_4 a 4 classes de conjugaison. Vrai ou faux ?

Solution. *Faux :*
Deux permutations de S_4 *sont conjuguées si et seulement si les deux ont le même type. Les types possibles dans* S_4 *sont* $[1,1,1,1]$, $[1,1,2]$, $[1,3]$, $[2,2]$ *et* $[4]$. Donc il y a 5 classes de conjugaison dans S_4.

d) Les groupes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont isomorphes. Vrai ou faux ?

Solution. *Vrai :*
Les deux groupes sont cycliques d'ordre 6 *et donc isomorphes. Un isomorphisme est donné par exemple par la définition* $f : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, k\bar{1} \mapsto k(\bar{1}, \bar{1})$.