LES SOUS-GROUPES ALÉATOIRES INVARIANTS

JEAN RAIMBAULT

À la mémoire de Nicolas Bergeron et Anatoli Vershik

Table des matières

Introduction 1
1. Groupes et sous-groupes (déterministes) 2
2. Sous-groupes aléatoires invariants 9
3. Applications 15
4. Problèmes de classification 17
5. Autres sujets 20
6. Remerciements 22
Références 22

Introduction

Si G est un groupe dénombrable la notion de *sous-groupe aléatoire invariant* de G est à peu près évidente à quelques technicités près : il s'agit d'une variable aléatoire prenant ses valeurs parmi les sous-groupes de G dont la loi est invariante par conjugaison par les éléments de G. [1] On peut aussi dire qu'il s'agit d'une généralisation probabiliste de la notion de sous-groupe distingué. Ces objets n'ont cependant été formellement introduits et étudiés pour la première fois que dans un article de Abért, Glasner et Virág publié [2] en 2014 [AGV14]. Ce travail démontre un résultat frappant de théorie des graphes comme corollaire d'une généralisation aux sous-groupes aléatoires invariants d'un vieux théorème de Kesten sur le rayon spectral des marches aléatoires sur les graphes de Cayley. À sa suite de nombreuses autres applications de ces objets sont apparues : à des problèmes de pure théorie des groupes, mais aussi de géométrie et formes automorphes entre autres.

Le but du présent texte est d'introduire la définition formelle des sous-groupes aléatoires invariants dans les groupes dénombrables, d'en donner de nombreux exemples (y compris des constructions systématiques et des résultats de classification dans certains groupes) et d'en décrire les propriétés les plus marquantes et certaines des applications. Plutôt que de prendre le

1. La définition précise, pour laquelle il faut préciser une structure borélienne sur l'ensemble des sous-groupes, est donnée en 2.1 ci-dessous.

2. Après être apparu sur le site Arxiv en janvier 2012.

chemin le plus court en ne partant que de la définition algébrique "classique" des groupes et de leurs sous-groupes distingués ou non, on va essayer de présenter ceux-ci sous plusieurs jours qui seront aussi présents dans la description de leur version probabiliste : un regard dynamique via les actions de groupes, et un regard géométrique via les groupes fondamentaux et les graphes et complexes de Cayley. À la toute fin de l'article on présente aussi très rapidement quelques thèmes qui se rattachent directement à notre sujet, en particulier en sortant du cadre des groupes discrets (la notion de sous-groupe aléatoire se définit aussi bien dans le cadre plus général des groupes localements compacts) et de celui de la théorie des groupes (des objets similaires apparaissent dans le cadre des graphes et des variétés riemanniennes).

1. Groupes et sous-groupes (déterministes)

La plus grande partie de cette section est dédiée aux notions fondamentales de la théorie des groupes : les groupes eux-mêmes (1.1), les sous-groupes (1.2) et les sous-groupes distingués (1.3). A chaque fois on essaie de présenter les définitions et exemples sous trois points de vue : le premier est le point de vue "algébrique" qui est celui qu'on utilise en général dans un cours de licence sur le sujet. [3] Le second est le point de vue "géométrique", où l'on interprète les groupes comme les groupes fondamentaux d'espaces topologiques combinatoires ; c'est l'un des points de départ de la théorie géométrique des groupes. Le troisième est le point de vue "dynamique", où l'on introduit les objets par le biais des actions de groupes.

La fin 1.4 introduit l'espace des sous-groupes d'un groupe et sa topologie de Chabauty, qui sont essentiels pour la suite.

Comme elles seront utiles dès le début on va rappeler les definitions de sous-groupe distingué et groupe quotient. Si G est un groupe et H en est un sous-groupe on dit que H est distingué dans G s'il est invariant par conjugaison par les éléments de G : c'est-à-dire que $gHg^{-1} = H$ pour tout $g \in G$. Cette condition correspond à l'existence d'une structure de groupe sur G/H telle que l'application $G \to G/H$ soit un morphisme.

1.1. Groupes.

Si r est un entier non-nul on rappelle que l'on peut définir le *groupe libre* F_r à r générateurs comme l'ensemble des mots réduits en r lettres et leurs inverses formels [4] muni de l'opération de concaténation (avec réduction subséquente si nécéssaire). C'est l'unique groupe pour lequel se donner une image dans un groupe donné pour chaque générateur permet toujours de définir un unique morphisme de groupes vers celui-ci.

On représente souvent F_r comme un arbre T_{2r} qui est $2r$-valent dont les arêtes orientées sont marquées par $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_r^{\pm 1}\}$ de sorte que l'arête

3. On supposera donc connues les notions de groupe, sous-groupe, action de groupe et quotient de groupe.

4. Si on note $a_1, \dots, a_r$ ces lettres c'est donc l'ensemble des expressions formelles $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\varepsilon_n}$ où $n \geq 0$, $i_j \in \{1, \dots, r\}$, $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$ et on ne peut pas avoir en même temps $i_j = i_{j+1}$ et $\varepsilon_j = -\varepsilon_{j+1}$.

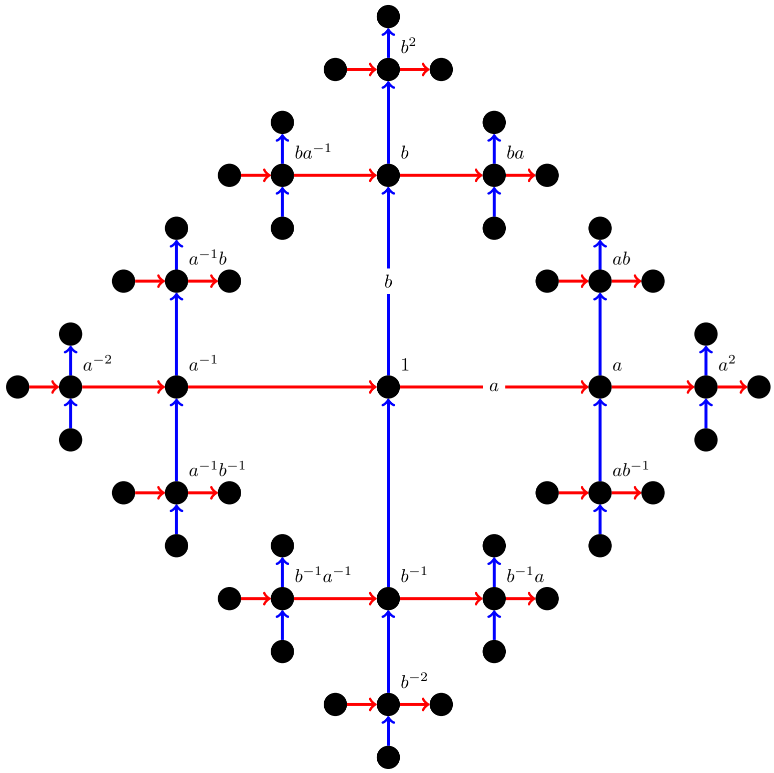

FIGURE 1 – Une partie de l'arbre de Cayley associé au groupe libre engendré par a, b

opposée à une arête marquée par a_i^ε est marquée par $a_i^{-\varepsilon}$ et en chaque sommet exactement une arête entrante et une sortante sont marquées par a_i. Le groupe s'identifie à T_{2r} dès que l'on fixe une racine, qui peut être n'importe quel sommet de l'arbre : l'élément correspondant à un mot réduit est identifié au sommet terminal du chemin partant de la racine sur lequel on lit ce mot (de droite à gauche). Autrement dit, on met une arête marquée a_i d'un élément $w \in F_r$ vers un élément $v \in F_r$ si et seulement si $v = wa_i$.

Le groupe F_r agit naturellement sur l'arbre T_{2r} décrit ci-dessus : en effet la multiplication à gauche par un élément de F_r conserve les arêtes. Cette action est simplement transitive, et on voit que F_r est alors identifié aux automorphismes de l'arbre préservant les marquages d'arêtes orientées.

Dans cet article les groupes dont il sera question seront toujours dénombrables, et le plus souvent *de type fini*, c'est-à-dire ayant une partie génératrice finie. Un groupe G engendré par des éléments $a_1, \ldots, a_r$ peut être vu via une présentation $\langle a_1, \ldots, a_r | R\rangle$ où R est un ensemble de mots en $a_1, \ldots, a_r$. Le groupe s'identifie alors à l'ensemble des mots réduits où l'on efface aussi les

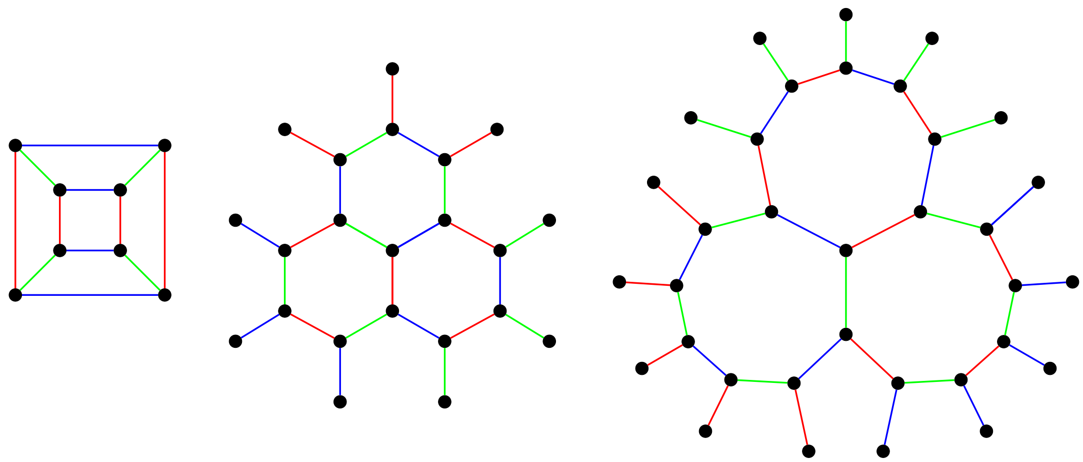

Figure 2 – Graphes de Cayley pour les groupes engendrés par des involutions a, b, c (chaque arête est double et on ne donne donc pas d'orientation) avec les relations $(ab)^k = 1$, $(bc)^k = 1$ et $(ab)^k = 1$ avec k valant respectivement 2 à gauche, 3 au milieu et 4 à droite. (En dehors de celui de gauche ces groupe sont infinis et on ne représente donc qu'une partie du graphe.)
Ces groupes ont une interprétation géométrique classique : celui de gauche est engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un octahèdre régulier sur la sphère, celui du milieu par ceux du pavage du plan par des triangles équilatéraux et celui de droite par ceux d'un pavage du disque de Poincaré par des triangles.

occurrences d'éléments de R, muni de la concaténation. Formellement, c'est le quotient de F_r par le sous-groupe distingué N engendré par R.

Pour décrire G de manière géométrique semblable à l'arbre T_{2r} de F_r on forme le graphe où chaque sommet a exactement une arête entrante et une arête sortante marquées par a_i (il est donc localement isomorphe à l'arbre) mais où chaque chemin marqué par un mot correspondant à un élément de R est un circuit. Ceci définit bien un unique (une fois une racine choisie) graphe marqué, et on peut l'identifier au quotient $N\backslash T_{2r}$: en particulier, ses sommets sont identifiés à $N\backslash F_r \cong G$. Le groupe G agit sur les sommets par multiplication à gauche, et cette action préserve bien la structure de graphe.

Ce graphe est appelé le *graphe de Cayley* du groupe G pour la famille génératrice donnée. On considère souvent aussi le *complexe de Cayley* obtenu en recollant un disque sur chaque cycle sur lequel un élément de R est lu. L'action du groupe sur le graphe de Cayley se prolonge à ce 2-complexe, qui a le bon goût d'être *simplement connexe*, c'est-à-dire que si l'on a deux chemins continus ayant les mêmes points de départ et d'arrivée on peut déformer l'un continûment jusqu'à obtenir l'autre.

L'action de G sur le complexe de Cayley décrit au paragraphe précédent est libre (aucun élement sauf l'identité n'y a de point fixe), c'est-à-dire que le quotient par cet action admet le complexe de Cayley comme revêtement universel et le groupe G comme groupe fondamental. [5] Par exemple, si $G = F_r$ on obtient un "bouquet" de r cercles, et si $G = \mathbb{Z}^2 = \langle x, y | xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ on obtient le tore. Si R est fini (on dit alors que le groupe G est de *présentation finie*) il est donc le groupe fondamental d'un 2-complexe fini. [6]

1.2. **Sous-groupes.** Si G est un groupe, une manière simple pour obtenir un sous-groupe de G est de le réaliser comme stabilisateur d'un point dans une action transitive de G : tout sous-groupe est ainsi réalisé puisque si $H \leq G$ alors H est le stabilisateur de la classe triviale dans l'action de G par multiplication à gauche sur G/H. L'exigence de transitivité fait que deux sous-groupes H_1 et H_2 provenant d'une même action sont *conjugués* l'un à l'autre, c'est-à-dire qu'il existe $g \in G$ tel que $H_2 = gH_1g^{-1}$: en effet, si H_1 est le stabilisateur d'un point x et H_2 celui d'un point y, on peut écrire $y = g \cdot x$ par transitivité et on a alors $H_2 = gH_1g^{-1}$.

Les sous-groupes d'indice fini d'un groupe G (ceux pour lesquels G/H est fini) correspondent donc (à peu près) aux morphismes vers les groupes symétriques finis dont l'image est transitive. Par exemple, dans le cas où G est un groupe libre à r générateurs ces morphismes correspondent eux-mêmes aux r-uplets de permutations engendrant un sous-groupe transitif.

Précisons le "à peu près" apparu au paragraphe précédent : si on a un morphisme à image transitive $G \to \mathfrak{S}(\Omega)$ avec Ω un ensemble fini (et $\mathfrak{S}(\Omega)$ le groupe formé par ses bijections), on obtient un sous-groupe $H_\omega = \mathrm{Stab}_G(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$. Si $\omega, \omega' \in \Omega$ il existe un $g \in G$ tel que $g\omega = \omega'$ alors $H_{\omega'} = gH_\omega g^{-1}$, et les sous-groupes H_ω forment donc une classe de conjugaison de sous-groupes de G. Une action transitive de G correspond donc exactement à une classe de conjugaison de sous-groupes de G et on peut préciser un élément de la classe en choisissant un point de l'espace sur lequel G agit (deux points différents peuvent correspondre au même sous-groupe).

Dans le cadre des groupes de type fini, on peut aussi décrire les sous-groupes de manière géométrique. Supposons que G est le groupe fondamental d'un complexe X enraciné en un sommet x_0 (par exemple X peut être le quotient du complexe de Cayley de G par G, qui n'a qu'un seul sommet). Alors un sous-groupe H correspond à un revêtement [7] de X, enraciné en

5. Plutôt que de définir plus intrinsèquement ces notions on peut voir cette propriété comme les définissant.

6. On peut compléter le quotient par G du complexe de Cayley en un complexe "asphérique", que l'on appelle l'*espace classifiant* de G ; en un sens technique précis ce dernier ne dépend pas de la présentation choisie pour G. On l'utilisera très peu dans la suite (pas avant la section 3).

7. C'est-à-dire un espace Y muni d'une application surjective $Y \to X$ qui est localement (dans l'espace d'arrivée) une projection $F \times U \to U$ avec F un espace discret et U un

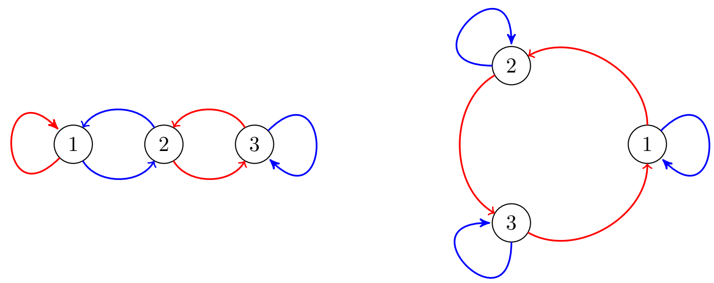

Figure 3 – Graphes de Schreier de sous-groupes d'indice 3 dans F_2 ; celui de gauche, enraciné en le sommet marqué 1, correspond au sous-groupe engendré par $a, b^2, ba^2b^{-1}, b^{-1}a^{-1}bab$ (enraciné en 2 on conjugue les générateurs par b et en 3 par ab). Le second correspond au sous-groupe distingué engendré par $a^3, b, aba^{-1}, a^{-1}ba$.

un sommet choisi parmi les préimages de x_0, et le quotient G/H s'identifie alors naturellement à l'ensemble de ces préimages. Le sous-groupe H est le groupe fondamental de ce revêtement enraciné. Changer la préimage choisie a pour effet de conjuguer H dans G (par un élément de gH, où $gH \in G/H$ correspond à la nouvelle racine).

Par exemple, dans le cas du groupe libre à r générateurs $a_1, \dots, a_r$ on a vu que l'on peut prendre pour X le bouquet de r cercles orientés marqués par $a_1, \dots, a_r$. Les sous-groupes d'indice fini correspondent alors aux graphes connexes finis $2r$-valents où chaque sommet a exactement une arête entrante et une sortante marquées par chacun des a_i, et au choix d'un sommet.

On peut directement relier cette construction à la précédente en utilisant les *graphes de Schreier* : si le groupe G de présentation $\langle a_1, \dots, a_r | R \rangle$ agit transitivement sur un ensemble Ω, et l'on a choisi un point $\omega \in \Omega$ de stabilisateur H dans G, le graphe de Schreier de G/H est le graphe dont l'ensemble des sommets est Ω et où l'on met une arête marquée par a_i de x à $a_i \cdot x$ pour tout $x \in \Omega$. Par exemple, le premier graphe de la figure 3 correspond à l'action du groupe libre engendré par a, b sur $\{1, 2, 3\}$ où a agit par la transposition $(1\,2)$ et b par $(3\,3)$. Le second graphe correspond à a agissant par $(1\,2\,3)$ et b trivialement.

En ajoutant les disques correspondant aux éléments de R on obtient un complexe enraciné en ω dont H est le groupe fondamental et qui est un revêtement du complexe de Cayley de G.

ouvert de X ; les exemples prototypiques en sont l'application $z \mapsto z^n$ de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dans lui-même et l'exponentielle complexe de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1.3. **Sous-groupe distingués.** La définition habituelle ("algébrique") de sous-groupe distingué a été rappelée au début de cette section. Cette définition est facile à interpréter dans le langage dynamique ou géométrique. Si H est représenté comme le stabilisateur d'un point dans une action transitive de G, il est donc distingué si et seulement s'il est aussi le stabilisateur de tous les autres points dans cette action, autrement dit s'il y agit trivialement. S'il est représenté comme un revêtement fini du 2-complexe associé à G, il est distingué si et seulement si le groupe d'automorphisme du complexe respectant les marquages des arêtes par générateurs agit transitivement sur les sommets.

Pour la suite il sera utile d'avoir divers exemples de sous-groupes distingués ou non. Dans le groupe libre F_r on peut trouver beaucoup de sous-groupes qui ne sont pas distingués. Par exemple un sous-groupe distingué non-trivial d'indice infini est forcément de type infini. [8] Par ailleurs, tout sous-groupe d'indice fini contient un sous-groupe distingué d'indice fini (ce qui est vrai dans n'importe quel groupe). Le groupe F_r contient aussi de nombreux sous-groupes distingués d'indice infini, par exemple son *sous-groupe dérivé* F_r' qui est le plus petit sous-groupe distingué H tel que F_r/H soit un groupe abélien (dans ce cas le plus grand quotient abélien est $\mathbb{Z}^r$ et F_r' est donc d'indice infini ; il est aussi infini par exemple parce qu'il contient l'élément non-trivial $xyx^{-1}y^{-1}$ pour n'importe quels $x, y \in F_r$ ne commutant pas l'un à l'autre).

Si G est un groupe abélien alors tout sous-groupe de G est distingué. Pour un groupe G quelconque tout sous-groupe H de G tel que $H \supset G'$ est donc distingué dans G, mais on peut très bien avoir que G/G' est fini et n'obtenir donc ainsi qu'un nombre fini de sous-groupes.

L'existence (ou non) de sous-groupes distingués dans un groupe G distincts de G ou du sous-groupe trivial est un problème épineux en général ; par exemple il existe des groupes *simples* (pour lesquels il n'en existe pas d'autre) infinis de type fini. On dispose quand même de larges classes de groupes où l'on est assuré de l'existence de nombreux sous-groupes distingués :

— Si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de type fini alors il est *résiduellement fini*, c'est-à-dire que pour tout élément $g \in G$ distinct de l'identité il existe un sous-groupe H d'indice fini dans G tel que $g \notin H$. Il suit qu'il existe une suite de sous-groupe distingués $H_n \subset G$ d'indice fini vérifiant que $H_{n+1} \subset H_n$ et $\bigcap_n H_n$ est le sous-groupe trivial. [9] Par contre il se peut que G n'ait aucun sous-groupe distingué infini d'indice infini (c'est par exemple le cas pour $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ d'après un résultat célèbre de G. Margulis).

8. Ceci peut être justifié de manière géométrique : le revêtement correspondant est un graphe contenant au moins un cycle. Comme ce revêtement est muni d'une action propre par un groupe infini il contient en fait une infinité de cycles. Un graphe contenant une infinité de cycles a pour groupe fondamental un groupe libre à une infinité de générateurs.

9. Autrement dit on peut "lire" le groupe G dans l'ensemble des quotients finis G/H_n.

— Si G est un groupe hyperbolique au sens de Gromov, par exemple un groupe libre [10] il a toujours (sauf exceptions "élémentaires" comme $\mathbb{Z}$ ou les groupes finis) de nombreux sous-groupes distingués infinis d'indice infini. Par contre la question de savoir si un tel groupe est forcément résiduellement fini est encore ouverte.

1.4. **L'ensemble des sous-groupes et sa topologie.** On note Sub_G l'ensemble de tous les sous-groupes d'un groupe G. Si G est infini c'est toujours un ensemble infini.

Dans notre cas où G est dénombrable, Sub_G peut être dénombrable ou non. Par exemple, si $G = \mathbb{Z}^r$ alors tout sous-groupe de G est engendré par au plus r éléments, et il suit que Sub_G est dénombrable. Plus généralement, si G est *polycyclique* [11] alors tout sous-groupe de G est de type fini et Sub_G est donc dénombrable. Notons qu'il existe aussi des groupes résolubles ayant un nombre non-dénombrable de sous-groupes. [12]

Dans le cas où G est un groupe libre F_r pour un $r \geq 2$ l'ensemble Sub_G est non-dénombrable : ceci peut se voir facilement avec l'interprétation géométrique des sous-groupes, vu qu'il existe un nombre non-dénombrable de graphes $2r$-valents non isomorphes l'un à l'autre. Si G est un groupe contenant un groupe libre non-abélien on a donc aussi que Sub_G est non-dénombrable ; c'est le cas par exemple pour les sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui ne contiennent pas un sous-groupe résoluble d'indice fini (d'après l'alternative de Tits), et aussi des groupes Gromov-hyperboliques non élémentaires.

L'ensemble Sub_G est inclus dans l'ensemble des parties de G. Ce dernier est identifié à $\{0,1\}^G$ que l'on peut munir de la topologie produit, qui en fait un espace topologique compact métrisable. La *topologie de Chabauty* sur Sub_G est simplement la restriction de cette topologie. Si $x, y \in G$ sont fixés alors l'ensemble des sous-ensembles ne contenant pas $x^{-1}y$ est ouvert. Comme tout sous-ensemble $S \subset G$ qui n'est pas un sous-groupe contient des éléments x, y avec $x^{-1}y \notin S$, c'est aussi vrai dans un voisinage de S et il suit que le complémentaire de Sub_G est ouvert. Donc Sub_G est un sous-ensemble fermé de $\{0,1\}^G$ est est ainsi lui-même un espace compact métrisable.

On peut décrire de manière plus explicite la convergence d'une suite $H_n \in \mathrm{Sub}_G$ vers $H \in \mathrm{Sub}_G$: supposons que G est de type fini et identifions-le avec un graphe de Cayley. Pour $R > 0$ on note $B_G(R)$ l'ensemble des sommets du graphe de Cayley à distance au plus R du sommet correspondant à l'identité de G (autrement dit les éléments de G pouvant s'écrire comme

10. La notion générale d'hyperbolicité est définie à partir de propriétés géométriques d'un graphe de Cayley de G.

11. C'est-à-dire que l'on peut l'obtenir par extensions successives par des groupes cycliques—en plus des groupes abéliens de type fini, c'est aussi le cas pour les groupes nilpotents de type fini ; les groupes polycycliques forment une sous-classe stricte des groupes résolubles de type fini.

12. L'exemple habituel est le groupe de l'allumeur de réverbères, qui contient une somme directe d'un nombre dénombrable de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ce dernier contenant un nombre non-dénombrable de sous-groupes c'est aussi le cas de notre groupe.

un produit d'au plus R générateurs). Alors H_n converge vers H pour la topologie de Chabauty si et seulement si pour tout $R > 0$ il existe un n_0 tel que $H_n \cap B_G(R) = H \cap B_G(R)$ pour tout $n \geq n_0$.

Illustrons cette notion de convergence par un exemple : supposons que H est un sous-groupe distingué de G et qu'il existe une suite (H_n) de sous-groupes distingués tels que $H_n \supset H$ et tout élément de $G \setminus H$ n'appartienne qu'à un nombre fini des H_n (c'est par exemple le cas si $H_n \supset H_{n+1}$ et $\bigcap_{n\geq 1} H_n = H$). Alors (H_n) converge vers H dans Sub_G. Notons que l'on peut construire de telles suites avec des sous-groupes H_n d'indice fini si et seulement si G/H est résiduellement fini (voir la définition donnée ci-dessus).

En général, si (H_n) est une suite de sous-groupes qui ne sont pas distingués dans G elle peut très bien converger vers H alors qu'une autre suite conjuguée $(g_n H_n g_n^{-1})$ converge vers un autre sous-groupe (il est facile de construire de telles suites avec des graphes de Schreier dans le cas du groupe libre, ou avec des surfaces dans le cas des groupes de surfaces). Ce problème sera résolu par l'introduction du point de vue probabiliste dans la prochaine section.

2. Sous-groupes aléatoires invariants

2.1. Définitions.

Comme les sous-groupes distingués les sous-groupes aléatoires invariants admettent trois descriptions : l'une algébrique, l'autre dynamique et la dernière géométrique.

La définition algébrique est la copie probabiliste de la notion déterministe de sous-groupe distingué : un sous-groupe aléatoire invariant de G est une mesure de probabilité borélienne sur Sub_G qui est invariante par la conjugaison par chaque élément de G. On préfèrera souvent voir un tel objet comme une variable aléatoire à valeurs dans Sub_G dont la loi est invariante par conjugaison par les éléments de G.

La définition dynamique correspondante est la suivante : un sous-groupe aléatoire invariant de G est le stabilisateur d'un point aléatoire dans une action continue de G sur un espace de probabilité borélien. Plus précisément, si G agit sur un espace borélien probabilisé (X, μ), on obtient un sous-groupe aléatoire de G en prenant le stabilisateur d'un point de X tiré suivant μ (l'application $X \to \mathrm{Sub}_G$, $x \mapsto \mathrm{Stab}_G(x)$ étant bien borélienne sous les hypothéses). Tout sous-groupe aléatoire invariant de G peut bien être obtenu de cette manière [13] .

La définition géométrique est plus complexe. Un *graphe enraciné* est un graphe sur lequel on a choisi un sommet et l'ensemble de ces objets est muni d'une topologie naturelle ("Gromov–Hausdorff enracinée") définie de manière similaire à la topologie de Chabauty. Un *graphe d-régulier enraciné aléatoire unimodulaire* est une mesure de probabilité borélienne sur l'espace

13. L'action donnant lieu à μ n'est pas en général l'action de G sur (Sub_G, μ), il faut travailler un peu plus : voir [AGV14].

$\mathcal{G}_d$ des graphes d-réguliers enracinés, ce qui rend compte des trois premiers adjectifs du nom, le dernier correspondant à la propriété suivante : on relève le graphe enraciné aléatoire en un *graphe fléché* (c'est-à-dire un graphe sur lequel on a choisi une arête orientée) aléatoire, en choisissant uniformément au hasard une arête issue de la racine. On construit ensuite un autre graphe fléché aléatoire en changeant l'orientation sur l'arête choisie ; le graphe enraciné aléatoire est dit unimodulaire si ces deux graphes fléchés aléatoires suivent la même loi.

Une manière d'obtenir de tels graphes (pour $d = 2r$) est de prendre le graphe de Schreier d'un sous-groupe aléatoire du groupe libre à d générateurs enraciné en le sommet correspondant à l'identité 1 de F_{2r}. L'unimodularité de ces graphes peut être démontrée comme suit : inverser l'arête flèchante correspond à passer du graphe de Schreier de G/H fléché en $(1H, a)$ (a étant le générateur correspondant à l'arête du fléchage) à celui de $G/(a^{-1}Ha)$ fléché en $(1(a^{-1}Ha), a^{-1})$; la conjugaison par a ne change pas la loi et le choix de l'arête est uniforme et on ne change donc pas la loi par ce processus. Tous les graphes d-réguliers enracinés aléatoires unimodulaires sont obtenus de cette manière [14].

En général, si $G = \langle a_1, \ldots, a_r | R\rangle$ est un groupe de type fini, un graphe de Schreier pour le groupe libre sur $a_1, \ldots, a_r$ où tous les chemins sur lesquels on lit des éléments de R sont des cycles est un graphe de Schreier pour G. Les graphes aléatoires unimodulaires ayant presque sûrement cette propriété correspondent donc aux sous-groupes aléatoires invariants de G.

2.2. **Constructions générales.** Avant de construire des exemples intéressants dans des groupes particuliers on va décrire des constructions générales n'utilisant que la structure de groupe. Le premier exemple est celui des sous-groupes distingués : si H est un sous-groupe distingué de G alors la mesure de probabilité δ_H supportée sur le singleton $\{H\}$ est un sous-groupe aléatoire invariant. Dans tout groupe il existe donc deux sous-groupes aléatoires invariants δ_G et $\delta_{\{1\}}$.

Il est facile de décrire les sous-groupes aléatoires invariants δ_H de manière dynamique ou géométrique. Pour construire une action dont δ_H est le stabilisateur, n'importe quelle action essentiellement libre [15] du groupe quotient G/H sur un espace de probabilité convient, par exemple l'action sur $\{0,1\}^{G/H}$ muni de la mesure produit (en prenant la mesure uniforme sur $\{0,1\}$).

14. Ça n'est pas du tout évident : dans [Tót21] L. Tóth généralise au cadre aléatoire la démonstration (classique) que tout graphe fini $2r$-régulier est un graphe de Schreier de F_r.

15. C'est-à-dire où tout élément non-trivial a un ensemble de points fixes de mesure nulle.

Enfin, l'objet géométrique aléatoire correspondant à δ_H est en fait déterministe : c'est simplement le graphe de Cayley de G/H enraciné en un sommet arbitraire. [16]

La deuxième construction utilise des sous-groupes d'indice fini : si $|G/H| = n$, la classe de conjugaison de H dans G est finie (de cardinal divisant n) et la mesure uniforme sur cette classe de conjugaison est donc un sous-groupe aléatoire invariant de G. Du point de vue dynamique, c'est le stabilisateur d'un point de G/H muni de la mesure uniforme.

On peut aussi décrire facilement cette construction du point de vue géométrique : la classe de conjugaison de H correspond à un revêtement fini Y d'un complexe de Cayley de G, et choisir un élément uniformément au hasard dans cette classe correspond à choisir une racine uniformément au hasard parmi les sommets de Y.

Noter que cette construction nécessite l'existence de sous-groupe d'indice fini dans G, ce qui n'est pas le cas pour n'importe quel G.

Plus généralement toute classe de conjugaison finie de sous-groupes de G correspond à un sous-groupe aléatoire invariant de G. Ces classes sont celles des sous-groupes distingués dans les sous-groupes d'indice fini de G, et on obtient donc ainsi une description de tous les sous-groupes aléatoires invariants à support fini de G. On peut facilement déduire des descriptions dynamiques et géométriques pour ceux-ci à partir des deux exemples précédents.

Les sous-groupes aléatoires invariants ont des propriétés fonctorielles. Si $\varphi : G \to G'$ est un morphisme de groupes elle induit une applications $A : H \mapsto \varphi(H)$ allant de Sub_G vers $\mathrm{Sub}_{G'}$ et $B : H' \mapsto \varphi^{-1}(H')$ en sens inverse. Si μ' est une loi de probabilité G'-invariante sur $\mathrm{Sub}_{G'}$ il est immédiat que $B_*\mu'$ est une mesure de probabilité G-invariante sur Sub_G : on peut donc tirer en arrière les sous-groupes aléatoires invariants. En revanche, si μ est une loi de probabilité G-invariante sur Sub_G il n'est pas toujours vrai que $B_*\mu$ est G'-invariante : on ne peut donc pas en général les pousser en avant. C'est tout de même le cas si φ est surjective, ou si l'image $\varphi(G)$ est distinguée dans G' et μ est invariant par tous les automorphismes du groupe de départ (par exemple si c'est la mesure supportée sur un seul groupe caractéristique de G, comme son groupe dérivé).

Enfin on a des opérations d'induction et de co-induction (formellement similaires aux notions homonymes en théorie des représentations mais ne dépendant pas de celles-ci) qui permettent de construire des sous-groupes aléatoires d'un groupe à partir de ceux de ses sous-groupes. L'induction, qui ne s'applique qu'à partir de sous-groupes d'indice fini, est facile à décrire : si G/F est fini et μ est un sous-groupe aléatoire invariant dans F, alors μ est un sous-groupe aléatoire de G a priori pas invariant mais la moyenne

16. Ce graphe représente un singleton dans l'espace des graphes enracinés, et le fait qu'il possède un groupe discret et transitif d'automorphismes assure qu'il est unimodulaire.

$\frac{1}{|G/F|}\sum_{g\in G/F}\iota_g^*\mu$ est toujours invariante (où $\iota_g : x \mapsto gxg^{-1}$ est l'automorphisme intérieur de G associé à g). L'opération de co-induction introduite par Kechris–Quorning [KQ19] permet de construire un sous-groupe aléatoire invariant dans G à partir d'un sous-groupe aléatoire invariant dans un sous-groupe quelconque de G. Elle est plus compliquée à définir et on ne va pas le faire ici.

2.3. **Ergodicité.** Un sous-groupe aléatoire invariant μ de G est ergodique si l'action de G sur (Sub_G, μ) est ergodique (c'est-à-dire que tous les sous-ensembles invariants mesurables sont de mesure 0 ou 1 pour μ). Il est immédiat qu'un sous-groupe aléatoire obtenu comme le stabilisateur d'une action ergodique de G sur un espace de probabilité est ergodique. [17]

De manière équivalente μ est un point extrémal du convexe formé par les mesures de probabilité sur Sub_G invariantes par conjugaison. Par les résultats généraux sur les convexes on peut donc exprimer tout sous-groupe aléatoire invariant en une combinaison convexe de sous-groupes aléatoires invariants ergodiques.

Comme G est dénombrable, il suit de la σ-additivité des mesures qu'un sous-groupe aléatoire invariant ergodique ne peut pas être supporté sur une classe de conjugaison infinie dans G. Tout sous-groupe aléatoire invariant à support dénombrable est donc une combinaison convexe de sous-groupes aléatoires invariants à support fini. En particulier, si Sub_G est dénombrable (par exemple si G est polycyclique, comme on l'a vu ci-dessus) alors tout sous-groupe aléatoire invariant ergodique de G est supporté sur une classe de conjugaison finie de sous-groupes de G.

2.4. **La topologie de Benjamini–Schramm.** Notons $\mathrm{IRS}(G)$ l'ensemble des sous-groupes aléatoires invariants de G. C'est un sous-ensemble du convexe des mesures de probabilité boréliennes sur Sub_G ; ce dernier est muni de la topologie de la convergence faible [18], dont la restriction à $\mathrm{IRS}(G)$ munit ce dernier d'une topologie, que l'on appellera "topologie de Benjamini–Schramm". Par les théorèmes généraux les mesures de probabilité sur l'espace compact Sub_G forment elles-même un espace compact pour cette topologie ; on vérifie immédiatement que $\mathrm{IRS}(G)$ y est fermé et c'est donc également un espace compact.

Dans notre cas où G est discret on peut donner une description plus concrète de la convergence pour cette topologie : si (μ_n) est une suite de sous-groupes aléatoires invariants de G, elle converge vers $\mu \in \mathrm{IRS}(G)$ si et seulement si on a que, pour touts sous-ensembles finis $A \supset B$ de G :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{\mu_n}(A\cap H = B) = \mathbb{P}_\mu(A\cap H = B).$$

17. La réciproque est fausse : les action sur $X \sqcup X$ et sur X définissent un même sous-groupe aléatoire.

18. On rappelle que, sur un espace compact X, c'est une topologie pour laquelle une suite (μ_n) de mesures converge vers une mesure μ si et seulement si $\int_D f d\mu_n$ converge numériquement vers $\int_X f d\mu$ pour toute fonction f continue sur X.

(ceci suit facilement de la définition de la convergence faible des mesures et du fait que les fonctions indicatrices de sous-ensembles finis engendrent un sous-espace dense pour la topologie duale sur les fonctions continues). Dans le cas où $\mu = \delta_{\{1\}}$ ceci devient :

$$\forall g \in G \setminus \{1\} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{\mu_n}(g \in H) = 0 \tag{2.1}$$

Si chaque μ_n est associé à une action de G sur un espace de probabilité (X,ν_n), la caractérisation (2.1) se traduit immédiatement comme suit :

$$\forall g \in G \setminus \{1\} \quad \lim_{n\to+\infty} \nu_n(x \in X_n :\ g \cdot x = x) = 0.$$

En termes géométriques la convergence au sens Benjamini–Schramm se traduit en termes de convergence des statistiques locales (qui a été introduite avant la notion correspondante en théorie des groupes, cf. [BS01]). On considère l'ensemble $\mathcal{G}^f_{\le d}$ des graphes finis enracinés (pas forcément réguliers) dont les degrés sont au plus d muni de la topologie discrète [19], et à un graphe d-régulier enraciné aléatoire unimodulaire μ et un $R \in \mathbb{N}$ on associe la loi de probabilité $\alpha_{\mu,R}$ sur $\mathcal{G}^f_{\le d}$ qui est la loi suivie par la boule de rayon R autour de la racine d'un graphe aléatoire suivant μ. On dit qu'une suite μ_n de graphes d-réguliers enracinés aléatoires unimodulaires converge au sens de Benjamini–Schramm vers μ si tous les $\alpha_{\mu_n,R}$ convergent faiblement vers $\alpha_{\mu,R}$. Dans le cas de graphes de Schreier de sous-groupes aléatoires dans un groupe donné cette convergence est équivalente à celle dans $\mathrm{IRS}(G)$.

2.5. **Critère de Farber et convergence Benjamini–Schramm de graphes finis.** Un cas particulièrement intéressant de convergence dans $\mathrm{IRS}(G)$ est donné par les suites de sous-groupes d'indice fini convergeant vers le sous-groupe trivial. Si F est un sous-groupe d'indice fini dans G et μ_F est le sous-groupe aléatoire invariant de G supporté sur sa classe de conjugaison on a

$$\mathbb{P}_{\mu_F}(g \in H) = \frac{1}{|G/F|} \sum_{x \in G/F} 1_{g \in xFx^{-1}} = \frac{1}{|G/F|} \sum_{x \in G/F} 1_{x^{-1}gx \in F}. \tag{2.2}$$

On voit donc d'après (2.1) que si F_n est une suite de sous-groupes d'indice fini dans G, on a $\lim_{n\to+\infty} \mu_{F_n} = \delta_{\{1\}}$ si et seulement si, pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, il n'y a qu'une proportion négligeable des F_n-classes de conjugaisons dans la G-classe de conjugaison de g qui sont contenues dans F_n (c'est-à-dire : $|\{x \in G/F_n :\ x^{-1}gx \in F_n\}| = o(|G/F_n|)$). Cette condition sur une suite de sous-groupes a été introduite par Farber [Far98] et sa signification a été clarifiée par Bergeron–Gaboriau [BG04]. On observe immédiatement que si les F_n sont distingués dans G elle revient à demander que tout $g \in G \setminus \{1\}$ n'appartienne qu'à un nombre fini de ceux-ci.

19. Vu la finitude de cet ensemble de graphes elle correspond bien à la topologie définie ci-dessus sur $\mathcal{G}_d$.

La condition de Farber a une interprétation très claire en termes géométriques : la suite μ_{F_n} converge vers $\delta_{\{1\}}$ si et seulement si pour tout $R \in \mathbb{N}$, le nombre de cycles non-triviaux (au sens où le mot lu sur le cycle à partir des marquages d'arêtes est non-trivial dans G) de longueur R dans le graphe de Schreier de G/F_n est négligeable par rapport à $|G/F_n|$. Si G est un groupe libre tous les cycles sont non-triviaux, et on obtient donc un critère purement en termes de théorie des graphes finis pour la convergence de Benjamini–Schramm.

La convergence d'une suite de sous-groupes d'indice fini au sens de Benjamini–Schramm (c'est-à-dire celle des sous-groupes aléatoires invariants qui leur sont associés) vers le sous-groupe trivial, de manière équivalente la condition de Farber, possède une surprenante ubiquité. Un exemple frappant est donné par les cas particuliers suivants de résultats de [ABB+17] :

— Si $G = \mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z})$ et $n \geq 3$ alors toute suite de sous-groupes d'indice fini deux à deux distincts de G converge vers le sous-groupe trivial.

— Si $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ alors toute suite de sous-groupes de congruence [20] deux à deux distincts de G converge vers le sous-groupe trivial.

Un exemple facile à vérifier pour le second résultat est celui des sous-groupes de Hecke : pour $p \geq 2$ soit

$$\Gamma_0(p) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \ c \in p\mathbb{Z} \right\}.$$

Si p est un nombre premier alors $\Gamma/\Gamma_0(p)$ s'identifie à la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ (en effet l'image de $\Gamma_0(p)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ par la réduction modulo p est le stabilisateur de la droite engendrée par $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$). Si $g, x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a alors $x^{-1}g \in \Gamma_0(p)$ si et seulement si g fixe la droite engendrée par $x \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Le terme de droite dans (2.2) dans ce cas est donc égal à $\frac{1}{p+1}$ fois le nombre de points fixes de g dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$: si g n'est pas l'identité modulo p (ce qui est le cas pour presque tout p) alors il a au plus 2 points fixes. On voit donc que le critère de Farber est vérifié pour cette suite de groupes.

En revanche la question de savoir si une suite de sous-groupes d'indice fini dans un réseau irréductible d'un produit de groupes de rang 1 n'ayant pas la propriété (T), est encore complètement ouverte y compris dans le cas le plus simple a priori des réseaux de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

En général on ne peut pas espérer des résultats de convergence automoatique comme ci-dessus. Par exemple, dès que G a un sous-groupe distingué H infini d'indice infini tel que le quotient G/H est résiduellement fini on a vu que G avait une suite de sous-groupes d'indice fini dont la limite est δ_H. Ceci peut arriver dans de nombreux cas : si $G = \mathbb{Z}^r$ $(r \geq 2)$, si G est nilpotent de groupe dérivé infini (par exemple le groupe de Heisenberg formé

20. Un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est dit de congruence si on peut le décrire en termes de conditions modulo n pour un certain entier n, autrement dit s'il contient le noyau du morphisme de réduction modulo n $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; en particulier il est d'indice fini dans Γ.

des matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour $x, y, z \in \mathbb{Z}$), si G est un groupe libre, le groupe fondamental d'une surface ou d'une variété hyperbolique [21] tridimensionelle compacte. Il y a aussi de nombreux exemples de groupes fondamentaux de variétés hyperboliques en dimensions supérieures ayant un quotient abélien infini et dont le groupe dérivé donne donc un exemple.

On peut quand même se demander si la convergence vers le sous-groupe trivial est générique pour les sous-groupes d'indice fini dans un groupe donné G, ce qui peut être formalisé par la question suivante.

Question 1. *Soit G un groupe résiduellement fini. Pour $n \geq 1$ on note $s_n(G)$ le nombre de sous-groupes d'indice n dans G et μ_n le sous-groupe aléatoire invariant défini par*[22] *:*

$$\mu_n = \frac{1}{s_n(G)} \sum_{F \leq G : |G/F| = n} \mu_F.$$

Est-ce-que (μ_n) converge vers $\delta_{\{1\}}$?

La réponse est positive pour les groupes libres (d'après un résultat classique de Bollobás sur le nombre de cycles dans les graphes réguliers aléatoires [Bol80]) et pour les groupes de surface d'après un résultat récent de Magee–Puder [MP23]. Elle est aussi positive dans les groupes abéliens libres (par des arguments de comptage élémentaires). La question est complètement ouverte pour les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques de dimension 3 ou plus.

La réponse est négative dans un produit direct de groupes libres (si $G = F_2 \times F_2$ la limite de μ_n est $\frac{1}{2}\left(\delta_{F_2 \times \{1\}} + \delta_{\{1\} \times F_2}\right)$ et dans le groupe de Heisenberg (la limite est le sous-groupe aléatoire supporté sur le centre).

3. Applications

3.1. **Graphes de Ramanujan.**

Les sous-groupes aléatoires invariants ont été introduits dans [AGV14] pour la démonstration du résultat suivant.

Théorème 1 (Abért–Glasner–Virág)**.** *Soit X_n une suite de graphes finis $2r$-réguliers qui sont Ramanujan*[23]*. Alors ils convergent aus sens de Benjamini–Schramm vers l'arbre $2r$-régulier.*

Pour démontrer ce théorème les auteurs de [AGV14] utilisent un résultat sur les sous-groupes aléatoires invariants qui a un intérêt propre, généralisant le théorème de Kesten sur les sous-groupes distingués. Ils établissent qu'un sous-groupe aléatoire invariant dans un groupe à r générateurs tel que le

21. C'est-à-dire une variété riemannienne de courbure sectionnelle constante négative.

22. On pourrait aussi prendre la moyenne sur les classes de conjugaison plutôt que les sous-groupes mais il semble plausible que cela n'influe pas sur la réponse dans beaucoup de cas.

23. C'est-à-dire qu'ils ont un trou spectral optimal : le spectre de la matrice d'adjacence est contenu dans $[-2\sqrt{2r-1}, 2\sqrt{r-1}]$.

rayon spectral de la matruce d'ajacence du graphe de Schreier est presque sûrement égal à celui de l'opérateur de Markov sur le graphe de Cayley du groupe est presque sûrement moyennable. Un groupe moyennable est un groupe "petit" au sens de ses actions mesurables : c'est le cas par exemple des groupes finis et des groupes résolubles [24]. Les groupes libres non-abéliens ne sont jamais moyennables, ni les groupes qui en contiennent un. Ainsi le seul groupe moyennable pouvant apparaître dans le support d'un sous-groupe aléatoire du groupe libre est le sous-groupe trivial et le résultat sur les graphes de Ramanujan suit (et même un résultat un peu plus général).

3.2. **Nombres de Betti.** Si X est un CW-complexe fini, c'est-à-dire un espace topologique obtenu en recollant un nombre fini de boules dimension par dimension (comme par exemple pour la construction du complexe de Cayley d'un groupe et plus généralement de son espace classifiant), alors il possède des *groupes d'homologie* $H_0(X), \dots, H_d(X)$ (d étant la dimension maximale parmi celles des boules recollées) que l'on calcule de manière combinatoire à partir de la donnée des recollements des boules entre elles. [25] Ce sont des groupes abéliens de type fini et le rang de $H_k(X)$ (autrement dit la dimension de $H_k(X) \otimes \mathbb{Q}$) est appelé le *$k$-ième nombre de Betti* de X et noté $b_k(X)$. Ces invariants s'appliquent à la théorie des groupes : les groupes d'homologie de l'espace classifiant d'un groupe sont des invariants d'isomorphisme et on peut ainsi parler de l'homologie d'un groupe.

L'une des applications de la notion de convergence de Benjamini–Schramm est la détermination du comportement asymptotique des nombres de Betti dans les revêtements finis, dans un cadre très général. Le théorème d'approximation de Lück généralisé par Farber [Far98] montre que si X est un CW-complexe fini avec $\pi_1(X) = G$ et H_n est une suite de sous-groupes d'indice fini de G tels que μ_{H_n} converge vers $\delta_{\{1\}}$ dans $\mathrm{IRS}(G)$ et X_n les revêtements finis de X correspondants aux H_n, alors pour tout $k \geq 0$ la suite des nombres de Betti normalisés $\frac{b_k(X_n)}{|G/H_n|}$ converge vers le k-ième nombre de Betti L^2 de l'action de G sur le revêtement universel de X (ces derniers sont définis de manière similaire aux nombres de Betti, mais en utilisant la théorie de la dimension des modules de Hilbert pour l'algèbre de von Neumann de G).

Outre le fait que la limite ne dépend pas de la suite considérée l'intérêt du théorème est que ces nombres de Betti L^2 ont été calculés explicitement dans

24. En général, on peut définir la moyennabilité d'un groupe G engendré par un ensemble fini S comme le fait que la constante d'isopérimétrie du graphe de Cayley de G par rapport à S est nulle, c'est à-dire qu'il existe dans G une "une suite de Følner" : des sous-ensembles finis A_n tels que $|(SA_n)\Delta A_n| = o(|A_n|)$.

25. Il n'est pas quesion de donner une définition précise ici ; le cas le plus simple est celui des complexes simpliciaux (où les boules sont identifiées à des simplexes et les recollements se font en respectant les faces) qui est décrit dans n'importe quel livre de topologie algébrique. Le groupe $H_k(X)$ ne dépend que des recollements de boules de dimensions $(k+1)$ et k et mesure en gros la taille de l'ensemble des "trous" laissées par celles de dimension $(k+1)$ dans le sous-complexe formé par celles de dimension au plus k.

de nombreux cas. Par exemple si X est une variété hyperbolique de dimension d ils sont tous nuls sauf en degré $\frac{d}{2}$ quand d est pair ; plus généralement un résultat similaire est vrai pour tous les espaces localement symétriques.

3.3. **Soficité.** De manière informelle, un groupe est dit sofique s'il peut être approximé par des presqu'actions sur des ensembles finis ; le cas où ce sont des actions correspond à la finitude résiduelle, mais la notion de soficitié est beaucoup plus générale, par exemple pour un groupe moyennable une suite A_n de sous-ensembles presqu'invariants [26] fournit une approximation sofique. On peut aussi exprimer la soficité de manière géométrique : un groupe est sofique si et seulement si son graphe de Cayley (vu comme graphe aléatoire unimodulaire) est une limite de graphes finis. La finitude résiduelle correspond au cas où on peut prendre des graphes de Schreier du groupe pour cette approximation.

Il n'y a actuellement pas d'exemple certifié de groupe non-sofique (même si certains groupes sont des candidats plausibles). La question de l'existence d'un groupe non-sofique est reliée aux sous-groupes aléatoires invariants par l'observation suivante [AGN17].

Lemme 2. *Un groupe G est sofique si et seulement s'il existe un groupe F et un sous-groupe distingué N tels que $G = F/N$ et δ_N est limite dans* $\mathrm{IRS}(F)$ *d'une suite de sous-groupes aléatoires invariants supportés sur des sous-groupes d'indice fini.*

(Le contenu du lemme est la construction, à partir d'une approximation sofique, d'un groupe libre F et d'un morphisme surjectif de ce dernier vers G, et d'une suite de sous-groupes d'indice fini convergeant vers le noyau.) Si la conclusion du lemme est vérifiée on dit que N est co-sofique dans G ; cette notion s'étend immédiatement à tous les sous-groupes aléatoires invariants de G. La construction de sous-groupes aléatoires invariants qui ne sont pas co-sofiques dans les groupes libres a récemment été annoncée par Bowen–Chapman–Vidick [BCV24].

3.4. **Stabilité.** Le groupe G est dit stable en permutations si toute suite de presqu'actions de G est asymptotiquement équivalente à une suite d'actions (voir l'introduction de [BLT19] pour la définition formelle). Dans [BLT19] cette est reliée à la co-soficité des sous-groupes aléatoires invariants de G (voir la section précédente). Un corollaire est un critère algébrique pour la stabilité en permutations des groupes G pour lesquels Sub_G est dénombrable (par exemple les groupes polycycliques).

4. Problèmes de classification

4.1. **Exemples.** En-dehors du cas où Sub_G est dénombrable il est le plus souvent difficile de décrire précisément l'espace IRS et ses éléments ergodiques. Par exemple Bowen a démontré [Bow15] que si G est libre non-abélien

26. C'est-à-dire une suite de Følner au sens de la note précédente.

alors IRS(G) est un simplexe de Poulsen, c'est-à-dire que l'ensemble de ses points extrémaux y est dense. Sa construction se base sur une procédure aléatoire de modification de graphes de Schreier, donc sur la description géométrique des sous-groupes aléatoires invariants du groupe libre.

À l'opposé, une situation où la description de tous les sous-groupes aléatoires invariants est accessible est celle où G est un réseau irréductible dans un groupe de rang supérieur ayant la propriété (T) : un corollaire du théorème de Stuck–Zimmer [27] est que les seuls sous-groupes aléatoires invariants ergodiques de G sont donnés par ses sous-groupes d'indice fini et les sous-groupes centraux. C'est d'ailleurs l'ingrédient principal dans la démonstration de la convergence des sous-groupes d'indice fini de tels réseaux énoncé plus haut.

Un autre exemple où IRS(G) est bien compris (mais guère intéressant) est donné par les groupes de Higman–Thompson [28] : Dudko–Medynets [DM14] démontrent que si G est l'un de ces groupes les seuls sous-groupes aléatoires invariants ergodiques de G sont $\delta_{\{1\}}$ et δ_G.

L'espace IRS(G) a été décrit en détail dans quelques autres cas : pour le groupe des bijections à support fini de $\mathbb{N}$ par Vershik [Ver12], pour certaines généralisation du groupe des allumeurs de réverbères par Bowen–Grigorchuk–Kravchenko [BGK15].

4.2. **Sous-groupes aléatoires invariants en courbure négative.** Dans cette section on considère des groupes G agissant de manière *géométrique* (c'est-à-dire proprement discontinûment et avec un quotient compact) sur des espaces X à courbure négative (en un sens qui peut varier et que l'on précisera ci-dessous), et on veut donner des propriétés géométriques distinctives des sous-groupes aléatoires invariants de G. Ces propriétés sont forcément assez vagues ; elles concernent la "géométrie à l'infini" du groupe G de différentes manières. Une première manière d'exprimer cette géométrie, valable dans tous les cas discutés ici, est d'étudier l'action de G et de ses sous-groupes sur le *bord à l'infini* [29] ∂X de X. L'invariant le plus simple en est l'*ensemble limite* d'un sous-groupe H de G qui est l'ensemble des points d'accumulation sur ∂X de n'importe quelle orbite de H dans X. Comme G et tous ses sous-groupes d'indice fini agissent de manière cocompact sur X, leurs ensembles limites sont toujours égaux à ∂X. Cette propriété a été généralisée aux sous-groupes aléatoires invariants dans deux cas très généraux : par Osin [Osi17] si X est hyperbolique au sens de Gromov [30], et

27. Il s'agit d'un résultat sur les actions ergodiques de ces groupes de Lie, on en discutera un peu dans la dernière section.

28. Ce sont des groupes simples infinis de présentation finie, qui sont des sous-groupes du groupe des bijections affines par morceaux du cercle (la définition précise est donnée dans l'article cité ci-dessous : pour assurer la simplicité il faut prendre les groupes dérivés).

29. Dans le cas où X est géodésique et localement compact, c'est la compactification de X obtenue en ajoutant un point à l'infini de tous les rayons géodésiques et en identifiant ceux qui proviennent de rayons restant à distance bornée l'un de l'autre.

30. Plus précisément il faut ajouter l'hypothèse que le sous-groupe aléatoire n'est presque sûrement pas contenu dans le plus grand sous-groupe fini distingué de G.

par Duchesne–Glasner–Lazarovich–Lécureux [DGLL15] si X est un espace CAT(0) de dimension finie. [31]

Un cas particulier à l'intersection des espaces hyperboliques et CAT(0) est celui où X est une variété simplement connexe à courbure strictement négative. Dans ce cas un résultat de Gekhtman–Levit [GL19] donne une caractérisation plus précise de l'action sur le bord : l'exposant critique [32] d'un sous-groupe aléatoire invariant non-trivial est presque sûrement strictement plus grand que la moitié de la dimension de Hausdorff du bord à l'infini. Cette borne inférieure est d'ailleurs optimale en général : elle peut être approchée par des sous-groupes distingués dans le cas où X est l'espace hyperbolique classique.

Une autre manière d'étudier la géométrie de H dans G (ou X) est de considérer l'ensemble des *bouts* [33] de $H\backslash X$ (ou $H\backslash G$). Si G est un groupe infini et μ est un sous-groupe aléatoire invariant de G, alors l'espace des bouts de G/H est μ-presque sûrement vide ou homéomorphe à $\{0\}$, $\{0,1\}$ ou $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ce qui généralise le théorème de Hopf sur les espaces de bouts des groupes de type fini. On peut affiner ce résultat dans le cas où $G = \pi_1(M)$ pour M une variété riemannienne de volume fini. Dans le cas où M est une surface on obtient ainsi qu'il n'y a qu'un ensemble fini (explicite) de possibilités pour le type topologique d'un revêtements associé à un sous-groupe aléatoire invariant d'indice infini de G, comme démontré par Biringer et l'auteur [BR17].

Dans le cas où X est l'espace hyperbolique de dimension 3 et H est un sous-groupe de type fini de G, chaque bout de $H\backslash X$ a une structure géométrique additionnelle ; pour un sous-groupe aléatoire invariant il suit des résultat ci-dessus que ces bout sont toujours dégénérés au sens de Thurston. On ne va pas définir exactement cette notion ici ; un cas particulier est celui où $G = \pi_1(M)$ avec $M = S \times [0,1]/(x,0) = (f(x),1)$ une variété fibrée sur le cercle, où S est une surface et f un difféomorphisme générique [34]. Alors $H = \pi_1(S)$ est un sous-groupe distingué de G et $G/H = \mathbb{Z}$ a deux bouts, plus précisément $H\backslash X$ est homéomorphe à $\mathbb{R} \times S$. Géométriquement, les surface $S \times \{t\}$ sont de diamètre borné mais leur géométrie est très distordue quand $t \to \pm\infty$. On dit que H est un *groupe de surface doublement dégénéré* dans $\mathrm{Isom}(X)$: la définition générale de cette notion est purement géométrique. Abért et Biringer [AB22] ont démontré que tout sous-groupe aléatoire invariant dans un groupe G agissant proprement discontinûment et

31. Un espace géodésique est dit CAT(0) si ses triangles satisfont une certaine inégalité, qui est une égalité dans le cas de l'espace euclidien où la courbure est nulle. Leur résultat inclut la dimension infinie sous une hypothèse technique additionnelle.

32. Pour un sous-groupe H de G c'est la dimension de Hausdorff d'un certain sous-ensemble de l'ensemble limite de H ; c'est aussi le taux de croissance exponentiel des orbites de H dans X.

33. Un bout d'un espace topologique T est une suite $B_1 \supset \cdots \supset B_n \cdots$, chaque B_n étant une composante connexe de $T \setminus K_n$ où les K_n sont compacts, $K_{n+1} \subset K_n$ et $T = \bigcup_n K_n$, modulo l'équivalence évidente.

34. En un sens précis : il faut que f soit "pseudo-Anosov".

de manière cocompact sur X est un groupe de surface doublement dégénéré s'il est presque sûrement finiment engendré. La construction de variétés hyperboliques fibrées et la notion de groupe de surace doublement dégénéré ne se généralisent pas aux dimensions supérieures, mais il y a de nombreux exemples de variétés hyperboliques de dimension 4 ou plus dont les groupes fondamentaux contiennent des sous-groupes distingués infinis de type fini tels que le quotient est cyclique. Un résultat de Kielak [Kie20], qui s'applique par exemple aux groupes fondamentaux variétés hyperboliques de dimension au moins 3 contenant des hypersurfaces totalement géodésiques, permet en particulier de construire de nombreux tels exemples.

4.3. **Quelques exemples supplémentaires.** Pour de nombreux groupes fondamentaux G de variétés hyperboliques réelles on sait construire un surjection d'un sous-groupe d'indice fini de G vers un groupe libre non-abélien. On obtient alors, en tirant en arrière les exemples construits par Bowen pour le groupe libre, un plongement (respectant les points extrémaux) du simplexe de Poulsen dans $\mathrm{IRS}(G)$ qui est donc un espace riche.

On peut cependant se demander s'il existe aussi beaucoup de sous-groupes aléatoires invariants qui sont "propres" au groupe G, au sens où ils ne viennent pas d'un morphisme vers ou depuis un autre groupe. On peut formaliser ceci en définissant le noyau de $\mu \in \mathrm{IRS}(G)$ comme le plus grand sous-groupe contenu dans μ-presque tout sous-groupe, et son enveloppe comme le plus petit sous-groupe qui contient μ-presque tou sous-groupe. À la suite de Glasner–Hase [GH23] on dit que μ est fidèle si son noyau est $\{1\}$ et englobant ("spanning") si son enveloppe est G, et on pose la question suivante.

Question 2. *Est-ce-que tout groupe hyperbolique non-élémentaire contient un sous-groupe aléatoire invariant errgodique qui est fidèle et englobant ?*

Cette question est ouverte en-dehors du cas des groupes libres et des groupes de surfaces. Glasner et Hase montrent que tout groupe hyperbolique [35] contient un sous-groupe aléatoire fidèle. Certains groupes de Coxeter hyperboliques ou relativement hyperboliques contiennent des sous-groupes aléatoires invariants fidèles englobants (par exemple les groupes de réflection des polyèdres compacts à angles droits dans les espaces hyperboliques de dimension 3 et 4).

5. Autres sujets

5.1. **Groupes localement compacts.** L'espace de Chabauty et les sous-groupes aléatoires invariants peuvent être définis pour n'importe quel groupe G localement compact. Un cas particulièrement intéressant de sous-groupe aléatoire invariant est donné par les classes de conjugaison suppportant une mesure invariante finie : dans le cas où G est un groupe de Lie semisimple (par exemple $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$) elles correspondent aux sous-groupes discrets de covolume fini (et aux sous-groupe distingués qui sont en nombre fini et sans

35. En fait il leur suffit même que le groupe soit "acylindriquement hyperbolique".

grand intérêt). Le résultat ci-dessus sur les sous-groupes aléatoires invariants de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un cas particulier de résultats beaucoup plus généraux sur les sous-groupes aléatoires invariants des groupes de Lie semisimple. Par exemple, le théorème de Stuck–Zimmer [SZ94] implique que tous les IRS des groupes simples de rang supérieur sont supportés sur les réseaux. Pour les groupes de Lie semisimples la situation est plus compliquée : lorsque le groupe a la propriété (T) de Kazhdan le théorème de Stuck–Zimmer se généralise bien, mais dans les cas restants le problème de décrire $\mathrm{IRS}(G)$ est complètement ouvert (par exemple on ne sait pas si $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ contient des sous-groupes aléartoires invariants irréductibles qui ne sont pas supportés sur ses réseaux). Ces résultats ont aussi été généralisés aux groupes de Lie sur des corps non-archimédiens par Gelander et Levit [GL18]. Pour ce qui est des résultats sur la convergence de Benjamini–Schramm, on sait que toute suite de réseaux arithmétiques de congruence irréductibles deux à deux distincts dans un groupe semisimple (ce qui généralise l'exemple des sous-groupes de congruence de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$) converge vers le sous-groupe trivial ; ceci est dû à Frączyk pour les groupes de type A_1, et le cas général à Frączyk, Hurtado et l'auteur [FHR22].

Une autre jolie application de l'espace $\mathrm{IRS}(G)$ pour un groupe localement compact est la suivante. Si G est un groupe localement compact la topologie de Benjamini–Schramm sur le sous-ensemble de Sub_G formé des sous-groupes aléatoires invariants supportés sur les classes de conjugaison des réseaux de G fait de l'ensemble de ces classes un espace topologique métrisable, et sa fermeture dans $\mathrm{IRS}(G)$ en donne une compactification. Dans le cas où $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$, les classes de réseaux sans torsion correspondent aux surfaces de Riemann de type conforme fini [36] et on obtient donc ainsi des compactifications des especaes de modules de telles surfaces. Cette compactification est à peu de choses près la même que celle de Deligne–Mumford [37], comme démontré dans la thèse de Krifka [Kri20].

5.2. **Sous-groupes stationnaires.** Si ν est une mesure de probabilité symétrique sur le groupe G et μ une mesure de probabilité sur Sub_G on peut considérer $\nu * \mu = \int_G \iota_* \mu d\nu(g)$. On dit que μ est stationnaire (pour la mesure ν) si $\nu * \mu = \mu$. Un sour-groupe aléatoire invariant est évidemment stationnaire et la réciproque est fausse en-dehors des groupes virtuellement abéliens. Cette notion permet donc de traiter des problèmes pour lesquels les sous-groupes aléatoires invariants n'ont aucun intérêt, par exemple Frączyk–Gelander démontrent dans [FG23] que tout sous-groupe discret d'un groupe de rang

36. C'est-à-dire les surfaces de Riemann compactes auxquelles on a enlevé un sous-ensemble fini de points, les pointes ou cuspides de la surface.

37. Plus précisément un point de la compactification de Deligne–Mumford correspond à un ensemble fini de surfaces de type conforme finie qui sont rattachées sur des pointes ; la compactification par les sous-groupes aléatoires invariants ne voit que les surfaces et pas la combinatoire des rattachements : il y a donc une application naturelle à fibres finies de la première vers la seconde.

supérieur pour lequel le rayon d'injectivité maximal du quotient localement symétrique associé est fini, est nécéssairement de covolume fini.

5.3. **Actions et caractères.** Si G agit sur un espace de probabilité (X, ν) le caractère associé est la fonction $g \mapsto \nu(\{x : g \cdot x = x\})$ sur G que l'on a vue ci-dessus. L'étude des caractères plus généraux (les fonctions définies positives normalisées et constantes sur les classes de conjugaison dans G) est un sujet important en théorie des algèbres d'opérateurs, voir par exemple les résultats de Boutonnet–Houdayer [BH21] qui généralisent le théorème de Stuck–Zimmer.

Par ailleurs une action de G est très loin d'être caractérisée par le caractère ou même le sous-groupe aléatoire invariant qui lui sont associés, et l'étude de l'espace des actions (muni d'une topologie naturelle) est un sujet intéressant pour la théorie ergodique. Un livre relativement récent sur le sujet est [Kec10].

5.4. **Graphes et variétés unimodulaires.** La notion de graphe unimodulaire utilisée ci-dessus pour décrire de manière géométrique les sous-groupes aléatoires invariants du groupe libre a été introduite bien avant [AGV14] par Aldous et Lyons dans [AL07]. Cet article démontre de nombreux résultats sur la structure de ces graphes et a une postérité conséquente ; il n'est pas question de décrire ici ces résultats et leurs suites.

Une notion de géométrie riemannienne correspondante a été introduite par Abért et Biringer dans [AB22]. Outre le résultat sur les sous-groupes aléatoires finiment engendrés dans le groupe des isométries de l'espace hyperbolique de dimension 3 cités plus haut l'article introduit le "postulat anti-noyau" ("no-core principle") qui formalise l'idée qu'une variété aléatoire unimodulaire est à peu près la même partout.

6. Remerciements

Je tiens à remercier Mikael de la Salle pour avoir participé activement à la mise en forme de la version finale de l'article. Je suis aussi redevable aux deux personnes anonymes qui l'ont relu attentivement pour leurs critiques et suggestions.

Références

[AB22] Miklós Abért and Ian Biringer. Unimodular measures on the space of all Riemannian manifolds. *Geom. Topol.*, 26(5) :2295–2404, 2022.

[ABB+17] Miklos Abert, Nicolas Bergeron, Ian Biringer, Tsachik Gelander, Nikolay Nikolov, Jean Raimbault, and Iddo Samet. On the growth of L^2-invariants for sequences of lattices in Lie groups. *Ann. Math. (2)*, 185(3) :711–790, 2017.

[AGN17] Miklos Abert, Tsachik Gelander, and Nikolay Nikolov. Rank, combinatorial cost, and homology torsion growth in higher rank lattices. *Duke Math. J.*, 166(15) :2925–2964, 2017.

[AGV14] Miklós Abért, Yair Glasner, and Bálint Virág. Kesten's theorem for invariant random subgroups. *Duke Math. J.*, 163(3) :465–488, 2014.

[AL07] David J. Aldous and Russell Lyons. Processes on unimodular random networks. *Electron. J. Probab.*, 12 :1454–1508, 2007.

[BCV24] Lewis Bowen, Michael Chapman, and Thomas Vidick. The Aldous–Lyons conjecture II : Undecidability, 2024.

[BG04] N. Bergeron and D. Gaboriau. Asymptotics of Betti numbers, l^2-invariants and laminations. *Comment. Math. Helv.*, 79(2) :362–395, 2004.

[BGK15] Lewis Bowen, Rostislav Grigorchuk, and Rostyslav Kravchenko. Invariant random subgroups of lamplighter groups. *Isr. J. Math.*, 207 :763–782, 2015.

[BH21] Rémi Boutonnet and Cyril Houdayer. Stationary characters on lattices of semisimple Lie groups. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 133 :1–46, 2021.

[BLT19] Oren Becker, Alexander Lubotzky, and Andreas Thom. Stability and invariant random subgroups. *Duke Math. J.*, 168(12) :2207–2234, 2019.

[Bol80] Bela Bollobas. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Comb.*, 1 :311–316, 1980.

[Bow15] Lewis Bowen. Invariant random subgroups of the free group. *Groups Geom. Dyn.*, 9(3) :891–916, 2015.

[BR17] Ian Biringer and Jean Raimbault. Ends of unimodular random manifolds. *Proc. Am. Math. Soc.*, 145(9) :4021–4029, 2017.

[BS01] Itai Benjamini and Oded Schramm. Recurrence of distributional limits of finite planar graphs. *Electron. J. Probab.*, 6 :13, 2001. Id/No 23.

[DGLL15] Bruno Duchesne, Yair Glasner, Nir Lazarovich, and Jean Lécureux. Geometric density for invariant random subgroups of groups acting on CAT(0) spaces. *Geom. Dedicata*, 175 :249–256, 2015.

[DM14] Artem Dudko and Konstantin Medynets. Finite factor representations of Higman-Thompson groups. *Groups Geom. Dyn.*, 8(2) :375–389, 2014.

[Far98] Michael Farber. Geometry of growth : approximation theorems for L^2 invariants. *Math. Ann.*, 311(2) :335–375, 1998.

[FG23] Mikolaj Fraczyk and Tsachik Gelander. Infinite volume and infinite injectivity radius. *Ann. Math. (2)*, 197(1) :389–421, 2023.

[FHR22] Mikolaj Fraczyk, Sebastian Hurtado, and Jean Raimbault. Homotopy type and homology versus volume for arithmetic locally symmetric spaces, 2022.

[GH23] Yair Glasner and Anton Hase. Faithful invariant random subgroups in acylindrically hyperbolic groups. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 55(4) :1760–1772, 2023.

[GL18] Tsachik Gelander and Arie Levit. Invariant random subgroups over non-Archimedean local fields. *Math. Ann.*, 372(3-4) :1503–1544, 2018.

[GL19] Ilya Gekhtman and Arie Levit. Critical exponents of invariant random subgroups in negative curvature. *Geom. Funct. Anal.*, 29(2) :411–439, 2019.

[Kec10] Alexander S. Kechris. *Global aspects of ergodic group actions*, volume 160 of *Math. Surv. Monogr.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2010.

[Kie20] Dawid Kielak. Residually finite rationally solvable groups and virtual fibring. *J. Am. Math. Soc.*, 33(2) :451–486, 2020.

[KQ19] Alexander S. Kechris and Vibeke Quorning. Co-induction and invariant random subgroups. *Groups Geom. Dyn.*, 13(4) :1151–1193, 2019.

[Kri20] Yannick Krifka. On the irs compactification of moduli space, 2020.

[MP23] Michael Magee and Doron Puder. The asymptotic statistics of random covering surfaces. *Forum Math. Pi*, 11 :51, 2023. Id/No e15.

[Osi17] D. Osin. Invariant random subgroups of groups acting on hyperbolic spaces. *Proc. Am. Math. Soc.*, 145(8) :3279–3288, 2017.

[SZ94] Garrett Stuck and Robert J. Zimmer. Stabilizers for ergodic actions of higher rank semisimple groups. *Ann. Math. (2)*, 139(3) :723–747, 1994.

[Tót21] László Márton Tóth. Invariant Schreier decorations of unimodular random networks. *Ann. Henri Lebesgue*, 4 :1705–1726, 2021.

[Ver12] A. M. Vershik. Totally nonfree actions and the infinite symmetric group. *Mosc. Math. J.*, 12(1) :193–212, 2012.

Institut de Mathématiques de Marseille, UMR 7373, CNRS, Aix-Marseille Université

Email address: `jean.raimbault@univ-amu.fr`