Projet AGDE (Arithmétique, géométrie, groupes discrets)

Slavyana Geninska (Toulouse)
Géométrie des groupes discrets

Bram Petri (Jussieu)
Méthodes aléatoires

Aurel Page (Bordeaux)
Arithmétique et calcul

Jean Raimbault (Toulouse)
Groupes arithmétiques

Un réseau arithmétique et une surface

Arithmétique : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{array}{c} a, b, c, d \in \mathbb{Z} \\ ad - bc = 1 \end{array} \right\}$

Un réseau arithmétique et une surface

Arithmétique : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{array}{c} a, b, c, d \in \mathbb{Z} \\ ad - bc = 1 \end{array} \right\}$

Groupes : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ S^{e_1} R^{f_1} \cdots S^{e_n} R^{f_r}, \begin{array}{c} e_i = 0, 1 \\ f_i = 0, 1, 2 \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} S = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ R = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un réseau arithmétique et une surface

Arithmétique : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{array}{c} a,b,c,d \in \mathbb{Z} \\ ad - bc = 1 \end{array} \right\}$

Groupes : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ S^{e_1} R^{f_1} \cdots S^{e_n} R^{f_r}, \begin{array}{c} e_i = 0,1 \\ f_i = 0,1,2 \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} S = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ R = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Géométrie : $X = {}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathbb{H}^2}$ est une surface hyperbolique ;

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{H}^2 & = & \text{demi-plan supérieur} \\ & = & \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\} \end{array} \qquad \text{action } \pm \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + c}{cz + d}$$

Sous-groupes de congruence et sous-groupes aléatoires

Sous-groupe de congruence : Exemple

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}),\ b = 0 \pmod{n} \right\}$$

Sous-groupes de congruence et sous-groupes aléatoires

Sous-groupe de congruence : Exemple

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}),\ b = 0 \pmod{n} \right\}$$

Sous-groupe aléatoire : Pour n grand on prend une représentation par permutations $\rho : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to S_n$ au hasard et $\Gamma = \{g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}),\ \rho(g)1 = 1\}$.

Sous-groupes de congruence et sous-groupes aléatoires

Sous-groupe de congruence : Exemple

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}),\ b = 0 \pmod n \right\}$$

Sous-groupe aléatoire : Pour n grand on prend une représentation par permutations $\rho : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to S_n$ au hasard et $\Gamma = \{g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}),\ \rho(g)1 = 1\}$.

Dans les deux cas on a des propriétés similaires (déterministes ou presque sûres) : trou spectral uniforme, genre asymptotique à l'aire $/4\pi$...

Sous-groupes de congruence et sous-groupes aléatoires

Sous-groupe de congruence : Exemple

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}),\ b = 0 \pmod{n} \right\}$$

Sous-groupe aléatoire : Pour n grand on prend une représentation par permutations $\rho : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to S_n$ au hasard et $\Gamma = \{g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}),\ \rho(g)1 = 1\}$.

Dans les deux cas on a des propriétés similaires (déterministes ou presque sûres) : trou spectral uniforme, genre asymptotique à l'aire $/4\pi$...

Outils : premier cas théorie des nombres (p.ex. Selberg 3/16), deuxième cas combinatoire (p.ex. comptage de permutations, graphes réguliers aléatoires).

Résultats et questions en dimension 3

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) \cong \langle t, u, a \mid tut^{-1}u^{-1}, a^2, (ta)^2, (a^{-1}u^{-1}au)^2 \rangle$$

Résultats et questions en dimension 3

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) \cong \langle t, u, a \mid tut^{-1}u^{-1}, a^2, (ta)^2, (a^{-1}u^{-1}au)^2 \rangle$$

- Le genre de Heegaard (par exemple) des quotients par des sous-groupes de congruence tend à être linéaire en le volume.

Résultats et questions en dimension 3

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) \cong \langle t, u, a \mid tut^{-1}u^{-1}, a^2, (ta)^2, (a^{-1}u^{-1}au)^2 \rangle$$

- Le genre de Heegaard (par exemple) des quotients par des sous-groupes de congruence tend à être linéaire en le volume.
- Si on écrit $H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p})) \cong \mathbb{Z}^{b_\mathfrak{p}} \times A_\mathfrak{p}$ avec $A_\mathfrak{p}$ fini, $b_\mathfrak{p} = o(|\mathfrak{p}|)$.

Résultats et questions en dimension 3

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) \cong \langle t, u, a \mid tut^{-1}u^{-1}, a^2, (ta)^2, (a^{-1}u^{-1}au)^2 \rangle$$

- Le genre de Heegaard (par exemple) des quotients par des sous-groupes de congruence tend à être linéaire en le volume.
- Si on écrit $H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p})) \cong \mathbb{Z}^{b_\mathfrak{p}} \times A_\mathfrak{p}$ avec $A_\mathfrak{p}$ fini, $b_\mathfrak{p} = o(|\mathfrak{p}|)$.
- **Conjecture :** $\lim \left(\frac{\log |A_\mathfrak{p}|}{|\mathfrak{p}|} \right) \simeq 0.053$ (confirmée par des calculs numériques)

Résultats et questions en dimension 3

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) \cong \langle t, u, a \mid tut^{-1}u^{-1}, a^2, (ta)^2, (a^{-1}u^{-1}au)^2 \rangle$$

- Le genre de Heegaard (par exemple) des quotients par des sous-groupes de congruence tend à être linéaire en le volume.
- Si on écrit $H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p})) \cong \mathbb{Z}^{b_\mathfrak{p}} \times A_\mathfrak{p}$ avec $A_\mathfrak{p}$ fini, $b_\mathfrak{p} = o(|\mathfrak{p}|)$.
- **Conjecture :** $\lim \left(\frac{\log |A_\mathfrak{p}|}{|\mathfrak{p}|}\right) \simeq 0.053$ (confirmée par des calculs numériques)
- Que peut-on dire sur la distribution des facteurs premiers de $|A_\mathfrak{p}|$? (taille moyenne, fréquence d'un nombre premier fixé en variant $\mathfrak{p}$)

Résultats et questions en dimension 3

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) \cong \langle t, u, a \mid tut^{-1}u^{-1}, a^2, (ta)^2, (a^{-1}u^{-1}au)^2 \rangle$$

- Le genre de Heegaard (par exemple) des quotients par des sous-groupes de congruence tend à être linéaire en le volume.
- Si on écrit $H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p})) \cong \mathbb{Z}^{b_\mathfrak{p}} \times A_\mathfrak{p}$ avec $A_\mathfrak{p}$ fini, $b_\mathfrak{p} = o(|\mathfrak{p}|)$.
- **Conjecture :** $\lim \left(\frac{\log |A_\mathfrak{p}|}{|\mathfrak{p}|} \right) \simeq 0.053$ (confirmée par des calculs numériques)
- Que peut-on dire sur la distribution des facteurs premiers de $|A_\mathfrak{p}|$? (taille moyenne, fréquence d'un nombre premier fixé en variant $\mathfrak{p}$)
- Peut-on obtenir une asymptotique pour le nombre de permutations τ, υ, α vérifiant les relations ci-dessus ? (préliminaire à étudier les sous-groupes aléatoires)

Dimensions supérieures et autres questions

- Peut-on généraliser les outils utilisés pour démontrer les deux premiers points ci-dessus à l'ensemble des réseaux arithmétiques des espaces hyperboliques de dimension 4 et plus ?

Dimensions supérieures et autres questions

- Peut-on généraliser les outils utilisés pour démontrer les deux premiers points ci-dessus à l'ensemble des réseaux arithmétiques des espaces hyperboliques de dimension 4 et plus ?
- Est-ce-que le calcul des groupes d'homologie de groupes de congruence en dimension supérieure impaire fait apparaître des comportements similaires sur la torsion ? (par exemple : en dimension 5, est-ce-que la torsion du H_2 est exponentielle ?)

Dimensions supérieures et autres questions

- Peut-on généraliser les outils utilisés pour démontrer les deux premiers points ci-dessus à l'ensemble des réseaux arithmétiques des espaces hyperboliques de dimension 4 et plus ?
- Est-ce-que le calcul des groupes d'homologie de groupes de congruence en dimension supérieure impaire fait apparaître des comportements similaires sur la torsion ? (par exemple : en dimension 5, est-ce-que la torsion du H_2 est exponentielle ?)
- Est-ce-qu'on peut donner un algorithme pour générer rapidement un sous-groupe aléatoire d'un groupe de présentation finie "raisonnable" ?

Dimensions supérieures et autres questions

- Peut-on généraliser les outils utilisés pour démontrer les deux premiers points ci-dessus à l'ensemble des réseaux arithmétiques des espaces hyperboliques de dimension 4 et plus ?
- Est-ce-que le calcul des groupes d'homologie de groupes de congruence en dimension supérieure impaire fait apparaître des comportements similaires sur la torsion ? (par exemple : en dimension 5, est-ce-que la torsion du H_2 est exponentielle ?)
- Est-ce-qu'on peut donner un algorithme pour générer rapidement un sous-groupe aléatoire d'un groupe de présentation finie "raisonnable" ?
- Comment distinguer les groupes de matrices entières qui sont des réseaux de ceux qui n'en sont pas ?

Références

1. Sur la torsion dans l'homologie des groupes arithmétiques : N. Bergeron, *Torsion homology growth in arithmetic groups*, in Proceedings 7ECM (2018)
2. Sur le genre des surfaces arithmétiques : M. Frączyk, J. Raimbault, *Betti numbers of Shimura curves and arithmetic three-orbifolds*, Alg. Num. Th. vol. 13 no. 10 (2020)
3. Sur le calcul de présentations pour les groupes arithmétiques : A. Page, *Computing arithmetic Kleinian groups*, Math. Comp. vol. 84 (2015)
4. Sur le dénombrement des sous-groupes : H. Baik, B. Petri, J. Raimbault : *Subgroup growth of right-angled Artin and Coxeter groups*, J. Lond. Math. Soc. vol. 101 no. 2 (2020)