Feuille d'exercices n° 2 :

Groupe orthogonaux et sous-groupes

Exercice 1
Pour $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

(1.a) Montrer que pour touts $u, v \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

(1.b) Soit $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a $g \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\|g(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

(1.c) Une famille $v^1, \ldots, v^n \in \mathbb{R}^n$ est dite *orthonormée* si $\|v^i\| = 1$ et $\langle v^i, v^j\rangle = 0$ pour touts $i \neq j$. Montrer qu'un telle famille est une base de $\mathbb{R}^n$.

(1.d) Montrer que $g \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si l'image de la base canonique par g est orthonormée.

Exercice 2
Montrer que $|\mathrm{dét}(g)| = 1$ pour tout $g \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $[\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})] = 2$.

Exercice 3
(3.a) Soient σ_1, σ_2 les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même dont les matrices dans la base canonique B sont respectivement :

$$\mathrm{Mat}_B^B(\sigma_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_B^B(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner des vecteurs $v_\pm \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tels que $\sigma_1 v_\pm = \pm v_\pm$. Que peut-on-dire de $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$?

(3.b) Donner une isométrie τ de E telle que $\tau^2 = \rho$. Est-ce-que τ est uniquement déterminée ? Montrer que $\rho\sigma_2 = \tau\sigma_2\tau^{-1}$ et retrouver ainsi $v_\pm$.

Exercice 4
(4.a) Déterminer les classes de conjugaison dans $O_2(\mathbb{R})$.

(4.b) Soit $n \geq 2$. Déterminer les classes de conjugaison dans le groupe diédral D_{2n}.

Exercice 5
(5.a) Montrer que le groupe d'isométries d'un triangle est isomorphe à l'un des groupes $D_6, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou trivial.

(5.b) Montrer que le groupe d'isométries d'un quadrilatère est isomorphe à l'un des groupes $D_8, D_4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou trivial.

(5.c) Soit $n \geq 3$. Montrer que le groupe d'isométries d'un n-gone est isomorphe à un sous-groupe de D_{2n}.

Exercice 6
Soient ρ_1, ρ_2 deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux l'un à l'autre. Décrire le sous-groupe de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ engendré par ρ_1, ρ_2.

Exercice 7
Une *réflexion* est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ dont l'ensemble des vecteurs fixes est un plan.

(7.a) Donner un exemple, puis décrire les classes de conjugaisons dans $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ des réflexions.

(7.b) Montrer que si $g \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ il existe une réflexion s telle sg ait strictement plus de vecteurs fixes que g. En déduire que g est un produit de deux réflexions.

(7.c) Déduire de la question précédente que tout élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ a un vecteur fixe non nul.

Exercice 8
Montrer que tout sous-groupe de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ est soit contenu dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, soit isomorphe à $G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où G est contenu dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, soit isomorphe à un groupe diédral. Dans chaque cas donner une interprétation géométrique.

Exercice 9
(9.a) Montrer que $\Sigma : g \mapsto g^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\sigma \in O_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ on a :

$$\forall g \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) : \sigma g \sigma^{-1} = \Sigma(g).$$

(9.b) Pour $v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$ on pose $G_v = \mathrm{Stab}_{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}(v)$. Montrer que pour $h \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ on a $hG_vh^{-1} = G_{hv}$. En déduire que pour $v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ les groupes G_v, G_w sont isomorphes.

(9.c) Soit $v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$ et u, w tels que (v, u, w) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{dét}(u, v, w) = 1$. Montrer que

$$\phi_v(g) = \mathrm{Mat}_{(u,w)}(g|_P)$$

définit un morphisme de groupes $\Phi_v : G_v \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ qui ne dépend pas de u, w. Vérifier que c'est un isomorphisme.

(9.d) Montrer que $\Phi_{-v} \circ \Phi_v^{-1} = \Sigma$. Donner une interprétation géométrique de ceci.

Exercice 10
(10.a) Montrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les demi-tours (*indication : voir l'exercice 7*).

(10.b) Soit G un sous-groupe distingué non-trivial de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et $\rho \in G$, $\rho \neq \mathrm{Id}$. Soit $\theta \in [0, \pi]$ l'angle de ρ. Montrer que pour tout $\alpha \in [0, \theta]$ et toute rotation $\phi \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'angle α et $x \in \mathbb{R}^3$ il existe $\rho' \in G$ telle que $\rho'(x) = \phi(x)$.

(10.c) Montrer que si $\rho' \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et il existe $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\rho'(x) = -x$ alors ρ' est un demi-tour. En déduire que G contient un demi-tour (*indication : appliquer un nombre suffisant de fois la question précédente pour $\alpha = \pi/n$ pour un n assez grand*).

(10.d) Conclure que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.