En additionnant les chiffres des nombres premiers

Deux arithméticiens français ont répondu à une question posée en 1968 en prouvant qu'il y a en moyenne autant de nombres premiers dont la somme des chiffres décimaux est paire que de nombres premiers pour lesquels elle est impaire.

© DR

Christian Mauduit et Joël Rivat sont professeurs à l'université de la Méditerranée et travaillent dans l'équipe dynamique, arithmétique et combinatoire de l'institut de mathématiques de Luminy, à Marseille. Ils s'intéressent depuis plusieurs années aux propriétés des nombres premiers.

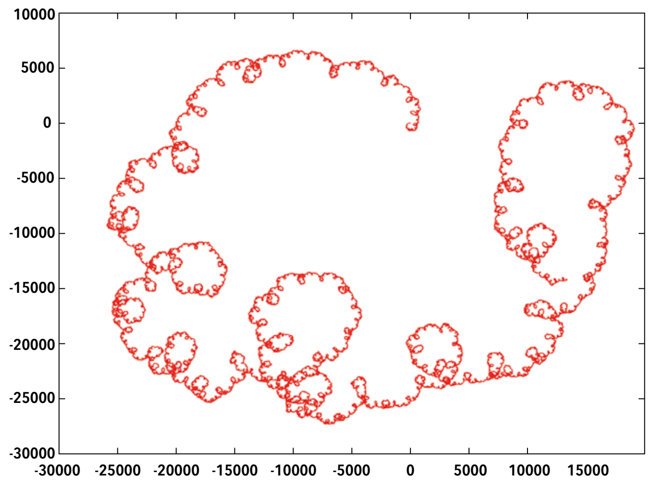
sur le web
http://bit.ly/aOCmhb
Un communiqué du CNRS sur la découverte.

Pourquoi vous intéressez-vous aux nombres premiers ?

C.M.-J.R. Les nombres premiers – divisibles uniquement par 1 et par eux-mêmes – sont les briques élémentaires de l'arithmétique. Malgré cette définition simple, on ignore presque tout d'eux. On sait dire rapidement que 97, 311 ou 2011 sont des nombres premiers, c'est plus difficile pour de très grands nombres.

Quel problème avez-vous étudié ?

C.M.-J.R. Nous nous sommes intéressés aux propriétés de la somme des chiffres constituant les nombres premiers : existe-t-il autant de nombres premiers dont la somme des chiffres est paire que de nombres premiers dont la somme des chiffres est impaire ? Ce problème est simple à énoncer, mais sa résolution semblait un défi. Nous avons réussi à démontrer que la réponse à cette question est positive.



Ce schéma illustre la représentation géométrique dans le plan complexe de la somme d'exponentielles associée à l'étude de la divisibilité par 5 de la somme des chiffres des nombres premiers compris entre 1 et 310 millions écrits en base 2. © DR

C'est un cas particulier d'un problème énoncé en 1968 par le mathématicien russe Aleksandr Gelfond, et que nous avons aussi résolu : les sommes des chiffres des nombres premiers sont équiréparties dans les suites arithmétiques quelle que soit la base utilisée.

Depuis quand vous intéressez-vous à ce problème ?

C.M.-J.R. De nombreux mathématiciens avaient réfléchi à cette question de Gelfond. En 1996, l'un de nous (Christian Mauduit) avait déjà montré avec Étienne Fouvry qu'il y avait une infinité de nombres qui étaient soit premiers, soit produits d'au moins deux nombres premiers et dont la somme des chiffres était paire. Cela avait permis de mettre en place des outils que nous avons réutilisés.

Quelle méthode avez-vous utilisée ?

C.M.-J.R. Nous avons adopté une démarche habituelle en théorie analytique des nombres en transformant le problème initial concernant la somme de chiffres en une estimation de sommes d'exponentielles (voir la figure). Pour prouver

Chronologie

Antiquité : Euclide montre qu'il existe une infinité de nombres premiers ; Ératosthène établit un crible qui permet de déterminer la liste des nombres premiers inférieurs à un nombre donné.
1742 : Goldbach conjecture que tout nombre entier pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux nombres premiers.
Début XIX^e : Legendre et Gauss postulent que le nombre de nombres premiers inférieurs à *x* évolue asymptotiquement comme *x/ln(x)* (théorème des nombres premiers).
1896 : Hadamard et de La Vallée-Poussin démontrent le théorème des nombres premiers.
1937 : le Russe Vinogradov montre que tout nombre entier impair assez grand est somme de trois nombres premiers.

LES SOMMES D'EXPONENTIELLES

Les méthodes des sommes d'exponentielles sont une avancée majeure de la théorie des nombres au XXe siècle. C'est une telle méthode qui a permis en 1937 de montrer que tout nombre entier impair suffisamment grand est somme de trois nombres premiers. Ces méthodes ont en commun une première étape qui consiste à transformer le problème de nature arithmétique en un problème d'estimation d'une somme des termes d'une fonction sur les entiers. Cette fonction, dont le détail dépend du problème initial, fait intervenir une exponentielle complexe. À l'aide d'un tel procédé, on montre que pour étudier le nombre de nombres premiers *p* dont la somme des chiffres *s(p)* est congrue à *a* modulo *m* (*a* est le reste de la division de *s (p)* par *m*), il suffit d'étudier des sommes portant sur les termes de fonctions exponentielles du rapport *s(p)*/*m* (la figure représente cette somme pour l'une de ces fonctions avec *m* = 5 en base 2). Tout le problème consiste ensuite à étudier ces sommes, ce qui amène souvent des développements très techniques.

le théorème, il nous fallait estimer un terme d'erreur qui fait intervenir ces sommes d'exponentielles. Un premier traitement consiste à remplacer une somme d'exponentielle qui porte uniquement sur les nombres premiers en une somme double d'exponentielles qui porte sur des produits de nombres entiers que l'on peut estimer. Un second traitement permet de réduire cette estimation à un problème de transformée de Fourier (une méthode de décomposition des fonctions) : cela consiste à estimer de manière très précise les moyennes des valeurs absolues des « coefficients de Fourier » (des nombres qui interviennent dans cette décomposition).

Cette méthode est-elle généralisable à des problèmes plus difficiles ?

C.M.-J.R. Toutes les propriétés sur les chiffres des nombres, qu'ils soient premiers ou non, s'inscrivent dans le contexte plus général des suites automatiques. Une suite automatique est une suite de nombres entiers pour laquelle il existe un algorithme simple – un automate fini – qui permet de savoir si un entier donné appartient à cette suite ou pas. Dans notre cas, les suites automatiques concernées sont les deux suites constituées des nombres entiers dont la somme des chiffres est paire ou impaire. Rechercher des nombres premiers dans les suites automatiques reste un problème ouvert, mais notre résultat constitue un premier pas dans cette direction. ■

Propos recueillis par Philippe Pajot

[1] C. Mauduit et J. Rivat, *Annals of Mathematics, 171,* 1591, 2010.

1966 : le Chinois Chen Jingrun montre que tout entier pair assez grand est somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus deux facteurs premiers.
2004 : le Britannique Ben Green et l'Américain Terence Tao montrent que la suite des nombres premiers contient des suites arithmétiques arbitrairement longues.