Étude statistique du facteur premier médian, 3 : lois de répartition

Jonathan Rotgé*

Université d'Aix-Marseille, Institut de Mathématiques de Marseille CNRS UMR 7373, 163 Avenue De Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, FRANCE

Abstract

We consider the Gaussian limit law for the distribution of the middle prime factor of an integer, defined according to multiplicity or not. We obtain an optimal bound for the speed of convergence, thereby improving on previous estimates available in the literature.

Résumé

Nous nous intéressons à l'approximation gaussienne de la répartition du facteur premier médian d'un entier, défini en tenant compte ou non, de la multiplicité. Nous obtenons une majoration optimale de la vitesse de convergence, améliorant ainsi les résultats existant dans la littérature.

1 Introduction et énoncé du résultat

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, posons

$$\omega(n) := \sum_{p|n} 1, \qquad \Omega(n) := \sum_{p^k \| n} k,$$

et notons $\nu \in \{\omega, \Omega\}$ l'une ou l'autre de ces fonctions. Si $\{q_j(n)\}_{1 \leqslant j \leqslant \omega(n)}$ désigne la suite croissante des facteurs premiers de n comptés sans multiplicité et $\{Q_j(n)\}_{1 \leqslant j \leqslant \Omega(n)}$ celle des facteurs premiers de n comptés avec multiplicité, nous écrivons

$$p_{m,\nu}(n) := \begin{cases} q_{\lceil \omega(n)/2 \rceil}(n) & \text{si } \nu = \omega \\ Q_{\lceil \Omega(n)/2 \rceil}(n) & \text{si } \nu = \Omega \end{cases}, \qquad P^-(n) := q_1(n), \qquad P^+(n) := q_{\omega(n)}(n).$$

Dans toute la suite, les lettres p et q désignent des nombres premiers. Posons

$$\Phi(v) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t \quad (v \in \mathbb{R}),$$

*Adresse e-mail : jonathan.rotge@etu.univ-amu.fr

2020 *Mathematics Subject Classification*: 11N25, 11N37.

Key words and phrases. middle prime factor, gaussian distribution.

la fonction de répartition de la loi normale.

Nous dirons qu'une fonction arithmétique f est d'ordre normal g si g est une fonction arithmétique telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\Big|\Big\{n \leqslant x : |f(n) - g(n)| \leqslant \varepsilon g(n)\Big\}\Big| = 1.$$

À l'aide d'une inégalité de type Turán-Kubilius, De Koninck et Kátai [1] ont établi que l'ordre normal de la fonction arithmétique $\log_2 p_{m,\nu}(n)$ est $\frac{1}{2}\log_2 x$.[1] Par la suite, De Koninck, Doyon et Ouellet [2] ont précisé ce résultat en mettant en évidence un comportement gaussien. Posant

$$\mathcal{A}_\nu(x,t) := \frac{1}{x}\Big|\Big\{n \leqslant x : \log_2 p_{m,\nu}(n) - \tfrac{1}{2}\log_2 x < t\sqrt{\log_2 x}\Big\}\Big| \quad (x \geqslant 3,\ t \in \mathbb{R}),$$

ils obtiennent le résultat suivant.

Théorème ([2, th. 1]). Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{8}$ fixé. Pour tout réel t vérifiant $|t| \ll (\log_2 x)^{1/8-\varepsilon}$, nous avons

$$\mathcal{A}_\nu(x,t) = \Phi(2t) + O\bigg(\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}\bigg). \tag{1.1}$$

En 2023, McNew, Pollack et Singha Roy [4] établissent une version uniforme en t de (1.1), avec un terme d'erreur plus précis, soit $O((\log_3 x)^{3/2}/\sqrt{\log_2 x})$.

Nous nous proposons ici de fournir une version optimale de l'approximation (1.1). L'étude des lois locales menée dans [6] constitue l'ingrédient essentiel de la preuve.

Nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Nous avons uniformément*

$$\mathcal{A}_\nu(x,t) = \Phi(2t) + O\bigg(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\bigg) \quad (x \geqslant 3,\ t \in \mathbb{R}). \tag{1.2}$$

De plus, le terme d'erreur est optimal.

2 Lois locales du facteur premier médian

Notons

$$\kappa := \lim_{n\to\infty}\bigg(\sum_{q\leqslant n}\frac{1}{q} - \log_2 n\bigg)$$

la constante de Meissel-Mertens et γ la constante d'Euler-Mascheroni. Définissons alors

$$\mathcal{H}_\nu(z) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\kappa}\displaystyle\prod_q\Big(1+\frac{z}{q-1}\Big)\mathrm{e}^{-z/q} \quad (z\in\mathbb{C}) & \text{si } \nu=\omega,\\ \mathrm{e}^{\gamma z}\displaystyle\prod_q\Big(1-\frac{1}{q}\Big)^z\Big(1-\frac{z}{q}\Big)^{-1} \quad (\Re z<2) & \text{si } \nu=\Omega.\end{cases}$$

Notons $a_\nu := 0$ si $\nu = \omega$, $a_\nu := \frac{1}{5}$ si $\nu = \Omega$, définissons

$$f_\nu(z) := \frac{\mathcal{H}_\nu(z)\,\mathrm{e}^{-\gamma/z}}{\Gamma(1+1/z)}\ (0<\Re z<2),\ \ \varrho_\nu(v) := \frac{(1+w)f_\nu(w)}{2w\sqrt{\pi v w}} \quad \bigg(a_\nu < v < 1,\ w := \sqrt{\frac{1-v}{v}}\bigg) \tag{2.1}$$

1. Ici et dans la suite nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

et posons
$$\beta_p = \beta_p(x) := \frac{\log_2 p}{\log_2 x}, \qquad \varepsilon_x := \frac{1}{\log_2 x} \quad (3 \leqslant p \leqslant x).$$
Notons d'emblée que
$$p = \mathrm{e}^{(\log x)^{\beta_p}} \quad (3 \leqslant p \leqslant x).$$
Les lois locales de la répartition de $p_{m,\nu}(n)$ dans $[1,x]$ sont données par les quantités
$$M_\nu(x,p) := |\{n \leqslant x : p_{m,\nu}(n) = p\}| \quad (3 \leqslant p \leqslant x).$$
L'énoncé suivant fournit une estimation de la quantité $M_\nu(x,p)$ pour de grandes valeurs de p.

Théorème 2.1 ([6, th. 1.1]). Soit $\varepsilon > 0$. Sous la condition $\frac{1}{5} + \varepsilon < \beta_p < 1 - \varepsilon$, nous avons uniformément

$$M_\nu(x,p) = \frac{\{1 + O(\varepsilon_x)\}\varrho_\nu(\beta_p)x}{p(\log x)^{1-2\sqrt{\beta_p(1-\beta_p)}}\sqrt{\log_2 x}}. \tag{2.2}$$

Pour tout ensemble de nombre premiers non vide E, posons
$$\omega(n,E) := \sum_{p|n,\, p\in E} 1 \quad (n \geqslant 1), \quad \Omega(n,E) := \sum_{p^k\|n,\, p\in E} k \quad (n \geqslant 1), \quad E(x) := \sum_{p\leqslant x,\, p\in E} \frac{1}{p} \quad (x \geqslant 2).$$
Dans la suite, nous utiliserons la notation $\nu(n,E)$ pour faire simultanément référence à $\omega(n,E)$ ou $\Omega(n,E)$. Définissons enfin
$$Q(v) := v\log v - v + 1 \quad (v > 0).$$

Lemme 2.2 ([3, th. 08, th. 09]). Soit p_0 un nombre premier et E un ensemble de nombres premiers non vide tel que $\min\{p : p \in E\} \geqslant p_0$. Pour tous $0 < a < 1 < b < p_0$, nous avons

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \nu(n,E)\leqslant aE(x)}} 1 \ll_{a,p_0} x\,\mathrm{e}^{-E(x)Q(a)}, \qquad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \nu(n,E)\geqslant bE(x)}} 1 \ll_{b,p_0} x\,\mathrm{e}^{-E(x)Q(b)}. \tag{2.3}$$

Posons

$$\eta_x := \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_2 x}} \quad (x \geqslant 16). \tag{2.4}$$

Nous ferons usage du résultat suivant.

Lemme 2.3. *Sous la conditon $|\beta_p - \frac{1}{2}| \geqslant \eta_x$, nous avons la majoration uniforme*

$$M_\nu(x,p) \ll \frac{x}{p(\log_2 x)^{5/2}} \quad (3 \leqslant p \leqslant x). \tag{2.5}$$

Démonstration. Posons
$$\gamma_\nu(v) := \begin{cases} \frac{1}{2}(1-3v) & \text{si } 0 < v \leqslant a_\nu, \\ 1 - 2\sqrt{v(1-v)} & \text{si } a_\nu \leqslant v < 1. \end{cases}$$
Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{17}$. Nous distinguons selon les valeurs de β_p.

Considérons le cas $\varepsilon < \beta_p \leqslant \frac{1}{5}$. Puisque
$$\gamma_\nu(v) \geqslant \tfrac{1}{2}(1-3v) \geqslant \tfrac{1}{5} \quad (v \leqslant \tfrac{1}{5}),$$

nous déduisons directement de [6, th. 1.1] que

$$M_\nu(x,p) \ll \frac{x}{p(\log x)^{1/5}} \quad (\varepsilon \leqslant \beta_p \leqslant \tfrac{1}{5}). \tag{2.6}$$

Lorsque $\frac{1}{5} \leqslant \beta_p \leqslant 1-\varepsilon$, nous avons

$$\gamma_\nu(\beta_p) = 1 - 2\sqrt{\beta_p(1-\beta_p)} \geqslant \gamma_\nu(\tfrac{1}{2}-\eta_x) = \gamma_\nu(\tfrac{1}{2}+\eta_x).$$

Un développement de Taylor à l'ordre 4 fournit

$$\gamma_\nu(\tfrac{1}{2}+v) = 2v^2 + O(v^4) \quad (v \ll 1).$$

Une nouvelle application de [6, th. 1.1] permet alors d'obtenir

$$M_\nu(x,p) \ll \frac{x}{p(\log x)^{2\eta_x^2+O(\eta_x^4)}\sqrt{\log_2 x}} \ll \frac{x}{p(\log_2 x)^{5/2}} \quad (\tfrac{1}{5} \leqslant \beta_p \leqslant 1-\varepsilon,\ |\beta_p - \tfrac{1}{2}| \geqslant \eta_x). \tag{2.7}$$

Il reste à traiter le cas des valeurs extrêmes de β_p. Lorsque $\beta_p < \varepsilon$, nous distinguons deux cas selon les valeurs de $\nu(n)$. Si $\nu(n) \leqslant \frac{1}{4}\log_2 x$, la première formule (2.3) fournit la majoration

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\, p|n \\ \nu(n,\mathbb{P})\leqslant(\log_2 x)/4}} 1 \leqslant \sum_{\substack{d\leqslant x/p \\ \omega(d,\mathbb{P})\leqslant\{1+\mathbb{P}(x/p)\}/4}} 1 \ll \frac{x}{p(\log x)^{Q(1/4)}}. \tag{2.8}$$

Si $\nu(n) \geqslant \frac{1}{4}\log_2 x$, alors n possède au moins $(\log_2 x)/8$ facteurs premiers dans l'intervalle $[3, \exp\{(\log x)^\varepsilon\}]$. Posons $\mathbb{P}_1 := [3, \exp\{(\log x)^\varepsilon\}]$. Le théorème de Mertens permet d'obtenir, pour x assez grand, la majoration

$$\mathbb{P}_1\left(\frac{x}{p}\right) = \varepsilon \log_2 x + O(1) < 2\varepsilon \log_2 x,$$

de sorte qu'une application de la deuxième formule (2.3) fournit

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\, p|n \\ \nu(n,\mathbb{P}_1)\geqslant(\log_2 x)/8}} 1 \leqslant \sum_{\substack{d\leqslant x/p \\ \Omega(d,\mathbb{P}_1)\geqslant\mathbb{P}_1(x/p)/16\varepsilon}} 1 \ll \frac{x}{p(\log x)^{Q(1/16\varepsilon)}}, \tag{2.9}$$

puisque $1/16\varepsilon \geqslant \frac{17}{16} > 1$.

Enfin, le cas $\beta_p > 1-\varepsilon$ relève d'un traitement analogue au précédent.

La majoration (2.5) est alors une conséquence de (2.6), (2.7), (2.8) et (2.9). □

3 Preuve du Théorème 1.1

Rappelons la définition de $\mathcal{A}_\nu$ en (1.1). Posons

$$\lambda(x,t) := \tfrac{1}{2}\log_2 x + t\sqrt{\log_2 x}, \quad \mathcal{P}_{x,t} := [3, \exp\big(\mathrm{e}^{\lambda(x,t)}\big)[\quad (x \geqslant 3,\ t \in \mathbb{R}),$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\nu(x,t) &= \frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x \\ \log_2 p_{m,\nu}(n)<\lambda(x,t)}} 1 = \frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leqslant x \\ \log_2 p<\lambda(x,t)}}\ \sum_{\substack{n\leqslant x \\ p_{m,\nu}(n)=p}} 1 \\ &= \frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leqslant x \\ p<\exp(\mathrm{e}^{\lambda(x,t)})}} M_\nu(x,p) = \frac{1}{x}\sum_{p\in\mathcal{P}_{x,t}} M_\nu(x,p).\end{aligned}$$

Définissons

$$\mathcal{P}_{x,t}^+ := \Big[\exp\Big(\sqrt{\log x}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log_3 x}}\Big), \exp\big(\mathrm{e}^{\lambda(x,t)}\big)\Big[, \quad \mathcal{P}_{x,t}^- := \mathcal{P}_{x,t} \smallsetminus \mathcal{P}_{x,t}^+ \quad (x \geqslant 16,\, t \in \mathbb{R})$$

et remarquons d'emblée que $\mathcal{P}_{x,t}^+ = \varnothing$ dès lors que $t < -\sqrt{\log_3 x}$, et donc $\mathcal{P}_{x,t}^- = \mathcal{P}_{x,t}$. Notons également que

$$p \in \mathcal{P}_{x,t}^+ \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} - \eta_x \leqslant \beta_p < \tfrac{1}{2} + t\sqrt{\varepsilon_x},$$

de sorte que, d'après (2.2), nous pouvons écrire

$$\mathcal{A}_\nu(x,t) = \frac{1}{x}\Big\{\sum_{p\in\mathcal{P}_{x,t}^+} \frac{\{1+O(\varepsilon_x)\}\varrho_\nu(\beta_p)x}{p(\log x)^{1-2\sqrt{\beta_p(1-\beta_p)}}\sqrt{\log_2 x}} + \sum_{p\in\mathcal{P}_{x,t}^-} M_\nu(x,p)\Big\} =: \mathcal{S}_\nu(x,t) + \mathcal{E}_\nu(x,t). \tag{3.1}$$

Rappelons la définition de ϱ_ν en (2.1) et posons

$$\begin{gathered}\kappa(v) := 2\sqrt{v(1-v)} - 1 \ (0 < v < 1), \quad g_{\nu,x}(p) := \frac{\varrho_\nu(\beta_p)(\log x)^{\kappa(\beta_p)}}{p} \ (x \geqslant 3,\, a_\nu < \beta_p < 1),\\ \mathcal{S}_\nu^*(x,t) := \sum_{p\in\mathcal{P}_{x,t}^+} g_{\nu,x}(p) \quad (x \geqslant 16,\ t \in \mathbb{R}).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Réécrivons $\mathcal{S}_\nu^*$ sous la forme d'une intégrale de Stieltjes. Il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\nu^*(x,t) &= \int_{\mathcal{P}_{x,t}^+} g_{\nu,x}(v)\,\mathrm{d}\pi(v) = \int_{\mathcal{P}_{x,t}^+} g_{\nu,x}(v)\,\mathrm{d}\,\mathrm{li}(v) + \int_{\mathcal{P}_{x,t}^+} g_{\nu,x}(v)\,\mathrm{d}\{\pi(v) - \mathrm{li}(v)\}\\ &=: \mathcal{I}_1(x,t) + \mathcal{I}_2(x,t).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Nous traitons $\mathcal{I}_2$ comme un terme d'erreur. Une forme forte du théorème des nombres premiers fournit l'existence d'une constante $c > 0$ telle que $\pi(t) - \mathrm{li}(t) \ll t\,\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log t}}$ $(t \geqslant 2)$ (voir *e.g.* [7, Théorème II.4.1]). Une intégration par parties implique

$$\mathcal{I}_2(x,t) = \Big[g_{\nu,x}(v)(\pi(v) - \mathrm{li}(v))\Big]_{\mathcal{P}_{x,t}^+} - \int_{\mathcal{P}_{x,t}^+} g'_{\nu,x}(v)\{\pi(v) - \mathrm{li}(v)\}\,\mathrm{d}v. \tag{3.4}$$

D'une part, le terme entre crochets peut être majoré par

$$(\log x)^{\kappa\left(\beta_{\exp\{\sqrt{\log x}\exp(-\sqrt{\log_3 x})\}}\right)} \exp\Big(-c(\log x)^{1/4}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log_3 x}/2}\Big) \ll \mathrm{e}^{-(\log x)^{1/5}}. \tag{3.5}$$

D'autre part, puisque $\log g_{\nu,x}(v) = \log \varrho_\nu(\beta_v) + \kappa(\beta_v)\log_2 x - \log v$, nous pouvons écrire

$$\frac{g'_{\nu,x}(v)}{g_{\nu,x}(v)} = O\Big(\frac{1}{v\log v}\Big) - \frac{2\log_2 v}{v\log v\log_2 x} + O\Big(\frac{1}{v\log v}\Big) - \frac{1}{v} = -\frac{1}{v} + O\Big(\frac{1}{v\log v}\Big).$$

Ainsi $g'_{\nu,x}(v) < 0$ pour x assez grand, donc $g_{\nu,x}$ est décroissante sur $\mathcal{P}_{x,t}^+$. Une nouvelle intégration par parties permet alors de montrer que l'intégrale de (3.4) est

$$\ll \int_{\mathcal{P}_{x,t}^+} g_{\nu,x}(v)\,\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log v}}\,\mathrm{d}v + \mathrm{e}^{-(\log x)^{1/5}} \ll \mathrm{e}^{-(\log x)^{1/5}}. \tag{3.6}$$

De (3.5) et (3.6), nous déduisons que

$$\mathcal{I}_2(x,t) \ll \mathrm{e}^{-(\log x)^{1/5}}. \tag{3.7}$$

Enfin, nous avons

$$\mathcal{I}_1(x,t) = \int_{\mathcal{P}^+_{x,t}} \frac{g_{\nu,x}(v)}{\log v}\,\mathrm{d}v, \tag{3.8}$$

de sorte que, d'après (3.3), (3.7) et (3.8), nous obtenons

$$\mathcal{S}^*_\nu(x,t) = \int_{\mathcal{P}^+_{x,t}} \frac{g_{\nu,x}(v)}{\log v}\,\mathrm{d}v + O\big(\mathrm{e}^{-(\log x)^{1/5}}\big). \tag{3.9}$$

Rappelons la définition de η_x en (2.4) et posons

$$\mathcal{B}^+_{x,t} := \big[\tfrac12 - \eta_x, \tfrac12 + t\sqrt{\varepsilon_x}\big[\quad (x \geqslant 16,\, t \in \mathbb{R}), \quad h_{\nu,x}(v) := \varrho_\nu(v)(\log x)^{\kappa(v)} \quad (a_\nu < v < 1).$$

Remarquons que $\mathcal{B}^+_{x,t} = \varnothing$ dès lors que $t < -\eta_x$. Rappelons les définitions de $\mathcal{S}_\nu$ en (3.1) et de $\mathcal{S}^*_\nu$ en (3.2). Avec le changement de variables $v = \mathrm{e}^{(\log x)^\beta}$, nous obtenons, d'après (3.9),

$$\mathcal{S}_\nu(x,t) = \{1 + O(\varepsilon_x)\}\sqrt{\log_2 x}\int_{\mathcal{B}^+_{x,t}} h_{\nu,x}(\beta)\,\mathrm{d}\beta. \tag{3.10}$$

Nous évaluons $\mathcal{S}_\nu$ en distinguant plusieurs plages de valeurs de t.

Considérons dans un premier temps le cas $t \in \big[-\sqrt{\log_3 x}, \sqrt{\log_3 x}\big]$. La fonction κ atteint son maximum 0 en $\beta_0 = \frac12$. Un développement de Taylor à l'ordre 4 fournit

$$\kappa(\beta_0 + v) = -2v^2 + O(v^4) \quad (v \ll 1). \tag{3.11}$$

Un second développement de Taylor à l'ordre 1 fournit

$$\frac{\varrho_\nu(\beta_0 + v)}{\varrho_\nu(\beta_0)} = 1 + O(v) \quad (v \ll 1). \tag{3.12}$$

Les formules (3.11) et (3.12) fournissent le développement

$$\frac{h_{\nu,x}(\beta_0 + v)}{h_{\nu,x}(\beta_0)} = \{1 + O(v + v^4\log_2 x)\}\,\mathrm{e}^{-2v^2\log_2 x} \quad (x \geqslant 3,\, v \ll 1), \tag{3.13}$$

de sorte que

$$\int_{-\eta_x}^{t\sqrt{\varepsilon_x}} \frac{h_{\nu,x}(\beta_0 + v)}{h_{\nu,x}(\beta_0)}\,\mathrm{d}v = \int_{-\eta_x}^{t\sqrt{\varepsilon_x}} \mathrm{e}^{-2v^2\log_2 x}\,\mathrm{d}v + O\bigg(\int_{-\eta_x}^{t\sqrt{\varepsilon_x}} \{|v| + v^4\log_2 x\}\,\mathrm{e}^{-2v^2\log_2 x}\,\mathrm{d}v\bigg). \tag{3.14}$$

Évaluons l'intégrale principale du membre de droite de (3.14). Le changement de variables $u = 2v\sqrt{\log_2 x}$ fournit

$$\int_{-\eta_x}^{t\sqrt{\varepsilon_x}} \mathrm{e}^{-2v^2\log_2 x}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2\sqrt{\log_2 x}}\int_{-2\sqrt{\log_3 x}}^{2t} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Puisque, par ailleurs

$$\int_{-\infty}^{-2\sqrt{\log_3 x}} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \ll \frac{\mathrm{e}^{-2\log_3 x}}{\sqrt{\log_3 x}} \ll \varepsilon_x^2, \tag{3.15}$$

nous obtenons

$$\int_{-\eta_x}^{t\sqrt{\varepsilon_x}} \mathrm{e}^{-2v^2 \log_2 x} \, \mathrm{d}v = \frac{\{1+O(\varepsilon_x^2)\}\sqrt{\pi}\Phi(2t)}{\sqrt{2\log_2 x}}. \tag{3.16}$$

Évaluons désormais le terme d'erreur de (3.14). Nous avons d'une part

$$\int_{-\eta_x}^{t\sqrt{\varepsilon_x}} |v| \, \mathrm{e}^{-2v^2 \log_2 x} \, \mathrm{d}v \leqslant \int_{-\eta_x}^{|t|\sqrt{\varepsilon_x}} |v| \, \mathrm{e}^{-2v^2 \log_2 x} \, \mathrm{d}v \ll \varepsilon_x, \tag{3.17}$$

uniformément par rapport à t, et d'autre part,

$$(\log_2 x) \int_{-\eta_x}^{t\sqrt{\varepsilon_x}} v^4 \, \mathrm{e}^{-2v^2 \log_2 x} \, \mathrm{d}v \ll \{1 + t^3 \, \mathrm{e}^{-2t^2}\}\varepsilon_x^{3/2} \ll \varepsilon_x^{3/2}. \tag{3.18}$$

En regroupant, les estimations (3.16), (3.17) et (3.18), nous obtenons, d'après (3.14),

$$\int_{-\eta_x}^{t\sqrt{\varepsilon_x}} \frac{h_{\nu,x}(\beta_0+v)}{h_{\nu,x}(\beta_0)} \, \mathrm{d}v = \frac{\{\sqrt{\pi}+O(\sqrt{\varepsilon_x})\}\Phi(2t)}{\sqrt{2\log_2 x}}. \tag{3.19}$$

En remarquant que $h_{\nu,x}(\beta_0) = \sqrt{2/\pi}$, nous déduisons des estimations (3.10) et (3.19) que

$$\mathcal{S}_\nu(x,t) = \Phi(2t) + O\big(\sqrt{\varepsilon_x}\big). \tag{3.20}$$

Il reste à évaluer le terme d'erreur $\mathcal{E}_\nu(x,t)$ défini en (3.1). Puisque $p \in \mathcal{P}_{x,t}^- \Rightarrow \beta_p \leqslant \frac{1}{2} - \eta_x$, nous sommes en mesure d'appliquer la majoration (2.5). Nous obtenons ainsi

$$\mathcal{E}_\nu(x,t) = \frac{1}{x} \sum_{p \in \mathcal{P}_{x,t}^-} M_\nu(x,p) \ll \frac{1}{(\log_2 x)^{5/2}} \sum_{p \in \mathcal{P}_{x,t}^-} \frac{1}{p} \ll \varepsilon_x^{3/2}, \tag{3.21}$$

d'après le théorème de Mertens. En regroupant les estimations (3.20) et (3.21) nous obtenons bien (1.2).

Supposons désormais que $t \leqslant -\sqrt{\log_3 x}$. Rappelons dans ce cas que $\mathcal{P}_{x,t}^+ = \varnothing$, $\mathcal{P}_{x,t}^- = \mathcal{P}_{x,t}$ et, par conséquent, $\mathcal{A}_\nu(x,t) = \mathcal{E}_\nu(x,t)$. D'une part, à l'aide d'une nouvelle utilisation de (2.5) et du théorème de Mertens, nous avons,

$$\mathcal{A}_\nu(x,t) = \frac{1}{x} \sum_{p < \exp(\mathrm{e}^{\lambda(x,t)})} M_\nu(x,p) \leqslant \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ \beta_p < 1/2 - \eta_x}} M_\nu(x,p) \ll \varepsilon_x^{3/2},$$

et d'autre part, d'après (3.15),

$$\Phi(-2\sqrt{\log_3 x}) \ll \varepsilon_x^2.$$

Les deux membres de (1.2) sont donc absorbés dans le terme d'erreur $O(\sqrt{\varepsilon_x})$.

Il reste à traiter le cas $t \geqslant \sqrt{\log_3 x}$. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\nu(x,t) &= \frac{1}{x}\Big\{ \sum_{p \leqslant \exp(\mathrm{e}^{\lambda(x,\sqrt{\log_3 x})})} M_\nu(x,p) + \sum_{\exp(\mathrm{e}^{\lambda(x,\sqrt{\log_3 x})}) < p \leqslant \exp(\mathrm{e}^{\lambda(x,t)})} M_\nu(x,p) \Big\} \\ &=: \mathcal{A}_\nu\left(x, \sqrt{\log_3 x}\right) + E_\nu(x,t). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nous avons déjà démontré que

$$\mathcal{A}_\nu\left(x, \sqrt{\log_3 x}\right) = \Phi(2\sqrt{\log_3 x}) + O(\sqrt{\varepsilon_x}) = 1 + O(\sqrt{\varepsilon_x}). \tag{3.23}$$

Il nous reste à évaluer le terme d'erreur $E_\nu(x,t)$. Puisque $p \in [\exp(\mathrm{e}^{\lambda(x,\sqrt{\log_3 x})}), \exp(\mathrm{e}^{\lambda(x,t)})]$, nous avons $\frac{1}{2} + \eta_x < \beta_p \leqslant \frac{1}{2} + t\sqrt{\varepsilon_x}$. Nous pouvons appliquer une nouvelle fois la majoration (2.5) et obtenir ainsi

$$E_\nu(x,t) \ll \frac{1}{(\log_2 x)^{5/2}} \sum_{\exp(\mathrm{e}^{\lambda(x,\sqrt{\log_3 x})}) < p \leqslant \exp(\mathrm{e}^{\lambda(x,t)})} \frac{1}{p} \ll \varepsilon_x^{3/2}. \tag{3.24}$$

En regroupant les estimations (3.23) et (3.24), nous obtenons, d'après (3.22),

$$\mathcal{A}_\nu(x,t) = 1 + O(\sqrt{\varepsilon_x}).$$

Enfin, puisque

$$\Phi(2t) = 1 + O(\mathrm{e}^{-2t^2}) = 1 + O(\sqrt{\varepsilon_x}) \quad (t \geqslant \sqrt{\log_3 x}),$$

l'expression $1+O(\sqrt{\varepsilon_x})$ constitue une formule asymptotique pour chacun des deux membres de (1.2).

Il reste à justifier l'optimalité du terme d'erreur de (1.2). Remarquons d'emblée que le terme d'ordre $\sqrt{\varepsilon_x}$ est issu des formules (2.2), (3.17), (3.18), tous les autres termes d'erreur sous-jacents étant $o(\sqrt{\varepsilon_x})$. L'étude menée dans [5] de la valeur moyenne du facteur premier médian fournit une expression explicite du terme d'erreur dans la formule (2.2), qui est donc optimal et $o(\sqrt{\varepsilon_x})$. Par ailleurs, un développement de Taylor à l'ordre 6 permet de préciser la formule (3.13) sous la forme

$$\frac{h_{\nu,x}(\beta_0 + v)}{h_{\nu,x}(\beta_0)} = \{1 + \tau v - 2v^4 \log_2 x + O(v^2 + v^6 \log_2 x)\}\, \mathrm{e}^{-2v^2 \log_2 x} \quad (x \geqslant 3,\ v \ll 1),$$

où τ est une constante absolue non nulle. Un calcul de routine montre alors que, pour $t = 0$,

$$\sqrt{\log_2 x} \int_{-\eta_x}^{0} \{\tau v - 2v^4 \log_2 x\}\, \mathrm{e}^{-2v^2 \log_2 x}\, \mathrm{d}v = -\frac{\tau + o(1)}{4\sqrt{\log_2 x}} \asymp \sqrt{\varepsilon_x}.$$

Cela termine la démonstration. □

Remerciements. L'auteur tient à remercier chaleureusement le professeur Gérald Tenenbaum pour l'ensemble de ses conseils et remarques avisés ainsi que pour ses relectures attentives durant la réalisation de ce travail.

Bibliographie

[1] J.M. De Koninck & I. Kátai, Normal numbers and the middle prime factor of an integer, *Colloq. Math.* **135** (2014), No. 1, 69-77.

[2] J.M. De Koninck, N. Doyon & V. Ouellet, The limit distribution of the middle prime factors of an integer, *Integers*, 19 :A56, 2019.

[3] R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors,* Cambridge Tracts in Mathematics 90, Cambridge University Press, Cambridge (1988).

[4] N. McNew, P. Pollack & A. Singha Roy, The distribution of intermediate prime factors, *Illinois J. Math.* 68 (3) 537-576, September 2024.

[5] J. Rotgé, Étude statistique du facteur premier médian, 1 : valeur moyenne, prépublication, arXiv:2501.15947.

[6] J. Rotgé, Étude statistique du facteur premier médian, 2 : lois locales, prépublication, arXiv:2501.15951.

[7] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres,* 5ème édition, Dunod, 2022.