UPS, L2 Parcours spécial, Théorie des Groupes

FEUILLE 5

Exercice 1. Soit $G = \mathbb{Z}^2$ et H le sous-groupe engendré par $(6, -1)$ et $(7, 3)$. Déterminer le cardinal puis la structure de G/H. Même question pour $H = \langle (10, -5), (5, 10) \rangle$.

Exercice 2. Donner la liste des groupes abéliens d'ordre 72 à isomorphisme près, en justifiant que votre liste est complète et non redondante.

Exercice 3. Soit G un p-groupe et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que $H \cap Z(G)$ n'est pas réduit à l'élément neutre.

Exercice 4. Soit G un groupe d'ordre $2p$, où p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. Montrer que G contient un unique sous-groupe H d'ordre p et que ce sous-groupe est distingué.

Exercice 5. Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Exercice 6. Pour p un nombre premier, déterminer le nombre de p-sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_p.

Exercice 7. Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts et G un groupe d'ordre pq. Montrer que G admet un unique q-Sylow Q qui est distingué et que $G = QP$, où P est un p-Sylow de G. Montrer que G est isomorphe au produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre q par un groupe cyclique d'ordre p. Montrer que si $q - 1$ n'est pas divisible par p, ce produit semi-direct est en fait un produit direct.

Exercice 8.

1. Soit p un nombre premier. Donner un p-sylow du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ pour $n = 2, 3$. Calculer le nombre de p-Sylow dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
2. Donner un p-Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.
3. Donner un 2-Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

Exercice 9. Donner la liste des groupes d'ordre au plus 15.

Exercice 10. On se propose de démontrer le résultat suivant, attribué à Cauchy (1789-1857) :

Soit G un groupe, et p un diviseur premier de l'ordre de G. Alors G contient un élément d'ordre p.

a) On commence par donner une autre démonstration dans le cas où G est abélien (vu en cours). Si $G = \{g_1, \cdots, g_d\}$ avec $\text{ordre}(g_i) = n_i$, on pose $H = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_d\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $\varphi : H \to G$. En déduire qu'il existe un élément de G dont l'ordre est un multiple de p et conclure.

b) Montrer que l'on peut réduire le cas général au cas où $Z(G) = \{e_G\}$.

c) Démontrer le cas général par récurrence sur $|G|$ (*indication : montrer que si $Z(G) = \{e_G\}$ alors il existe au moins un élément de G dont le centralisateur a un cardinal divisible par p*).

Exercice 11. Soient G est un groupe fini, p un nombre premier divisant $|G|$et H un sous-groupe distingué de G.

1. Soit S un p-Sylow de G. Montrer que SH/H est un p-Sylow de G/H.
2. Soit R un p-Sylow de H. Montrer que $G = N_G(R)H$ (*indication : utiliser l'action de G par conjugaison sur les sous-groupes de H*).