LA CHRONIQUE **Mathématiques**
de Roger Mansuy

Les nombres premiers respectent la parité

Rien, en mathématiques, ne dispose du pouvoir de fascination de la théorie des nombres ! Avec quelques notions simples, on crée des problèmes faciles à énoncer, mais dont la solution est d'une redoutable complexité. Par exemple, chacun peut comprendre qu'un entier supérieur ou égal à 2 est premier si, et seulement si, ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même. La liste – infinie – des nombres premiers commence par 2, 3, 5, 7, 11, 13… La notion s'appréhende immédiatement. Pourtant, des problèmes parmi les plus difficiles des mathématiques ne demandent pas davantage de connaissances pour être énoncés, comme : « Existe-t-il une infinité de paires de nombres premiers dont la différence vaut 2 ? » Cette question non résolue est la conjecture des nombres premiers jumeaux. Elle occupe des mathématiciens de premier plan depuis plusieurs siècles.

OUVRIR UN LIVRE ou assister à une conférence et repartir avec l'un de ces énoncés fascinants suffit pour goûter la magie de l'arithmétique. En introduction d'un séminaire, le mathématicien Olivier Ramaré – qui a contribué à la conjecture des nombres premiers jumeaux – a cité l'un de ces beaux problèmes, récemment résolu par ses collègues marseillais. Prenez un nombre premier, par exemple 37, et ajoutez les chiffres qui le composent, ici 3 + 7 = 10. Avez-vous plus de chance que la somme trouvée soit paire ou impaire ? Plus simplement, existe-t-il un nombre infini de nombres premiers dont la somme des chiffres est paire – ou impaire ? Le premier réflexe de l'amateur de mathématiques est de tester sur de « petites » valeurs : on énumère les nombres premiers que l'on connaît, on calcule les sommes associées et on essaie d'inférer des résultats… Imaginons que vous ayez déjà fait le calcul pour un millier de nombres premiers. Pouvez-vous répondre à la question ? Non : rien ne garantit que les premiers résultats sont conformes à ce qui se passera asymptotiquement. Connaître les nombres premiers jusqu'à 2357 n'informe pas sur ceux au-delà de 23572233355555777777772357 (qui est aussi premier). Il est donc illusoire d'espérer parvenir à un résultat par des tests successifs.

> **« Pour goûter la magie de l'arithmétique, il suffit d'un énoncé captivant »**

En 1968, le mathématicien soviétique Alexander Gelfond a conjecturé qu'il y a autant de nombres premiers à somme paire que de nombres premiers à somme impaire (1) ; il a même étendu cette conjecture à d'autres écritures – pas seulement à la base 10 – et à d'autres calculs modulaires – ne regardant pas que la parité, mais plus généralement les restes de la division par un entier fixé –, puis en a déduit des résultats dont la preuve dépend de la validité de cette conjecture.

LA CONJECTURE de Gelfond est-elle correcte ? La réponse est oui, et cette preuve a été apportée quarante ans après son énoncé : Christian Mauduit et Joël Rivat l'ont publiée en 2010 (en français) dans la prestigieuse revue *Annals of Mathematics* (2). La démonstration est très technique, mais pour que l'on se rende compte du décalage entre la simplicité de l'énoncé et la virtuosité de la stratégie mise en place, tentons d'expliciter comment les mathématiciens sont parvenus à leurs fins. D'abord, ils commencent par considérer une fonction classique en théorie des nombres, la fonction de von Mangoldt ; ensuite, ils introduisent une fonction auxiliaire, définie comme somme de valeurs de la fonction de von Mangoldt multipliées par des exponentielles de la somme des chiffres ; enfin, ils estiment précisément le comportement de cette fonction quand son argument devient grand. Vous n'avez rien compris ? Vous ne voyez pas le lien avec le problème qui nous intéresse ? C'est normal ; sachez que je n'ai pas osé expliquer les techniques d'analyse harmonique qui permettent l'étape d'estimation.

Vous constatez le contraste entre notre perception a priori et les éléments de preuve, c'est là pour moi que réside la magie : si beaucoup peuvent comprendre l'énoncé et s'en amuser, il faut énormément d'efforts et de génie pour le démontrer ! ■

(1) A. Gelfond, *Acta Arith.*, *13*, 259, 1968.
(2) C. Mauduit et J. Rivat, *Ann. Math.*, *171*, 1591, 2010.

PDF de l'article tinyurl.com/probleme-Gelfond

Roger Mansuy est professeur au lycée Louis-le-Grand, à Paris, et membre de la Commission française pour l'enseignement des mathématiques (CFEM).

Retrouvez l'exposé d'Olivier Ramaré, de l'Institut de mathématiques de Marseille, au séminaire Mathematic Park sur tinyurl.com/Olivier-Ramare

DR