UPS, L2 Parcours spécial, Théorie des Groupes

FEUILLE 4

Exercice 1.

a) Montrer que le sous-groupe $H = \{id, (12)\} \subset S_3$ n'est pas distingué, et expliciter les classes à droite et à gauche modulo H.

b) Trouver tous les sous-groupes distingués du groupe symétrique S_3.

c) Montrer que la loi de composition sur S_3 n'induit pas une loi de groupe sur les classes à gauche modulo H.

Exercice 2. Montrer que le seul sous-groupe distingué de A_4 distinct de $\{\mathrm{Id}\}, A_4$ est le sous-groupe

$$V_4 = \{\mathrm{Id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}.$$

Identifier le quotient A_4/V_4.

Exercice 3.

1. Soient G le groupe produit $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et H le sous-groupe de G engendré par $(\bar{3}, \bar{2})$. Écrire la décomposition de G suivant les classes à gauche modulo H. Décrire le groupe quotient G/H.
2. Soient $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $H = \langle \bar{2} \rangle$, décrire le quotient G/H.
3. Soient $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $H = \langle \bar{2} \rangle$. On note $\pi : G \to G/H$ le morphisme naturel, montrer qu'il n'existe pas de sous-groupe $K \subset G$ tel que $\pi|_K$ soit un isomorphisme $K \xrightarrow{\sim} G/H$.
4. Soit $G = \mathbb{Z}^2$ et soient H_1, H_2 les sous-groupes engendrés respectivement par $(1, 0)$ et $(1, 1)$. Montrer que $\mathbb{Z}/H_i \cong \mathbb{Z}$ pour $i = 1, 2$.
5. Soient $G = \mathbb{Z}^2$ et $H = \langle (2, 2) \rangle$. Montrer que :
$$(x, y) + H \mapsto (x - y, \bar{y})$$
définit bien une application $G/H \to \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, et que cette dernière est un isomorphisme de groupes.
6. Soient $G = \mathbb{Z}^2$ et $H = \langle (1, 1), (1, -1) \rangle$. Montrer que
$$(x, y) + H \mapsto \overline{x + y}$$
définit un isomorphisme $G/H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Montrer que le groupe quotient $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $n \geq 3$. Décrire les sous-groupes distingués dans le groupe diédral D_{2n}. On suppose que $m|n$, donner un tel $H \triangleleft D_{2n}$ tel que $D_{2n}/H \cong D_{2(n/d)}$.

Exercice 6. Montrer qu'un sous-groupe $H \subset G$ d'indice 2 est toujours distingué. Que peut-on dire du quotient G/H ?

Exercice 7. On rappelle que le *groupe quaternionique* $\mathbf{H}_8$ est engendré par deux éléments i, j tels que $i^2 = -1 = j^2$—où -1 désigne un élément central d'ordre 2—et $k := ij = -ji$ vérifie aussi $k^2 = -1$; on vérifie que l'on a

$$\mathbf{H}_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

Montrer que tous les sous-groupes de $\mathbf{H}_8$ y sont normaux. Identifier pour chaque sous-groupe H le quotient $\mathbf{H}_8/H$.

Exercice 8.

a) Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G d'indice n. Montrer que pour tout $a \in G$ on a $a^n \in H$.

b) Donner un exemple de sous-groupe non distingué de G pour lequel la conclusion précédente est fausse. Que peut-on quand même conclure en général ?

c) Soit G un sous-groupe d'indice fini du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Montrer que $G = \mathbb{C}^*$. Même question pour les sous-groupes de $(\mathbb{Q}, +)$.

Exercice 9. Soit G un groupe et $Z(G) = \{h \in G \mid gh = hg \ \forall g \in G\}$.

a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

b) Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique alors G est abélien. Que peut-on en déduire sur $G/Z(G)$?

Exercice 10. Soit H et K deux sous-groupes finis d'un groupe G. Montrer que

$$|HK| = |KH| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$

Exercice 11.

a) Donner un exemple de groupe contenant au moins deux sous-groupes d'indice 2.

b) Soit H un sous-groupe d'indice 2 de S_n. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma^2 \in H$. En déduire que H contient l'ensemble des 3-cycles et donc que $H = A_n$.

c) Pour un groupe G, on pose $D(G)$ le sous groupe de G engendré par les commutateurs $\{\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau, \forall \sigma, \tau \in G\}$. Montrer que pour $n \geq 5$, $D(A_n) = D(S_n) = A_n$.

Exercice 12. Soit G un groupe. Si H est un sous-groupe de G on pose :

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

que l'on appelle *normalisateur de H dans G*.

a) Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G.

b) Quel est le normalisateur d'un sous-groupe distingué ? Est-ce une caractérisation des sous-groupes distingués ?

c) Vérifier que H est distingué dans son normalisateur, et montrer que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est normal.

d) Dans le groupe S_4, trouver le normalisateur du sous-groupe à 2 éléments $\langle (12)(34) \rangle$.

e) Montrer que $Z(G) \subset N_G(H)$. On pose :

$$Z_G(H) = \{g \in G : \forall h \in H : gh = hg\}.$$

Montrer que $Z_G(H)$ est un sous-groupe distingué de $N_G(H)$.

f) Donner des exemples où $Z_G(H) \neq Z(G)$ et $N_G(H) \neq Z_G(H)$.

g) Montrer que si $|H| = n$ on a $|N_G(H)| \leq (n!) \cdot |Z_G(H)|$.

h) Montrer que l'on peut remplacer $n!$ par $(n-1)!$ dans la question précédente.

Exercice 13. Soit T le groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ on note $[\alpha] = \alpha + \mathbb{Z}$ son image dans T.

a) Montrer que pour tout $t \in T$ il existe un unique $\alpha \in [0, 1[$ tel que $t = [\alpha]$.

b) Soient $\pi : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

et $\pi' : \mathbb{R} \to U$ défini par $\pi'(\alpha) = e^{2i\pi\alpha}$. Montrer que $\ker(\pi) = \ker(\pi') = 2\pi\mathbb{Z}$ et en déduire que $\mathrm{SO}(2) \cong G \cong U$.

c) Montrer que les éléments d'ordre fini dans G sont exactement ceux de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Montrer que tout sous-groupe fini de G est cyclique.

Exercice 14. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que le groupe quotient est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Exercice 15.

a) Soit H le sous-ensemble de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ constitué des polynômes $P(X)$ vérifiant $P(\bar{1}) = P(\bar{2}) = 0$. Montrer que H est un sous-groupe (additif) et donner le nombre d'éléments dans le quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/H$.

b) On note (X^2+1) le sous-groupe de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de la forme $(X^2+1)Q(X)$. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel entre $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 16. Montrer que S_3 et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont tous deux produits semi-directs d'un groupe d'ordre 3 par un groupe d'ordre 2.

Exercice 17. Trouvez une structure de produit semi-direct pour les groupes suivants :

a) Le groupe diédral D_n (isométries préservant un polygone régulier à n côtés) ;

b) Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbb{C})$;

c) Le groupe symétrique S_n ;

d) Le groupe des isométries du plan ;

e) Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube.

Exercice 18.

a) Montrer que le groupe des quaternions $\mathbb{H}^8$ n'est pas un produit semi-direct.

b) Montrer que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas un produit semi-direct.

c) Montrer que les groupes (tous de cardinal 8) $\mathbf{H}_8, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et D_4 sont 2 à 2 non isomorphes.

Exercice 19. Soit G un groupe fini, et soit p le plus petit facteur premier de $|G|$. Montrer que tout sous-groupe H d'indice p de G est distingué (Indication : considérer le morphisme de groupe $G \to S_p$ provenant de l'action de G sur les classes à gauche G/H).

Exercice 20. On considère $H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ et $Q = S_3$ et on définit une action φ par automorphismes de Q sur H par

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}).$$

Montrer que $Q \rtimes_\varphi H$ est isomorphe à un sous-groupe de S_6. Peut-il être isomorphe à un sous-groupe de S_5 ?