

# SURFACE PLONGÉES

ADRIEN BOULANGER

Dans ce cours nous travaillons dans l'espace affine associé à  $\mathbb{R}^3$  ; c'est à dire qu'un vecteur n'est pas forcément basé à l'origine de  $\mathbb{R}^3$  mais peut l'être n'importe où. On dira qu'un vecteur  $X_p$  est en  $p$ , basé en  $p$ , au dessus de  $p$  ou encore passant par  $p$  en fonction de l'humeur de l'auteur et du contexte. La même remarque vaut aussi pour les plans. Dans tout les cas, on appellera l'espace vectoriel linéaire associé, c'est à dire l'espace que l'on obtient en échangeant le point base pour l'origine de  $\mathbb{R}^3$ , la direction de l'espace vectoriel initial. Afin de distinguer un élément d'un espace affine de l'élément de l'espace vectoriel donné par sa direction, on lui ajoutera en indice le point base. Donc si  $p \in \mathbb{R}^3$ , on notera  $X_p$  un vecteur au dessus de  $p$  (vu comme élément de l'espace affine), et l'on notera simplement  $X$  le translaté de  $X_p$  à l'origine de  $\mathbb{R}^3$  (c'est alors un élément d'un espace vectoriel).

Si  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  est une application lisse et si  $p \in \mathbb{R}^n$  on notera par  $d\Phi_p$  l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^k$  est la jacobienne de  $\Phi$  en  $p$ . Précisément, en écrivant

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_k \end{pmatrix},$$

le coefficient de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne de  $(d\Phi)_p$  s'écrit

$$(d\Phi_p)_{i,j} := (\partial_j \Phi_i)(p),$$

où l'on a noté  $\partial_j$  la dérivation partielle par rapport à la  $j$ -ième variable.

## 1. DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Le but de ce cours est de se familiariser avec les objets de la géométrie différentielle à travers le cas des surfaces plongées. Commençons par la définition clé.

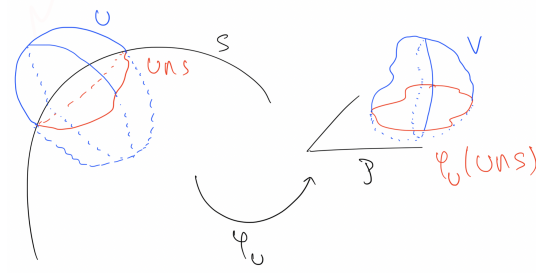
**Définition 1.1** (Surfaces plongées dans  $\mathbb{R}^3$ ). *On dit d'un sous ensemble  $S \subset \mathbb{R}^3$  que c'est une surface plongée si pour tout point  $p \in S$  il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  qui contient  $p$ , un difféomorphisme  $\varphi$  de  $U$  sur un ouvert de  $V \subset \mathbb{R}^3$  et un plan  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que*

$$\varphi(U \cap S) \subset \mathcal{P}.$$

*On dit d'une surface plongée qu'elle est compacte si elle est compacte en tant que sous ensemble de  $\mathbb{R}^3$ .*

L'exemple le plus simple est peut-être celui d'un plan de  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce cas on peut prendre comme unique ouvert  $\mathbb{R}^3$  tout entier et comme difféomorphisme l'identité. Cette définition est au cœur de la théorie : c'est dans cet esprit que l'on va pouvoir faire de la géométrie différentielle dite intrinsèque. En ce qui nous concerne, dans le cadre des surfaces plongées, il est souvent plus utile de penser 'ligne de niveau régulière d'une fonction' ou 'paramétrisation locale et globale'.

Commençons par le point de vue des des lignes de niveau de fonctions régulières. Rappelons la définition suivante.



**Définition 1.2** (valeur régulière). Soit  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ . On dit d'un point  $t \in \mathbb{R}^n$  que c'est une valeur régulière pour l'application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  si pour tout  $q \in f^{-1}(\{t\})$  la différentielle de  $f$  en  $q$  est surjective. On dira aussi que  $f$  est régulière en  $t$  si  $t$  est une valeur régulière de  $f$ .

Notons que cette définition impose en particulier que  $k \geq n$ . Il faut comprendre de cette définition qu'on a de la place autour de la ligne de niveau  $f^{-1}(\{t\})$  : elle impose à  $f$  de varier au voisinage de tout point de  $f^{-1}(\{t\})$  dans toutes les directions qui ne sont pas tangentes à  $f^{-1}(\{t\})$ .

On peut alors utiliser le théorème d'inversion local pour démontrer le résultat fondateur suivant.

**Proposition 1.3.** Si  $f$  est une application lisse d'un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}$  une valeur régulière de  $f$  alors  $f^{-1}(\{t\})$  est une surface plongée de  $\mathbb{R}^3$ .

L'exercice suivant donne une démonstration à cet énoncé.

#### Exercice 1.4.

Dans le contexte des hypothèses de l'énoncé ci-dessus. Soit  $p$  un point de  $S := f^{-1}(\{t\})$ . On note  $\mathcal{P}_p$  le plan affine de  $\mathbb{R}^3$  qui passe en  $p$  de direction donné par le noyau de la différentielle de  $f$  en  $p$ . On note  $\pi_p$  le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{P}_p$ .

1. Faire un dessin contenant tous les objets mentionnés.
2. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathcal{P}_p \times \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\pi_p(x), f(x)) \end{aligned}$$

envoie  $S$  dans  $\mathcal{P} \times \{0\}$ .

3. Montrer que  $(d\varphi)_p$  est inversible.
4. En déduire, à l'aide du théorème d'inversion local, les conclusions de la Proposition 1.3.

Voyons tout de suite 2 exemples.

1. **Les sphères de  $\mathbb{R}^3$ .** Ce sont les lignes de niveaux de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ p &\mapsto \|p\|^2 \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne. Ces exemples sont compacts.

2. **Les hyperboloïdes.** Ce sont les lignes de niveaux de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \setminus \{x^2 + y^2 = t^2\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (x, y, t) &\mapsto x^2 + y^2 - t^2 \end{aligned}$$

Ces exemples sont non compacts.

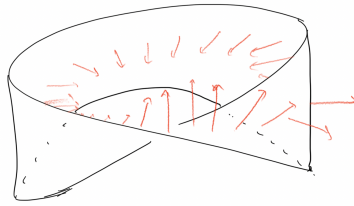
**Exercice 1.5.** Montrer que toutes les valeurs images des fonctions ci-dessus sont des valeurs régulières.

On peut se demander si on peut toujours réaliser une surface plongée de  $\mathbb{R}^3$  comme la ligne de niveau régulière d'une fonction. C'est en tout cas toujours possible localement, comme nous le montre l'exercice suivant.

**Exercice 1.6.** Soit  $S$  une surface plongée et  $p \in S$ . Montrer qu'il existe un voisinage  $U$  de  $p$  et une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$U \cap S = f^{-1}(\{0\}) .$$

On peut en fait montrer, et ce n'est pas évident, que toute surface compacte plongée de  $\mathbb{R}^3$  voit son complémentaire dans  $\mathbb{R}^3$  avoir deux composantes connexes, l'une non bornée que l'on appelle l'extérieur, et l'autre bornée, appelée l'intérieur. En particulier on peut réaliser, globalement, toute surface compacte plongée  $S$  comme la ligne de niveau 0 de la fonction distance signée à  $S$ , où le signe dépend de la volonté du lecteur tant que ça valeur diffère sur l'intérieur et l'extérieur. On ne peut cependant pas espérer cela pour les surfaces non compacte, comme nous le montre l'illustration ci-dessous représentant un ruban de Möbius.



En ce qui concerne l'étude locale des surfaces plongées on aura souvent recours à la notion de paramétrisation.

**Définition 1.7** (Plongements, paramétrisations et coordonnées.). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , on dit d'une application  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  que c'est un plongement si

- elle est injective ;
- sa différentielle est injective en tout point de  $U$ .

Si  $S$  est une surface plongée et si l'image de  $\varphi$  est contenue dans  $S$  on dit que c'est une paramétrisation locale de  $S$ . Les images des coordonnées de  $\mathbb{R}^2$  induite sur  $U$  par un plongement sont appelées des coordonnées de  $S$ .

Notons qu'il existe au voisinage de tout point  $p$  d'une surface plongée  $S$  un paramétrage local de  $S$ . Il suffit de repartir de la définition 1.1 (on reprend les notations de la définition) : on peut vérifier que  $\varphi^{-1}$  restreinte à  $\mathcal{P}$  est un paramétrage local de  $S$ .

Voyons un exemple de surface plongée paramétrée, **le tore plongé**. On pose  $U := ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$  et

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\mapsto (2 + \cos \theta)u_\phi + \sin \theta \partial_z \end{aligned}$$

où

$$u_\phi := \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \partial_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

**Exercice 1.8.**

- 1. Montrer que l'image de l'application précédente est contenue dans l'ensemble  $A$  des points à distance 1 du cercle de centre 0 et de rayon 2 du plan  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ .
- 2. Quel est le lien entre ce cercle et la coordonnée  $\varphi$  ?
- 3. On note  $\mathcal{P}$  n'importe quel plan de  $\mathbb{R}^3$  qui passe par 0 et qui contient le vecteur  $(0, 0, 1)$ . Montrer que  $A \cap \mathcal{P}$  est une union de deux cercles. Quel est le lien avec la coordonnée  $\theta$  ?
- Montrer que l'application

$$\begin{aligned} ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est une paramétrisation locale de la sphère. On appelle les coordonnées qui en résulte les **coordonnées sphériques**.

**Remarque 1.9.** L'image de l'application ci-dessus est presque un tore, il manque en fait deux cercles correspondants aux équations  $\phi = 0$  et  $\theta = 0$ . C'est artificiel ; en périodisant les coordonnées, c'est à dire en échangeant  $U$  pour  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ , on aurait une paramétrisation globale du tore et l'image serait bien une surface plongée compacte. On notera à partir de maintenant

$$\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} .$$

On justifie cette notation par le fait que l'ensemble  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  est topologiquement équivalent à un intervalle dont on aurait recollé les bords, c'est à dire à topologiquement équivalent à un cercle.

Venons en donc à la définition, cruciale, de plan tangent.

**Définition 1.10** (plan tangent). Soit  $S$  une surface plongée,  $p \in S$ ,  $U$  un voisinage de  $p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  régulière en 0 telle que  $U \cap S = f^{-1}(\{0\})$ . On définit le plan tangent  $T_p S$  comme le plan affine basé en  $p$  dont la direction est donnée par le noyau de  $(df)_p$ .

Il n'est pas clair *a priori* que la définition ne dépende pas du choix fait sur la fonction  $f$ . Nous le vérifierons dans un instant.

**Exercice 1.11.** Montrer que le plan tangent en un point  $p$  d'une sphère centrée en 0 est le plan affine basé en  $p$  orthogonal à la droite passant par 0 et  $p$ .

Voyons maintenant la relation entre plan tangent et paramétrisation locale.

**Proposition 1.12.** Soit  $S$  une surface plongée,  $p \in S$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  qui contient 0 et  $\Phi : U \rightarrow S$  une paramétrisation locale de  $S$  telle que  $\Phi(0) = p$ . Alors  $T_p(S)$  est un sous espace affine dont la direction est donnée par l'image de  $(d\Phi)_0$ .

Le premier des deux exercices suivant a pour but de démontrer la proposition ci-dessus.

**Exercice 1.13.**

1. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  régulière en 0,  $\Phi : V \rightarrow f^{-1}(\{0\})$  une paramétrisation locale et  $p \in f^{-1}(\{0\})$ . Montrer que

$$\ker((df)_p) = \text{Im}((d\Phi)_p) ,$$

où l'on a noté  $\text{Im}(A)$  l'image d'une application  $A$ . En déduire que  $T_p S$  ne dépend pas du choix fait sur  $f$ .

2. Montrer que la direction des plans tangents au tore plongé aux points de coordonnées  $\theta = \pi/2$  et  $\phi$  quelconque est le plan horizontal (orthogonal au vecteur  $(0, 0, 1)$ ).

Comme le suggère la proposition 1.3, on peut localement paramétrer une surface plongée par son plan tangent. Cela découle de la proposition suivante. Rappelons que l'on a noté  $\pi_p$  le projecteur orthogonal affine de  $\mathbb{R}^3$  sur  $T_p S$ .

**Proposition 1.14.** *Pour tout  $p \in S$  il existe un voisinage  $U$  de  $p$  tel que l'application*

$$\begin{aligned} U \cap S &\rightarrow T_p(S) \\ q &\mapsto \pi_p(q) \end{aligned}$$

*est un difféomorphisme sur son image.*

La démonstration de cette proposition est une paraphrase de l'exercice 1.4. Cette proposition implique en particulier que l'application inverse à celle donnée dans l'énoncé est une paramétrisation locale de la surface  $S$ , paramétrisation que l'on pourrait qualifier de privilégiée. On verra dans la section suivante que, du point de vue de la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ ,  $T_p(S)$  est la meilleure approximation de  $S$  parmi les plans basés en  $p$ .

## 2. COURBES DE $\mathbb{R}^3$ ET DES SURFACES PLONGÉES.

**2.1. Courbes.** Commençons par la notion de courbe, probablement familière du lecteur.

**Définition 2.1** (courbes de  $\mathbb{R}^3$  et d'une surface plongée). *On dit*

- *d'une application lisse d'un intervalle dans  $\mathbb{R}^3$  (resp. dans une surface plongée  $S$ ) dont la dérivée ne s'annule jamais que c'est une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^3$  (resp. de  $S$ ) ;*
- *d'un sous ensemble de  $\mathbb{R}^3$  (resp. de  $S$ ) que c'est une courbe si c'est l'image d'une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^3$  ((resp. de  $S$ )) ;*
- *d'un vecteur  $X_p$  au dessus de  $p$  qu'il est tangent à la courbe  $\gamma$  s'il existe une paramétrisation  $t \mapsto \gamma(t)$  de  $\gamma$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma'(0) = X_p$ .*

**Exercice 2.2.**

1. Identifier l'ensemble

$$\mathcal{C}_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} .$$

2. Montrer que pour tout plan  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  basé à l'origine tel que  $(0, 0, 1) \notin \mathcal{P}$  l'ensemble  $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$  est une courbe.

3. Pourquoi a-t-on demandé que  $\mathcal{P}$  ne contienne pas le vecteur  $(0, 0, 1)$  ?

**Remarque 2.3.** La définition de courbe proposée ci-dessus est un peu restrictive : on demande au paramétrage d'être lisse et que la dérivée ne s'annule jamais. Dans la plupart des textes, la définition ci-dessus réfère plutôt à une courbe lisse. La notion, plus générale, de courbe demandera plutôt d'avoir un paramétrage continu, ou peut-être Lipschitz afin de pouvoir définir la longueur. Nous adresserons pas (ou peu) les questions de régularités dans ces notes et nous allons omettre les discussions les concernant.

Voyons maintenant comment construire le plan tangent de manière intrinsèque à l'aide des courbes de  $S$ .

**Proposition 2.4.** *On a la caractérisation suivante du plan tangent au point  $p$  d'une surface plongée  $S$*

$$T_p S = \{\gamma'(0) \mid \gamma \text{ courbe de } S \text{ et } \gamma(0) = p\} .$$

Cette proposition est théoriquement intéressante car elle ne fait pas directement appel au fait que la surface est plongée : seules les courbes contenues dans la surface sont nécessaires pour décrire le plan tangent. C'est ce point de vue qu'on l'on peut généraliser au cadre de la géométrie différentielle intrinsèque, au cadre des variétés différentielles. Notons par ailleurs qu'à la lumière de cette proposition, il devient clair que le plan tangent ne dépend pas d'un choix de fonction dont la ligne de niveau est  $S$ .

**Exercice 2.5.**

1. Montrer que

$$\{\gamma'(0), \gamma \text{ courbe de } S \text{ et } \gamma(0) = p\} \subset T_p S.$$

2. Montrer l'autre inclusion en utilisant les conclusions de la proposition 1.14.

Nous commençons vraiment à faire de la géométrie avec la définition suivante.

**Définition 2.6** (longueur d'une courbe). Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe paramétrée, on définit sa longueur par

$$l(\gamma) := \int_I \|\gamma'(t)\| dt ,$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne qui vient du produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$ .

On peut vérifier que la longueur d'une courbe ne dépend pas du choix fait sur le paramétrage, ce qui en fait une quantité géométrique. L'exercice suivant en propose une démonstration. Notons qu'on utilise le fait que  $\gamma'$  ne s'annule pas car, sinon, on pourrait faire des allers-retours le long de la courbe ce qui augmenterait sa longueur de manière artificielle.

**Exercice 2.7.** Soit  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  deux courbes paramétrées de même image. Montrer que

$$\int_{I_1} \|\gamma_1'(t)\| dt = \int_{I_2} \|\gamma_2'(t)\| dt .$$

On peut toujours reparamétriser une courbe de telle sorte à ce que sa vitesse soit constante en norme égale à 1. On dit d'une telle courbe qu'elle est **paramétrée par longueur d'arc**.

**Exercice 2.8.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée. Montrer qu'il existe un difféomorphisme  $\Phi : ]0, l(\gamma)[ \rightarrow I$  tel que pour tout  $t \in ]0, l(\gamma)[$

$$\|(\gamma \circ \Phi)'(t)\| = 1 .$$

On peut, grâce à la notion de longueur définie ci-dessus, définir une distance sur  $\mathbb{R}^3$  comme ceci : si  $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$d(x, y) := \inf_{\mathcal{C}(x, y)} l(\gamma) ,$$

où  $\mathcal{C}(x, y)$  est l'ensemble des courbes dont les extrémités sont  $x$  et  $y$ . Il est aisé de montrer que  $d$  satisfait à l'inégalité triangulaire mais un peu moins facile que  $d(x, y) > 0$  si  $x \neq y$ . On peut dans ce contexte, comme le montre l'exercice suivant, directement montrer que la distance définie ci-dessus correspond à la distance euclidienne.

**Exercice 2.9.**

1. Montrer que  $d$  satisfait l'inégalité triangulaire.

2. Montrer que si  $x, y \in \mathbb{R}^3$  alors

$$d(x, y) \leq \|x - y\| .$$

3. Montrer que si  $x, y \in \mathbb{R}^3$  alors

$$d(x, y) \geq \|x - y\| .$$

*Indication : on pourra utiliser la projection orthogonale sur la droite passant par  $x$  et  $y$ .*

4. Caractériser le cas d'égalité.

Il est intéressant de faire le lien avec la mécanique classique. Rappelons l'équation de Newton. Si une particule de masse  $m$  est soumise à une force, que l'on modélise comme un champ de vecteurs  $F_t$  (qui peut dépendre du temps  $t$ ), alors sa trajectoire  $t \mapsto \gamma(t)$  est paramétrée par la solution de l'équation différentielle

$$\gamma''(t) = F_t(\gamma(t)) ,$$

avec les conditions initiales donnée par la position et la vitesse de la particule en  $t = 0$ .

Dans le cas de la particule libre, c'est à dire soumise à aucune force, l'équation différentielle devient  $\gamma''(t) = 0$ . Les solutions sont des droites paramétrées, en particulier des courbes qui minimisent la longueur entre n'importe lesquelles de ses paires de points.

On peut se demander si ce phénomène est une coïncidence. L'exercice suivant exhibe un lien. Le point de vue qu'il propose est en fait le bon cadre pour la généralisation aux variétés riemanniennes.

**Exercice 2.10.** . Le but de cet exercice est de démontrer qu'une courbe lisse qui est un minimum local pour la fonctionnelle longueur est en fait un segment. Soit  $\gamma_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe lisse paramétrée par longueur d'arc d'extrémités  $x, y \in \mathbb{R}^3$  telle que

$$l(\gamma_0) := \min_{\gamma \in \mathcal{C}(x, y)} l(\gamma) .$$

On se donne un champ de vecteurs au dessus de  $\gamma$ , c'est à dire une fonction  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . On note

$$H(s, t) := \gamma(t) + sX(t) .$$

1. Donner une condition sur  $X$  afin que pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto H(s, t) \in \mathcal{C}(x, y)$ .
2. Montrer que pour  $s$  assez petit  $t \mapsto H(s, t)$  est une courbe lisse.
3. On note  $\gamma_s(t)$  la courbe  $t \mapsto H(s, t)$  paramétrée par longueur d'arc. Montrer que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} l(\gamma_s) = 0 .$$

3. En déduire que  $\gamma_0$  est d'accélération nulle.

**Remarque 2.11.**

1. Notons que les conclusions de cet exercice sont strictement plus faibles que celles de l'exercice 2.9. Notons également que l'exercice ci-dessus suppose que la courbe  $\gamma_0$  est une courbe lisse. On peut en fait montrer, *a priori*, que les courbes qui sont minimales pour la longueur (ou l'énergie) sont Lipschitz en utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli. Une courbe Lipschitz étant différentiable presque partout, on peut étendre de manière cohérente et continue la définition de longueur à cette classe. On montre ensuite que la courbe minimisante est lisse en utilisant l'exercice ci-dessus : un minimum local (paramétré par longueur d'arc) de la fonctionnelle longueur est d'accélération nulle, donc lisse en tant que solution d'une équation différentielle à coefficients lisses.

2. C'est un fait encore plus général : les trajectoires que suivent les particules soumises aux lois de Newton, c'est à dire les solutions d'une certaine équation

différentielle, sont les trajectoires qui minimisent l'action associée au système, qui généralise le rôle de la longueur (de l'énergie pour être précis). C'est un phénomène courant de nos théories physiques ; on réinterprète souvent les équations de la physique comme solutions d'un problème de minimisation (loi de Newton, relativité générale, équation de Maxwell...).

On peut se demander si le fait que les courbes qui minimisent la longueur soient aussi les courbes d'accélérations nulles dans  $\mathbb{R}^3$  à un équivalent dans le cas des surfaces plongées. Remarquons, à travers la définition suivante, que l'on peut également construire une distance sur une surface plongée grâce à la notion de longueur.

**Définition 2.12.** Soit  $S$  une surface plongée et  $p, q \in S$ . On définit

$$d_S(p, q) := \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_S(p, q)} l(\gamma) .$$

On peut tout aussi facilement que dans  $\mathbb{R}^3$  vérifier l'inégalité triangulaire. Il est plus difficile de démontrer que deux points distincts de  $S$  ne sont pas à distance nul. On peut aussi se demander s'il n'y a pas une notion d'accélération compatible avec la notion de longueur dans ce contexte des surfaces plongées. D'un point de vue cinématique, la trajectoire d'une particule astreinte à se déplacer sur une surface, soumise à aucune autre forces, devrait voir son accélération toujours normale à la surface. La définition suivante devient naturelle.

**Définition 2.13.** Soit  $S$  une surface plongée et  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe paramétrée de  $S$ . Si  $t \in I$ , on définit la  $S$ -accélération de  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$  par

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma} := \pi_{\gamma(t)}(\gamma''(t)) ,$$

où  $\pi_{\gamma(t)}$  est la projection sur l'espace tangent de  $S$  en  $\gamma(t)$ .

La notation peut paraître farfelue ici, nous la justifierons dans la section suivante. On admet le théorème suivant dont les conclusions sont une extension au cadre des surfaces plongées de celles l'exercice 2.9.

**Théorème 2.14.** Soit  $S$  une surface plongée. Pour tout  $p \in S$  il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $q \in B_{\mathbb{R}^3}(p, \epsilon) \cap S$  il existe une unique courbe  $\gamma(p, q) \in \mathcal{C}_S(p, q)$  telle que

$$d_S(p, q) = l(\gamma(p, q)) .$$

De plus, une telle courbe est de  $S$ -accélération nulle.

Ce théorème vient avec la définition suivante.

**Définition 2.15.** On dit d'une courbe sur  $S$  qu'elle est une géodésique si elle est de  $S$ -accélération nulle.

**Exercice 2.16.**

1. Montrer que les géodésiques de la sphère sont exactement données par les grands cercles en

- trouvant les courbes de  $S$ -accélérations nulles ;
- utilisant les symétries de la sphère et le théorème 2.14.

2. Trouver les géodésiques du cylindre.

**2.2. Courbure des courbes.** Venons en à la notion de courbure. Pour être plus précis, on va pour l'instant se concentrer sur la courbure de certaines courbes sur les surfaces. Rappelons pour commencer la définition de la courbure d'une courbe d'un plan.



**Définition 2.17.** Soit  $\mathcal{P}$  un espace euclidien de dimension 2,  $\gamma$  une courbe de  $\mathcal{P}$  qu'on paramètre par longueur d'arc. On définit la courbure de  $\gamma$  en  $\gamma(t)$  par

$$\kappa(\gamma(t)) := -\langle \gamma''(t) \cdot N(\gamma(t)) \rangle ,$$

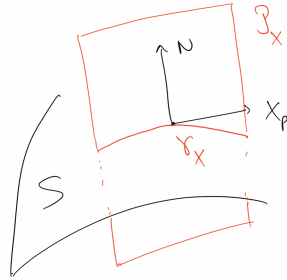
où  $N(\gamma(t))$  est un choix de normal à la courbe  $\gamma$ .

Le signe dans la définition précédente dépend donc d'un choix de normal à la courbe. Si la courbe est le bord d'un domaine borné, la convention est celle qui donne le vecteur pointant vers la composante non bornée. Ce choix est motivé par les exercices suivants qui montrent que la courbure positive va avec la convexité, comme l'habitude nous y attend. Notons cependant que la courbure ne dépend pas du choix de paramétrage : si l'on parcourt la courbe dans l'autre sens, la dérivée seconde ne change pas de signe.

**Exercice 2.18.**

1. Montrer qu'un cercle de rayon  $r$  a courbure  $1/r$ .
2. Rappelons que l'on note  $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . On dit d'une courbe  $\gamma$  qu'elle est fermée simple si elle admet un paramétrage sur  $\mathbb{S}^1$  injectif. Montrer que si  $\gamma$  est une courbe fermée simple telle que pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $\kappa(\gamma(t)) \geq 0$  alors  $\gamma$  est convexe. C'est à dire que pour tout  $t \in \mathbb{S}^1$ , la droite affine passant par  $\gamma(t)$  de pente  $\gamma'(t)$  n'intersecte jamais transversalement la courbe  $\gamma$ .

Voyons comment faire intervenir cette notion de courbure dans le cadre de l'étude des surfaces plongées. Soit  $S$  une surface plongée,  $p \in S$ ,  $X \in T_p S$  et  $N$  un choix de vecteur normal au voisinage de  $p$ . On note  $\gamma_X$  la courbe définie sur un voisinage de  $p$  par l'intersection du plan engendré par  $X$  et  $N$  et la surface  $S$ .



On définit alors la courbure de la surface  $S$  dans la direction de  $X$  comme la courbure de la courbe  $\gamma_X$  vu comme courbe du plan  $\mathcal{P}_X$  et le choix de vecteur normal  $N$ .

**Définition 2.19.** Soit  $S$  est une surface plongée,  $p \in S$  et  $X \in T_p S$ . On appelle la courbure en  $p$  de la surface  $S$  dans la direction de  $X$  la quantité suivante

$$\kappa_p(X) := K(\gamma_X(0)) = -\langle \gamma_X''(0) \cdot N_p \rangle ,$$

où  $t \mapsto \gamma_X(t)$  est une paramétrisation locale de  $\gamma_X$  par longueur d'arc telle que  $\gamma_X(0) = p$ .

Voyons quelques illustrations de cette notion de courbure.

1. La sphère. Pour tout point  $p \in \mathbb{S}^2$  on a  $\kappa_p(X) = 1$  pour tout  $X \in T_p S$ .
2. le cylindre. Pour tout point  $p \in \mathbb{C}_2$  on a

$$\begin{aligned} \kappa_p(\partial_\theta) &= 1 \\ \kappa_p(\partial_t) &= 0 . \end{aligned}$$

2. le tore plongé. Au point  $p$  de coordonnées  $\theta = \pi, \varphi = 0$  on a

$$\begin{aligned}\kappa_p(\partial_\theta) &= 1 \\ \kappa_p(\partial_\varphi) &= -1 .\end{aligned}$$

Au point  $p$  de coordonnées  $\theta = 0, \varphi = 0$  on a

$$\begin{aligned}\kappa_p(\partial_\theta) &= 1 \\ \kappa_p(\partial_\varphi) &= 1/3 .\end{aligned}$$

Au point  $p$  de coordonnées  $\theta = \pi/2, \varphi = 0$  on a

$$\begin{aligned}\kappa_p(\partial_\theta) &= 1 \\ \kappa_p(\partial_\varphi) &= 0 .\end{aligned}$$

**Exercice 2.20.**

1. Démontrer les égalités ci-dessus.
2. Montrer que  $\kappa_p(X) = 1/r$  pour tout point  $p$  de la sphère de rayon  $r$  et pour tout vecteur tangent  $X$  en  $p$ .
3. Soit  $p \in \mathcal{C}_2$  un point du cylindre. Calculer  $K_p(\mathcal{C}_2)$  pour tout  $X \in T_p S$ . Les courbes  $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{P}_X$  sont bien connues, pouvez-vous les identifier ?

Cette notion de courbure est confinée à la notion en dimension 1 : ce n'est rien d'autre que l'ensemble des courbures des courbes  $\gamma_X$  vu comme courbe du plan  $\mathcal{P}_X$  muni de l'orientation induite par le vecteur normal en  $p$ . Le théorème suivant, du à Euler, nous caractérise un peu mieux le comportement en famille de ces courbures.

**Théorème 2.21.** *Soit  $S$  une surface plongée et  $p \in S$ . Il existe un endomorphisme  $\Phi$  auto-adjoint de  $T_p S$  tel que pour tout  $X \in T_p S$  de norme 1 on est*

$$\kappa_p(X) = \langle \Phi(X) \cdot X \rangle .$$

Nous démontrerons ce théorème dans la section 4.

Le fait que l'endomorphisme  $\Phi$  soit auto-adjoint nous garantit qu'il va se diagonaliser en base orthonormée pour le produit scalaire  $\langle \cdot \rangle$ . En pratique on va donc pouvoir écrire que

$$\kappa_p(X) = \kappa_1 X_1^2 + \kappa_2 X_2^2 ,$$

où  $\kappa_1, \kappa_2$  sont les deux valeurs propres de  $\Phi$  et où  $X_1, X_2$  sont les coordonnées de  $X$  exprimées dans la base qui diagonalise  $\Phi$ . Il est intéressant de noter qu'il n'est *a priori* pas évident que les courbures de courbes de  $S$  prennent une telle forme. Notons en particulier que les conclusions du théorème précédent impliquent que les deux courbes extrémales en terme de courbure qui passent en  $p$  se croisent orthogonalement. On pourra s'en convaincre sur les exemples proposés plus haut.

### 3. CALCUL DIFFÉRENTIEL

Avant de faire de la géométrie sur les surfaces plongées, on va en faire le calcul différentiel. Commençons par la remarque préliminaire suivante.

Si l'on se donne une courbe lisse  $\gamma : I \rightarrow S$  où  $I$  est un intervalle ouvert contenant 0 on peut définir la dérivée d'une fonction  $f$  en  $\gamma(0)$  le long de la courbe en oubliant que la courbe est à valeur dans  $S$  par la formule

$$(3.1) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} .$$

Si  $X$  est un vecteur tangent à la surface  $S$  en  $p$ , on peut alors définir la dérivée de  $f$  dans la direction de  $X$  comme suit,

$$X \cdot f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma_X(t)) - f(\gamma_X(0))}{t} ,$$

où  $\gamma_X$  est n'importe quelle courbe paramétrée telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma'(0) = X$ . Pour que la définition soit consistante, il nous faut vérifier que cette quantité ne dépende pas du choix fait sur la courbe tangente à  $X$  en  $p$ .

**Exercice 3.2.** Soit  $S$  une surface plongée,  $f$  une fonctions de  $S$  à valeur réelle, et  $\gamma_1, \gamma_2$  deux courbes lisses de  $S$  telles que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$  et  $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = X$ . Montrer que

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0) .$$

Nous voulons maintenant donner du sens dans  $\mathbb{R}^3$  à la dérivée d'un champ de vecteurs tangent à la surface  $S$ . Commençons par définir les champs de vecteurs de  $S$ .

**Définition 3.3.** Soit  $S$  une surface plongée. On dit d'une application  $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  que c'est un champ de vecteurs de  $S$  si pour tout  $p \in S$ ,  $X_p \in T_p S$ . On note l'ensemble des champs de vecteurs  $\Gamma(TS)$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$  la question pourrait sembler creuse : on peut dériver un champ de vecteurs en dérivant tout simplement les trois coordonnées de ce champ de vecteurs comme des fonctions.

**Définition 3.4.** Soit  $Y$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $p$  un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $X_p$  un vecteur basé en  $p$ . On définit la dérivée de  $Y$  dans la direction de  $X_p$  comme

$$\nabla_{X_p} Y := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\gamma_X(t)) - Y(\gamma_X(0))}{t} ,$$

où  $\gamma_X$  est n'importe quelle courbe paramétrée telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma'(0) = X_p$ .

Cette dérivation est sans torsion, c'est à dire qu'elle satisfait le lemme de Schwarz.

**Proposition 3.5.** Soit  $\Phi$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . Pour  $p \in \mathbb{R}^3$ , on note

$$(\partial_1)_{\Phi(p)} := (d\Phi)_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } (\partial_2)_{\Phi(p)} := (d\Phi)_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On a toujours

$$\nabla_{\partial_1} \partial_2 = \nabla_{\partial_2} \partial_1 .$$

**Exercice 3.6.** Nous démontrons la proposition ci-dessus.

1. Montrer que

$$(\partial_2)_{\Phi(p)} = \begin{pmatrix} (\partial_2 \Phi_1)(p) \\ (\partial_2 \Phi_2)(p) \\ (\partial_2 \Phi_3)(p) \end{pmatrix} .$$

2. On note  $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que

$$(\nabla_{\partial_1} \partial_2)_{\Phi(p)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\partial_2)_{\Phi(p+se_1)} - (\partial_2)_{\Phi(p)}}{s}$$

3. Conclure en utilisant le lemme de Schwarz.

On s'attarde un peu sur la notion de dérivation proposée par la définition 3.4. Elle sous entend que l'on a décidé *a priori* que les champs de vecteurs tangents aux droites du plan de normes constantes sont constants.

Notons par ailleurs que bien que très naturelle, la dérivation décrite ci-dessus n'est pas canonique du point de vu de la structure lisse de  $\mathbb{R}^3$  : on pourrait très bien transporter ces champs constants par un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . C'est à dire qu'on pourrait décider que le champs constants ne sont plus ceux donnés par la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  mais leurs images par un difféomorphisme quelconque de  $\mathbb{R}^3$ . Le calcul différentiel qui en résulterait serait alors complètement similaire du point de vue de la structure lisse mais ne serait plus compatible

- avec la structure d'espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  ;
- avec la géométrie : les géodésiques (les segments de droites) ne sont plus d'accélération nulles.

La naturalité de la dérivation standard des champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  nous vient donc soit de la structure de groupe, que l'on va perdre dans le cas d'une surface plongée, soit de la notion longueur. C'est avec ce deuxième point de vue que nous allons pouvoir généraliser cette notion de dérivation des champs de vecteurs au cadre des variétés riemanniennes.

Revenons à la sphère plongée et essayons de définir, au voisinage d'un point, ce que pourrait être un champ de vecteurs constant. Soit donc  $p \in S$  et  $X \in T_p S$  un vecteur au dessus de  $p$ . On va en fait raisonner de manière duale ici : on va essayer d'étendre naturellement  $X$  sur un voisinage de  $p$  et l'on décrètera alors que cette extension est constante. C'est en fait ce point de vue qui justifie la terminologie : on appelle l'opérateur  $\nabla$  (que l'on cherche à définir) une **connexion** en géométrie riemannienne. On construit un tel opérateur en identifiant les plans tangents localement, en les connectant. On va à partir de maintenant référer à  $\nabla$  comme à une connexion et non plus comme à une dérivation afin de coller à la terminologie standard.

Revenons à cette extension naturelle d'un vecteur  $X_p$  en  $p$ . Une envie est d'utiliser l'extension par le champ de vecteurs constant  $\widetilde{X}_p$  de ce vecteur dans  $\mathbb{R}^3$  en de le restreindre à la sphère. Si  $q \in S$  on définit l'extension de  $X_p$  en  $q$  par la formule

$$\widetilde{X}_p^S(q) := \pi_q(\widetilde{X}_p(q)) ,$$

où  $\pi_q$  est le projecteur affine de  $\mathbb{R}^3$  sur le plan tangent à  $S$  en  $q$ .

**Notation.** Nous allons maintenant, afin d'alléger les notations, omettre le  $S$  en indice du tilde, tilde qui sera donc réserver à l'extension du vecteur sur la surface  $S$ . L'extension canonique d'un vecteur au champ constant de  $\mathbb{R}^3$  sera lui maintenant noté comme le vecteur, ce qui est fait d'habitude. La formule ci-dessus devient alors

$$\widetilde{X}_p(q) := \pi_q(X_p(q)) ,$$

On voit tout de suite les limitation d'un tel choix : cette extension n'est pas même non nulle partout. Il va falloir être modeste et ne considérer ces extensions que dans un **voisinage infinitésimal** de  $p$ .

**Exercice 3.7.** On renvoie à l'exercice 1.8 pour la définition des coordonnées sphériques. On note  $p$  le point  $(1, 0, 0)$  de la sphère unité et  $(\partial_\theta)_p$  le vecteur tangent à la coordonnée  $\theta$  en  $p$  (c'est à dire le vecteur de coordonnée  $(0, 0, -1)$ ). Donner, en coordonnées sphériques, l'extension de  $(\partial_\theta)_p$  sur la demie sphère  $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ .

Notre but étant de faire du calcul différentiel sur  $S$ , il serait utile d'avoir une caractérisation dans  $S$  d'une telle connexion. La propriété fondamentale de cette connexion est en fait la suivante.

**Lemme 3.8.** *Soit  $S$  une surface plongée,  $p$  un point de  $S$ ,  $X, Y$  deux vecteurs tangents à  $S$  en  $p$  alors*

$$\left| \left\langle \widetilde{X}_p(q) \cdot \widetilde{Y}_p(q) \right\rangle - \langle X_p \cdot Y_p \rangle \right| = O(r^2) ,$$

où  $r$  est la distance dans  $\mathbb{R}^3$  qui sépare les deux points bases  $p$  et  $q$ .

Ce lemme nous dit en fait que notre connexion infinitésimale préserve le produit scalaire à un ordre de mieux que ce que la continuité nous donnerait.

**Démonstration.** La démonstration est élémentaire. Rappelons la définition,

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_p(q) &:= \pi_q(\widetilde{X}_p) \\ &= X_p - \langle X_p \cdot N_q \rangle N_q . \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{X}_p(q) \cdot \widetilde{Y}_p(q) \right\rangle &:= \langle X_p - \langle X_p \cdot N_q \rangle N_q \cdot Y_p - \langle Y_p \cdot N_q \rangle N_q \rangle \\ &= \langle X_p \cdot Y_p \rangle - \langle X_p \cdot N_q \rangle \langle Y_p \cdot N_q \rangle , \end{aligned}$$

par bilinéarité. La fonction  $q \mapsto \langle X_p \cdot N_q \rangle$  étant lisse et s'annulant en  $q = p$ , elle est dans  $\mathcal{O}(r)$ , ce qui conclue. ■

Maintenant que l'on sait qui sont les champs de vecteurs infinitésimalement constants, ce sont les extensions locales présentées ci-dessus, on peut définir une connexion, un opérateur qui va dériver les champs de vecteurs.

**Définition 3.9.** *Soit  $Y$  un champ de vecteurs sur une surface plongée  $S$  et  $X$  un vecteur tangent à  $S$  en  $p$ . On définit la dérivée de  $Y$  dans la direction de  $X$  en  $p$  comme*

$$(\nabla_X^S Y)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\widetilde{Y_{\gamma_X(t)}}(p) - Y_p}{t} ,$$

où  $\gamma_X$  est le paramétrage d'une courbe passant en  $p$  en  $t = 0$  tangentiellement à  $X_p$ .

On peut vérifier que la définition précédente ne dépend pas du choix de la courbe  $\gamma_X$ . Simplifions un peu l'expression précédente en démontrant le

**Lemme 3.10.** *Pour tout champ de vecteurs  $Y$  et pour tout vecteur  $X_p$  tangent à  $S$  en  $p$  on a*

$$\nabla_{X_p}^S(Y) = \pi_p(\nabla_{X_p} Y) ,$$

où  $\nabla_{X_p} Y$  est la dérivée en  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$  du champ de vecteur  $Y$  le long d'une courbe tangente à  $X$ .

**Démonstration.** On fixe une courbe  $\gamma_X : I \rightarrow S$  tangente à  $X_p$  en  $t = 0$ . On fixe  $t \in I$  et on reprend de la définition :

$$\begin{aligned} \nabla_{X_p}^S Y &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\widetilde{Y_{\gamma_X(t)}}(p) - Y_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi_p(Y_{\gamma_X(t)}(p)) - Y_p}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \pi_p \left( \frac{Y_{\gamma_X(t)}(p) - Y_p}{t} \right) \\ &= \pi_p \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\gamma_X(t)}(p) - Y_p}{t} \right) \\ &= \pi_p(\nabla_{X_p} Y) \end{aligned}$$

ce qui conclue. ■

**Exercice 3.11.**

1. Justifier d'une phrase chacune des égalités ci-dessus.
2. Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe et  $t \in I$ . On pense maintenant à  $\gamma'$  comme à un champ de vecteurs le long de la courbe  $\gamma$ . Montrer que

$$\nabla_{\gamma'(t)}^S \gamma' = \pi_{\gamma(t)}(\gamma''(t)) .$$

On note  $\Gamma(TS)$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $S$ . On appellera la famille d'opérateurs indexée par  $p \in S$

$$\begin{aligned} \nabla^S : T_p S \times \Gamma(TS) &\rightarrow T_p S \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X^S Y \end{aligned}$$

la connexion de Levi-Civita. Examinons pour commencer ses premières propriétés.

- (1) **Règle de Leibniz.** Pour tout champ de vecteurs  $Y$ , pour toute fonction  $f$  lisse et pour tout vecteur  $X_p$  tangent à  $S$  en  $p$  on a

$$\nabla_{X_p}^S (fY) = (X_p \cdot f)Y + f \nabla_{X_p}^S Y ,$$

où  $X_p \cdot f$  est la dérivée de la fonction  $f$  dans la direction de  $X_p$ .

- (2) **Linéarité 1.** Pour tout champ de vecteurs  $Y$ , pour toute paire de vecteurs  $X_1, X_2$  tangent à  $S$  en  $p$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a

$$\nabla_{X_1 + \lambda X_2}^S (Y) = \nabla_{X_1}^S Y + \lambda \nabla_{X_2}^S Y .$$

- (3) **Linéarité 2.** Pour toute paires de champs de vecteurs  $Y_1, Y_2$ , pour tout vecteur  $X_p$  tangent à  $S$  en  $p$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a

$$\nabla_{X_p}^S (Y_1 + \lambda Y_2) = \nabla_{X_p}^S Y_1 + \lambda \nabla_{X_p}^S Y_2 .$$

- (4) **Compatibilité avec le produit scalaire.** Pour toute paire de champs de vecteurs  $Y_1, Y_2$ , et pour tout  $X$  tangent à  $S$  en  $p$  on a

$$X \cdot \langle Y_1 \cdot Y_2 \rangle = \langle \nabla_X^S Y_1 \cdot Y_2 \rangle + \langle Y_1 \cdot \nabla_X^S Y_2 \rangle .$$

- (5) **Sans torsion.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Phi : U \rightarrow S$  un paramétrage local de  $S$ , alors

$$\nabla_{\partial_1}^S \partial_2 = \nabla_{\partial_2}^S \partial_1 .$$

Les point (4) et (5) sont les plus délicats. Le premier est une conséquence du lemme 3.8. Le second une conséquence de la proposition 3.5.

**Exercice 3.12.**

1. Démontrer les points (1), (2) et (3) ci dessus.
2. Démontrer le point (4) ci dessus. On utilisera le lemme 3.8 et la bilinéarité du produit scalaire.
3. Démontrer le point (5) ci-dessus. On pourra utiliser la proposition 3.5 et le lemme 3.10.

#### 4. GÉOMÉTRIE DES SURFACES.

Commençons par la notion d'aire d'une surface. De la même manière que pour les courbes, on va calculer l'aire d'une surface en la paramétrant. On montrera alors que la quantité définie ne dépend pas du paramétrage.

**Définition 4.1.** Soit  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un plongement. On définit l'aire de  $\Phi(U)$  par

$$A(\Phi(U)) := \int_U |\det(\partial_1, \partial_2, N)| dx_1 dx_2 ,$$

où l'on a noté  $\partial_1$  et  $\partial_2$  les images des vecteur canoniques de  $U$  par la différentielle de  $\Phi$ .

Comme dans le cas de la courbe, il n'est pas clair que cette quantité ne dépend pas du choix de paramétrage.

**Exercice 4.2.**

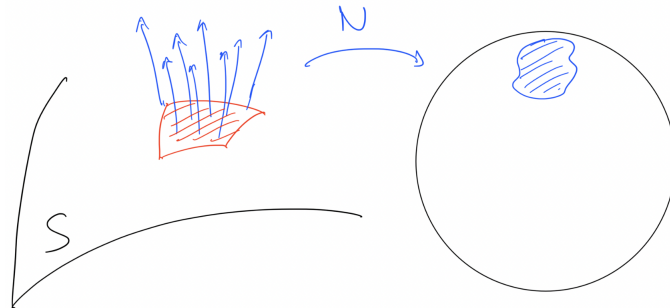
1. Montrer que si  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est un plongement et que  $\Psi : V \rightarrow U$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  alors

$$A(\Phi(U)) = A(\Phi \circ \Psi(V)) .$$

2. Aire des triangles sphériques.

- (1) Calculer l'aire totale d'une sphère de rayon 1 en utilisant les coordonnées sphériques (voir exercice 1.8).
- (2) En utilisant les symétries de la sphère, calculer l'aire d'un biangle sphérique. C'est à dire l'aire donnée par l'image de l'ouvert  $]0, \pi[ \times ]a, b[$  par la paramétrisation en coordonnées sphériques où  $0 \leq a \leq b \leq 2\pi$ .
- (3) (plus difficile) En déduire l'aire d'un triangle sphérique, c'est à dire l'aire d'une région de la sphère délimitée par trois géodésiques (trois grands cercles). *Indication : on pourra chercher à exprimer l'aire d'un tel triangle en fonction de l'aire totale de la sphère et de l'aire de trois biangle sphérique bien choisis.*

Venons en à la notion de courbure en proposant la définition suivante. Informellement, on définit la courbure comme le rapport infinitésimal entre l'aire balayée par le vecteur normale à  $S$  sur une sphère de référence et l'aire de la surface. Plus précisément on pense maintenant au vecteur normal au voisinage de  $p$  comme à une application de  $S$  dans  $\mathbb{S}^2$ , la sphère de rayon 1.



On veut calculer les variations infinitésimales du vecteur normal le long de la surface. On définit l'application variation de  $N$  comme suit

$$\begin{aligned} \nabla N &: T_p S \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\mapsto \nabla_X N . \end{aligned}$$

Remarquons qu'on ne précise plus ici explicitement que l'on pense à  $X$  comme à un vecteur en  $p$ , ceci afin d'alléger un peu les notations.

Notons que  $\nabla N$  est une application linéaire.

Montrons que son image est incluse dans la direction de  $T_p S$  (que l'on notera encore  $T_p S$  en abusant légèrement des notations). Cela suit du fait que la norme est de  $N$  est constante : en dérivant relativement à  $X$  la fonction  $\|N\|^2 = 1$  on obtient, grâce à la propriété (4) de la connexion de Levi-Civita,

$$2 \langle \nabla_X N \cdot N \rangle = 0 ,$$

ce qui équivaut à  $\nabla_X N \in T_p S$ . L'application linéaire  $\nabla N := X \mapsto \nabla_X N$  est donc un endomorphisme de  $T_p S$ . Son déterminant mesure exactement la quantité recherchée : la variation infinitésimale d'aire balayée par le vecteur normal rapportée à l'élément d'aire de la surface  $S$ .

Venons en à une définition formelle de la courbure de Gauss.

**Définition 4.3.** Soit  $S$  une surface plongée,  $p \in S$  et  $N$  un choix de vecteur normal à  $S$  au voisinage de  $p$ . On définit la courbure de Gauss en  $p$  de  $S$  comme suit

$$K_p := \det(\nabla N) .$$

**Exercice 4.4.**

1. Montrer que la courbure d'une sphère de rayon  $r$  est constante égale à  $1/r^2$ .
2. Montrer que la courbure d'un plan est nulle. Que la courbure d'un cylindre est nulle.
3. Dans le cas du tore plongé, avec les notation qui suivent la définition 1.7, montrer que le point de coordonnées
  - $\theta = 0$  et  $\varphi = 0$  a courbure  $1/3$  ;
  - $\theta = \pi/2$  et  $\varphi = 0$  a courbure  $0$  ;
  - $\theta = \pi$  et  $\varphi = 0$  a courbure  $-1$ .

Revenons sur le théorème d'Euler 2.21. Afin de le démontrer, commençons par faire le lien entre les courbures  $K_p(X)$  données par les courbe  $\gamma_X := \mathcal{P}_X \cap S$  et la forme quadratique associé à  $\nabla N$ .

**Lemme 4.5.** Soit  $S$  une surface plongée,  $p \in S$ . Pour tout  $X \in T_p S$  tel que  $\|X\| = 1$  on a

$$\kappa_p(X) = \langle \nabla_X N \cdot X \rangle .$$

**Démonstration.** La démonstration est immédiate. On suppose  $\gamma_X$  paramétrée par longueur d'arc tel que  $\gamma_X(0) = p$ . On part de la définition et on utilise l'exercice 3.11

$$\begin{aligned} \kappa_p(X) &:= -\langle \gamma''(t) \cdot N \rangle \\ &:= -\langle \nabla_X \dot{\gamma}_X \cdot N \rangle \\ &= -\nabla_X \cdot \langle \dot{\gamma}_X \cdot N \rangle + \langle \dot{\gamma}_X(0) \cdot \nabla_X N \rangle , \end{aligned}$$

d'après la propriété numéro (4) de la connexion de Levi-Civita. Comme  $\gamma_X \in S$  on a  $\langle \dot{\gamma}_X \cdot N \rangle = 0$ . Mais aussi, par définition  $\dot{\gamma}_X(0) = X$ , et donc

$$\kappa_p(X) = \langle X \cdot \nabla_X N \rangle ,$$

ce qui conclue. ■

Maintenant qu'on a fait le lien entre les courbures  $\kappa_p(X)$  et la forme quadratique, il suffit, pour démontrer le théorème 2.21 de montrer que

$$X \mapsto \nabla_X N$$

est auto-adjoint pour le produit scalaire  $\langle \cdot \rangle$ . En effet, tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien se diagonalise en base orthonormée. C'est à dire, dans notre cas, qu'il existe  $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$  et une base orthonormée  $e_1, e_2$  de  $T_p S$  tels que pour tout  $X = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$$\langle X \cdot \nabla_X N \rangle = x_1^2 \kappa_1 + x_2^2 \kappa_2 ,$$

ce qui est exactement l'énoncé du théorème d'Euler. Concentrons nous donc sur la démonstration du fait que  $\nabla N$  est auto-adjoint.



**Démonstration.** La démonstration repose sur le fait que la connexion  $\nabla^S$  est sans torsion, c'est à dire à la propriété (5) de la connexion de Levi-Civita. Soit donc  $X_1, X_2 \in T_p S$ . Étendons  $(X_1, X_2)$  à un jeu de coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  sur la surface  $S$  en utilisant l'application inverse de celle définie dans la proposition 1.14. Rappelons que l'on note  $\partial_1$  et  $\partial_2$  les vecteurs tangents aux coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ . C'est à dire, en notant  $\varphi : T_p S \cap U \rightarrow S$  la paramétrisation de 1.14, que pour tout  $q \in T_p S \cap U$

$$(\partial_1)_q = (d\varphi)_q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\partial_2)_q = (d\varphi)_q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Notons que par construction  $(\partial_1)_p = X_1$  et  $(\partial_2)_p = X_2$ .

Montrons que

$$\langle X_1 \cdot \nabla_{X_2} N \rangle = \langle X_2 \cdot \nabla_{X_1} N \rangle .$$

On part, par exemple, du membre de gauche que l'on réécrit

$$\langle X_1 \cdot \nabla_{X_2} N \rangle = \langle X_1 \cdot \nabla_{\partial_2} N \rangle .$$

On utilise maintenant la bilinéarité et la transparence à la métrique pour obtenir

$$\begin{aligned} \langle X_1 \cdot \nabla_{X_2} N \rangle &= X_2 \cdot \langle \partial_1 \cdot N \rangle - \langle \nabla_{X_2} \partial_1 \cdot N \rangle \\ &= - \langle \nabla_{X_2} \partial_1 \cdot N \rangle \\ &= - \langle (\nabla_{\partial_2} \partial_1)_p \cdot N \rangle , \end{aligned}$$

car  $\langle \partial_1 \cdot N \rangle$  est constant égale à zéro. Comme  $\partial_1, \partial_2$  sont tangents aux coordonnées  $x_1, x_2$  on peut utiliser le fait que la connexion est sans torsion pour obtenir que

$$\nabla_{\partial_2} \partial_1 = \nabla_{\partial_1} \partial_2 .$$

Ce qui donne, en évaluant l'expression ci-dessus en  $p$ ,

$$\langle \partial_1 \cdot \nabla_{X_2} N \rangle = \langle \nabla_{\partial_1} \partial_2 \cdot N \rangle .$$

On conclut en remontant le calcul que l'on vient de faire en échangeant les rôles de  $X_1$  et  $X_2$  (et donc de  $\partial_1$  et  $\partial_2$ ). ■

On peut s'étonner de ne jamais avoir croisé de surface à courbures partout négative jusqu'ici, au contraire des surfaces à courbure positive ou nulle comme les sphères ou les cylindres.

**Exercice 4.6.** Soit  $S$  est une surface plongée compacte. Montrer qu'il existe un point  $p \in S$  tel que

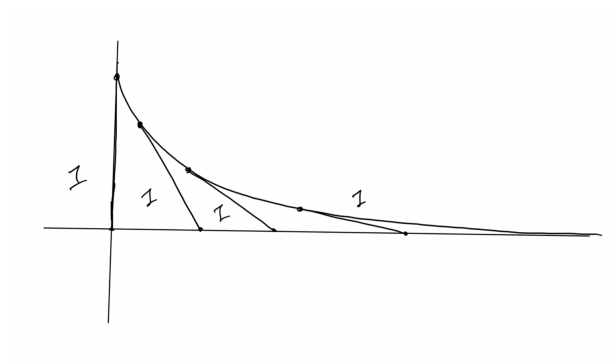
$$K_S(p) > 0 .$$

*Indication.* On pourra chercher à mettre  $S$  dans une bonne sphère et utiliser le théorème d'Euler.

Les conclusions de l'exercice précédent nous montre qu'il n'est pas possible d'aller chercher une surface à courbure négative dans la classe des surfaces compactes. On peut se demander s'il n'en existerait pas dans la classe des surfaces plongées. La réponse est oui, on peut même en construire une de revolution.

**Exercice 4.7.**

1. La courbe donnée implicitement par le dessin suivant s'appelle la tractrice. C'est la courbe dont la tangente en tout point intersecte l'axe horizontal à distance 1 du point d'où la tangente est tirée. Décrivez cette courbe comme le graphe d'une fonction.
2. On considère la surface de revolution dont la fonction génératrice est donnée



par la question précédente. C'est à dire la surface obtenue comme l'image du plongement

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \theta) &\mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \cos(\theta) \\ f(t) \sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Montrer que cette surface a courbure constante négative.