EXAMEN, STRUCTURES ALGÉBRIQUES I
15 JANVIER 2018
CORRIGÉ

Problème 1

Question (1) Pour chacun des n, G ci-dessous, existe-t'il un élément d'ordre n dans G ? (Donner un exemple si la réponse est positive et brièvement justifier une réponse négative.)

1. $n = 13$ et $G = S_8$; **Solution :** *13 est un nombre premier* > 8 *et il ne divise donc pas* $|G| = 8!$, *donc G ne contient pas d'élément d'ordre 13.*
2. $n = 15$ et $G = S_8$; **Solution :** *On a* $15 = 3 \times 5$ *et* 3 *est premier à* 5 *donc le produit d'un 3-cycles et d'un 5-cycle dont les supports sont disjoints l'un de l'autre est d'ordre 15. Comme* $3 + 5 = 8$ *de tels cycles existenent dans* S_8 *et ce dernier contient bien des éléments d'ordre 15, par exemple la permutation* $(1\,2\,3)(4\,5\,6\,7\,8)$.
3. $n = 9$ et $G = S_6$. **Solution :** *On voit que* 9 *divise* 720 *donc l'argument utilisé en 1 ne s'applique pas ici. Par contre on a* $9 = 3^2$ *donc les seules permutations d'ordre 9 sont celles dont la décomposition en cycles ne contient que des 9- et des 3-cycles et au moins un 9-cycle. Or il n'existe pas de 9-cycle dans* S_6 *donc il ne peut contenir d'élément d'ordre 9.*

Question (2) Parmi les groupes suivants, lesquels sont isomorphes à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$? (Justifier brièvement chaque réponse.)

1. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; **Solution :** *Ce groupe ne contient pas d'élément d'ordre 12 : en effet, si* $(a, b) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *on a* $6(a, b) = (6a, 2(3b)) = (0, 0)$ *donc l'ordre de* (a, b) *divise 6. Le groupe ne peut donc pas être isomorphe à* $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; **Solution :** *Ce groupe est de cardinal 12 et l'élément* $(1, 1)$ *est d'ordre 12 donc le groupe est isomorphe à* $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ *(on peut aussi utiliser le "théorème chinois" vu en cours).*
3. $\mathbb{Z}^2/\langle(2, 0), (0, 6)\rangle$; **Solution :** *Le sous-groupe* $\langle(2, 0), (0, 6)\rangle$ *contient le sous-groupe* $2\mathbb{Z}^2 = \{(2x, 2y) : (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ *et on a donc un morphisme surjectif*

   $$\mathbb{Z}^2/\langle(2, 0), (0, 6)\rangle \to \mathbb{Z}^2/2\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

   Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *n'est pas cyclique (tous les éléments sont d'ordre 1 ou 2 et le groupe est d'ordre 4) et il ne peut donc pas être un quotient de* $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ *(puisque l'image d'un groupe monogène est monogène). Donc* $\mathbb{Z}^2/\langle(2, 0), (0, 6)\rangle$ *ne peut pas être isomorphe à* $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
4. $\mathbb{Z}^2/\langle(5, 2), (-1, 2)\rangle$. **Solution :** *Ce groupe est d'ordre 12 (parce que* $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12$*) et l'image dans le quotient de l'élément* $(0, 1) \in \mathbb{Z}^2$ *est d'ordre 12 (en effet si* $a(5, 2) + b(-1, 2) = (0, c)$ *alors* $b = -5a$ *donc s'ils sont entiers et* $c > 0$ *on a* $2a + 2b \geq 2 \times 1 + 2 \times 5 = 12$. *Donc* $(0, 1)$ *engendre le groupe et ce dernier est cyclique d'ordre 12.*

Question (3) Donner un exemple de groupe G et d'un sous-groupe $H \subset G$ d'indice 2 tels que G ne soit pas isomorphe à un produit semi-direct de H par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. **Solution :** *Soient $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $H = \langle \bar{2} \rangle$. On a $[G : H] = 2$ mais il n'existe pas de sous-groupe $N \subset G$ tel que $N \cap H = \{\bar{0}\}$ et l'image de N dans G/H est égale à G/H (en effet toute préimage d'un générateur du quotient engendre G tout entier). Donc G ne peut pas être décomposé comme produit semi-direct.*

Question (4) Donner des éléments d'ordre 4 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$ et dans le groupe linéaire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. **Solution :** *Le nombre complexe $e^{i\frac{\pi}{2}}$ est d'ordre 4 dans $\mathbb{C}^\times$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est d'ordre 4 dans le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.*

Problème 2

Question (1) Décrire les classes de conjugaison dans le groupe alterné A_4, puis dans le groupe symétrique S_4 (pour chaque classe on donnera son cardinal et un représentant). **Solution :** *Les classes de conjugaison dans A_4 sont les suivantes :*
- *La classe de l'identité, qui ne contient que cette dernière ;*
- *La classe contenant toutes les doubles transpositions, par exemple $(1\,2)(3\,4)$; il y en a au total 3 ;*
- *La classe contenant les 3-cycles, par exemple $(1\,2\,3)$. Elle contient 8 éléments.*

Ces trois classes sont aussi des classes de conjugaison dans S_4[1]*. S'y ajoutent les deux classes suivantes :*
- *La classe des transpositions, qui contient par exemple $(1\,2)$ et est de cardinal 6 ;*
- *La classe des 4-cycles comme $(1\,2\,3\,4)$ qui en contient 6.*

Question (2) Donner un sous-groupe distingué de A_4 (distinct de A_4 lui-même et du sous-groupe trivial $\{\mathrm{Id}\}$). Est-il distingué dans S_4 (justifier la réponse) ? **Solution :** *Le sous-ensemble*

$$\{\mathrm{Id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$$

est un sous-groupe (la composée de deux doubles transpositions est la troisième) et c'est aussi une union de deux classes de conjugaison (la triviale et celle des doubles transpositions). Il est donc distingué.

Comme les classes de conjugaison dans A_4 sont aussi des classes de conjugaison dans S_4 (voir question précédente) ce sous-groupe est aussi distingué dans S_4.

Question (3) Soit $H \subset A_4$ le sous-groupe trouvé à la question précédente.

Question (3.a) Montrer que A_4/H est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. **Solution :** *On a $|H| = 4$ et $|A_4| = 12$ donc $|A_4/H| = 3$. Un groupe d'ordre premier est forcément cyclique donc on a bien $A_4/H \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*

Question (3.b) * Montrer que $S_4/H \cong S_3$. **Solution :** *On considère l'action de G par conjugaison sur la classe des doubles transpositions. Aucune permutation hors de H ne*

1. Noter que ceci n'est pas automatique pour des groupes généraux : par exemple $(1\,2\,3\,4\,5)$ et $(1\,3\,5\,2\,4)$ sont conjugués dans S_5 mais pas dans A_5.

commute à chacune d'entre celles-ci et le noyau de cette action est donc égal à H. D'autre part le cardinal de la classe est 3 et l'action donne donc un morphisme $S_4 \to S_3$ de noyau H. Comme $|S_4/H| = 6 = |S_3|$ il suit que ce morpisme est un isomorphisme.

Autre solution : A_4/H est distingué dans S_4/H et il existe un élément d'ordre 2 dans S_4 dont l'image engendre le quotient $(S_4/H)/(A_4/H)$ (par exemple n'importe quelle transposition , donc S_4/H est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Il n'est pas abélien et donc forcément isomorphe à S_3.

Problème 3

Dans tout l'exercice on notera n un entier au moins égal à 3 et D_{2n} le groupe dihédral d'ordre $2n$.

Question (1) Combien y-a-t'il d'éléments d'ordre n dans D_{2n} pour $n = 3, 4, 5, 6$ et 7? **Solution :** *Tous les éléments d'ordre > 2 sont contenus dans le sous-groupe $C_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de D_{2n}. Le nombre d'éléments d'ordre n dans D_{2n} est égal au nombre d'entiers dans $\{1, \dots, n-1\}$ premiers à n. Ce qui donne :*

- *Il y a deux éléments d'ordre 3 dans D_6 ;*
- *de même, pour $n = 5, 7$ il y a respectivement 4 et 6 éléments d'ordre n dans D_{2n}* [2].
- *Pour $n = 4$ les seuls entiers premiers à 4 sont 1 et 3 et il y a donc deux éléments d'ordre 4 dans D_8 ;*
- *Enfin, il y a également deux éléments d'ordre 6 dans D_{12} (correspondant aux entiers 1 et 5).*

Question (2) Décrire les classes de conjugaison dans D_{2n} pour $n = 2017$ et $n = 2018$. **Solution :** *Il n'y a qu'une classe de conjugaison dans $D_{4034} \setminus C_{2017}$. Dans C_{2017} il y en a 1009 : celle de l'identité, et les classes $\{g, g^{-1}\}$ pour $g \in C_{2017} \setminus \{\mathrm{Id}\}$.*

Dans $D_{4036} \setminus C_{2018}$ il y a deux classes de conjugaison (celle de σ et celle de $\rho\sigma\rho^{-1}$ où ρ est une rotation d'angle $2\pi/4036$). Dans C_{2018} il y en a 1010 : celles de l'identité et de l' rotation d'angle π, et les classes $\{g, g^{-1}\}$ pour $g \in C_{2017} \setminus \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$.

Question (3) Décrire tous les sous-groupes distingués de D_{2n}. **Solution :** *Tout sous-groupe de C_n est distingué dans D_{2n} : en effet si $g \in C_n$ et $h \in D_{2n}$ on a $hgh^{-1} \in \{g, g^{-1}\}$. Si n est impair aucun autre sous-groupe, sauf D_{2n} lui-même, n'est distingué (en effet dès qu'un groupe contient une rflexion il les contient toutes, et elles engendrent D_{2n}). En revanche si $n = 2m$ alors le sous-groupe D_{2m} est distingué dans D_{2n} et c'est le seul hors de ceux déjà cités.*

Question (4) Montrer que si un groupe G agit transitivement sur un ensemble X, si H est un sous-groupe distingué de G et il existe $x \in X$ tel que $H \subset \mathrm{Stab}_G(x)$ alors l'action n'est pas fidèle (*indication : montrer que H est contenu dans le noyau*). **Erratum :** *il aurait fallu ajouter l'hypothèse que $H \neq \{e_G\}$.* **Solution :** *Soit $y \in X$, par l'hypothèse de transitivité sur l'action il existe un $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. On a alors $\mathrm{Stab}_G(y) = g\,\mathrm{Stab}_G(x)g^{-1}$, en particulier $gHg^{-1} \subset \mathrm{Stab}_G(y)$ et comme on a supposé que H est distingué dans G il vient que $H = gHg^{-1} \subset \mathrm{Stab}_G(y)$. On a donc montré que H fixe tous les points de X, donc l'action n'est pas fidèle car $H \neq \{e_G\}$.*

---

2. Plus généralement, tous les éléments non-triviaux de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont d'ordre p si p est premier.

Question (5) Déduire des deux questions précédentes que si n est impair alors une action transitive de D_{2n} sur un ensemble fini de cardinal pair et strictement inférieur à $2n$ ne peut pas être fidèle. **Solution :** *Soit X l'ensemble sur lequel l'action a lieu et soit $x \in X$. On pose $H = \mathrm{Stab}_{D_{2n}}(x)$. On a $|X| = 2n/|H|$ et comme le cardinal de X est $< 2n$ on a forcément $H \neq \{e_G\}$. De plus comme le cardinal $|X|$ est pair H ne peut pas contenir de réflexion (sinon 2 diviserait $|H|$, donc $2n/|H|$ diviserait n qui est impair). Par la question (3) il suit que H est distingué dans D_{2n}, et par la question (4) que l'action n'est pas fidèle.*

Problème 4

Question (1) Combien y-a-t'il de 5-sous-groupes de Sylow dans le groupe symétrique S_5 ? **Solution :** *Les 5-Sylow de S_5 sont d'ordre 5 donc cycliques. Deux d'entre eux s'intersectent donc trivialement, et chacun contient exactement quatre 5-cycles. Il y a au total $4! = 24$ 5-cycles dans S_5, donc un total de $24/4 = 6$ 5-Sylow.*

On peut aussi observer que 6 est le seul nombre valant 1 modulo 5 et divisant $5!/5 = 24$ et conclure en utilisant le second théorème de Sylow.

Question (2.a) Donner le cardinal d'un 3-sous-groupe de Sylow du groupe symétrique S_6. **Solution :** *On a $|S_6| = 2 \cdot \mathbf{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \mathbf{6} = \mathbf{3}^2 \cdot m$ où $3 \not| m$ donc $9 = 3^2$ est le cardinal d'un 3-Sylow de S_6.*

Question (2.b) Un tel sous-groupe est-il forcément abélien ? Peut-il être cyclique ? (Justifier brièvement chaque réponse.) **Solution :** *Un groupe d'ordre p^2 avec p premier est forcément abélien. Dans le cas d'un sous-groupe de S_n on peut le voir explicitement : un tel sous-groupe ne peut être qu'engendré par un p^2-cycle ou par deux p-cycles à supports disjoints. Ici $p^2 = 9 > 6$ donc il n'y a pas de p^2-cycle dans S_6 et un 3-Sylow est fircément engendré par deux 3-cycles à supports disjoints, donc il n'est pas cyclique.*

Question (2.c) Donner un exemple de 3-sous-groupe de Sylow dans S_6. **Solution :** *Un exemple est le sous-groupe*

$$\langle (1\,2\,3),\, (4\,5\,6) \rangle$$

qui est de cardinal 9, isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Question (2.d) Quel est le nombre de 3-sous-groupes de Sylow dans S_6 ? **Solution :** *Dans ce cas on ne peut pas conclure uniquement avec le second théorème de Sylow. Par contre on peut compter les conjugués de l'exemple vu à la question précédente : son normalisateur est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et il a donc $6!/(2 \times 36) = 10$ conjugués (le normalisateur d'un 3-Sylow est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes (S_3 \times S_3)$. (Noter que l'on a bien $10 = 1 \pmod 3$)).*

On peut aussi arriver à ce résultat en comptant les partitions de $\{1, \ldots, 6\}$ en deux sous-ensembles de 3 éléments (il y en a $\binom{6}{3}/2 = 10$).

Question (3.a) Donner le cardinal d'un 3-sous-groupe de Sylow du groupe symétrique S_9. **Solution :** *On a*

$$9! = \mathbf{9} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \mathbf{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3^4 \cdot m$$

avec $3 \not| m$, donc le cardinal cherché est $3^4 = 81$.

Question (3.b) Un tel sous-groupe peut-il être abélien ? (Justifier la réponse) **Solution :** *Il n'y a pas de sous-groupe abélien de cardinal 81 dans* S_9 *: le degré minimal pour un tel groupe de permutations est* $3+3+3+3=12$.

Question (3.c) * Soient

$$\sigma = (1\,2\,3),\ \tau = (1\,4\,7)(2\,5\,8)(3\,6\,9).$$

Montrer que $\langle \sigma, \tau \rangle$ est un 3-sous-groupe de Sylow de S_9. **Solution :** *On voit que*

$$\langle \sigma, \tau\sigma\tau^{-1}, \tau^2\sigma\tau^{-2} \rangle \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$$

et donc que

$$\langle \sigma, \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$$

qui est bien de cardinal 81 *? Plus précisément l'action est définie par*

$$\varphi(\bar{1})(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (\rho_2, \rho_3, \rho_1).$$