Étude statistique du facteur premier médian, 4 : somme des inverses

Jonathan Rotgé *

Université d'Aix-Marseille, Institut de Mathématiques de Marseille CNRS UMR 7373, 163 Avenue De Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, FRANCE

Abstract

We consider the sum of the reciprocals of the middle prime factor of an integer, defined according to multiplicity or not. We obtain an asymptotic expansion in the first case and an asymptotic formula involving an implicit parameter in the second. Both these results improve on previous estimates available in the literature.

Résumé

Nous nous intéressons à la somme des inverses du facteur premier médian d'un entier, défini en tenant compte ou non, de la multiplicité. Nous obtenons un développement asymptotique de cette quantité dans le premier cas et une formule asymptotique faisant intervenir un paramètre défini implicitement dans le second.

1 Introduction et énoncé des résultats

1.1 Description et historique du problème

Pour chaque entier naturel $n \geqslant 2$, posons

$$\omega(n) := \sum_{p|n} 1, \qquad \Omega(n) := \sum_{p^k||n} k,$$

désignons par $\{q_j(n)\}_{1\leqslant j\leqslant\omega(n)}$ (resp. $\{Q_j(n)\}_{1\leqslant j\leqslant\Omega(n)}$) la suite croissante de ses facteurs premiers comptés sans (resp. avec) multiplicité et notons $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) son plus grand (resp. petit) facteur premier.

Depuis la fin des années 1970, de nombreux travaux ont porté sur la somme des inverses de facteurs premiers particuliers. En 1986, Erdős, Ivić et Pomerance [8] obtiennent la formule asymptotique

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{P^+(n)} = \left\{1 + O\left(\frac{\sqrt{\log_2 x}}{\log x}\right)\right\} x \int_2^x \varrho\left(\frac{\log x}{\log t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \quad (x \geqslant 3), \tag{1.1}$$

---

* Adresse e-mail : jonathan.rotge@etu.univ-amu.fr

2020 *Mathematics Subject Classification*: 11N25, 11N37.

Key words and phrases. middle prime factor, sum of reciprocals.

où ϱ désigne la fonction de Dickman. Dans les années suivantes, De Koninck [4] obtient une formule analogue à (1.1) pour la somme des inverses du k-ième plus grand facteur premier des entiers. De Koninck et Galambos [3] démontrent ensuite un résultat semblable pour la somme des inverses d'un facteur premier choisi aléatoirement. À la conférence de théorie analytique des nombres d'Oberwolfach de 1984, Erdős demanda à De Koninck s'il s'était intéressé à la somme des inverses du facteur premier médian

$$p_{\nu,m}(n) := \begin{cases} q_{\lceil \omega(n)/2 \rceil}(n) & \text{si } \nu = \omega, \\ Q_{\lceil \Omega(n)/2 \rceil}(n) & \text{si } \nu = \Omega. \end{cases}$$

Près de trois décennies plus tard, De Koninck et Luca [5] apportent une réponse partielle dans le cas $\nu = \omega$ en démontrant que

$$S_\omega(x) := \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{p_{\nu,m}(n)} = \frac{x}{\log x} \, \mathrm{e}^{\{\sqrt{2}+o(1)\}\sqrt{(\log_2 x)\log_3 x}} \quad (x \geqslant 16). \tag{1.2}$$

Ce résultat a été précisé par Ouellet [11] qui a obtenu

$$\log \frac{S_\omega(x)}{x/\log x} = \sqrt{2(\log_2 x)\log_3 x}\bigg\{1 + \frac{P_1(\log_4 x)}{\log_3 x} + \frac{P_2(\log_4 x)}{(\log_3 x)^2} + O\bigg(\frac{1}{\{\log_3 x\}^2}\bigg)\bigg\}, \tag{1.3}$$

où les P_j $(j \in \{1,2\})$ sont les polynômes définis en (1.11) *infra*.

Le cas $\nu = \Omega$ a été envisagé par Doyon et Ouellet dans [7], qui établissent la formule asymptotique

$$S_\Omega(x) = \frac{\mathfrak{c}_1 x}{\sqrt{\log x}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log_2 x}\Big)\Big\} \quad (x \geqslant 3), \tag{1.4}$$

où la constante $\mathfrak{c}_1$ est définie en (1.14) *infra*.

À ce stade, deux questions sont donc en suspens : (a) déterminer un terme d'erreur optimal pour la formule asymptotique (1.4) ; (b) obtenir une véritable formule asymtotique pour $S_\omega(x)$.

Il est clair qu'une connaissance précise des lois locales

$$M_\nu(x,p) := |\{n \leqslant x : p_{\nu,m}(n) = p\}| \quad (3 \leqslant p \leqslant x), \tag{1.5}$$

permettrait de résoudre ces deux problèmes. Dans [13], nous avons obtenu des estimations satisfaisantes lorsque $\varepsilon < \beta_p := (\log_2 p)/\log_2 x < 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Cependant, il s'avère que la somme $S_\nu(x)$ est dominée par la contribution de valeurs de $p_{\nu,m}(n)$ notablement plus petites que la borne inférieure de ce domaine : $\log p \approx \sqrt{\log_2 x}$ si $\nu = \omega$ et $p \leqslant \psi(x)$ dès que $\psi(x) \to \infty$ si $\nu = \Omega$. En effet, nous verrons en (9.13) que, dans le second cas, nous avons

$$S_\Omega(x) \sim \frac{x}{\sqrt{\log x}} \sum_p \frac{f(p)}{p^2},$$

avec $f(p) \ll (\log p)^{3/2}$. Comme l'ont notamment noté McNew, Pollack et Singha Roy [10], les comportements asymptotiques de $S_\omega(x)$ et $S_\Omega(x)$ diffèrent significativement. Nous avons

$$\frac{S_\Omega(x)}{S_\omega(x)} = (\log x)^{1/2+o(1)} \quad (x \to \infty). \tag{1.6}$$

La relation

$$\frac{M_\Omega(x,p)}{M_\omega(x,p)} \sim \frac{C(\beta_p)(\log x)^{1/2-(2\sqrt{\beta_p(1-\beta_p)}-3\beta_p/2)}}{\sqrt{\log_2 x}} \quad (\varepsilon > 0,\ \varepsilon \leqslant \beta_p \leqslant \tfrac{1}{5} - \varepsilon), \tag{1.7}$$

qui découle directement de [13, th. 1.1] pour une fonction $C(v) \asymp 1$ explicite implique

$$\frac{M_\Omega(x,p)}{M_\omega(x,p)} = (\log x)^{1/2+o(1)} \quad (\varepsilon \leqslant \beta_p \leqslant \tfrac{1}{5} - \varepsilon). \tag{1.8}$$

Comme

$$S_\nu(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{M_\nu(x,p)}{p},$$

la formule (1.6) laisse donc présager que la relation (1.8) persiste dans le domaine $\beta_p \leqslant \frac{1}{5} - \varepsilon$.

Ce phénomène peut s'expliquer par la structure particulière des entiers ayant un facteur premier médian p petit relativement à la taille de x. En effet, une approche naturelle révèle (voir *e.g.* [10], [13]) que les lois locales dépendent directement des deux quantités

$$\Phi_{\nu,k}(x,p) := \sum_{\substack{b \leqslant x/ap,\\ P^-(b) \geqslant p,\\ \nu(b)=k}} 1, \quad \lambda_\nu(p,k) := \sum_{\substack{P^+(a) \leqslant p,\\ \nu(a)=k}} \frac{1}{a} \quad (x,p \geqslant 2,\ k \geqslant 1),$$

portant respectivement sur les entiers sans petit facteur premier et sur les entiers friables. Alors que la première somme possède un comportement asymptotique analogue pour les deux valeurs $\nu = \omega$ et $\nu = \Omega$ (voir *e.g.* [1, th. 6 & th.7]), la seconde présente un changement radical de comportement dans le cas $\nu = \Omega$ lorsque le rapport $k/\log_2 p$ dépasse 2 (voir [13, cor. 3.4, 3.5 & 3.6]). En particulier, lorsque $\varepsilon < \beta_p < \frac{1}{5}$, il a été montré dans [13] que la somme $M_\nu(x,p)$ est dominée par des valeurs de k vérifiant $2 < k/\log_2 p < C_\varepsilon$, avec $C_\varepsilon \to \infty$ $(\varepsilon \to 0)$, domaine dans lequel nous avons $\lambda_\omega(p,k) = o(\lambda_\Omega(p,k))$ $(k \to \infty)$. Cette différence de comportement s'explique notamment par l'accumulation des petits facteurs premiers dans la décomposition des entiers friables (voir [6, cor. 1.7]). Les entiers a contribuant majoritairement à $\lambda_\Omega(p,k)$ sont donc significativement plus petits que ceux contribuant à $\lambda_\omega(p,k)$. Ce phénomène étant d'autant plus marqué que p est petit devant x, il est naturel de conjecturer que cette relation persiste lorsque $k/\log_2 p \to +\infty$ et donc lorsque $\varepsilon \to 0$.

Notre premier objectif consiste à établir, par la méthode du col, une formule asymptotique pour $S_\omega(x)$ avec terme d'erreur effectif. L'estimation obtenue dépend d'un paramètre implicite, caractéristique de la méthode. Comme cela est génériquement le cas, l'insertion de ce paramètre fournit une évaluation explicite dont nous pouvons déduire un développement asymptotique pour le membre de gauche de (1.3).

Notre second objectif est de préciser (1.4). Au Théorème 1.4, nous obtenons un développement asymptotique pour $S_\Omega(x)$ dont la troncature à l'ordre 1 fournit une formule asymptotique avec terme d'erreur relatif optimal $\asymp 1/(\log x)^{1/6}$, améliorant ainsi significativement (1.4). Il est à noter que le développement asymptotique (1.15) *infra* pour $S_\Omega(x)$ est relatif à des puissances de $1/\log x$ alors que l'évaluation obtenue dans [12] pour

$$T_\Omega(x) := \sum_{n \leqslant x} \log p_{\Omega,m}(n)$$

met en évidence un développement selon les puissances de $1/\log_2 x$. Cette disparité est due au fait que les plages de valeurs dominantes pour $p_{\Omega,m}$ sont très éloignées : $p \leqslant \psi(x)$ dès que $\psi(x) \to \infty$ pour $S_\Omega(x)$, $\log p = (\log x)^{(\sqrt{5}-1)/2+o(1)}$ dans le cas de $T_\Omega(x)$.

Mentionnons enfin que, dans les travaux [7] et [11], les auteurs considèrent plus généralement le facteur premier α-positionné défini par $p_\nu^{(\alpha)}(n) := Q_{\lceil \alpha\nu(n) \rceil}$ $(0 < \alpha < 1)$. Nos méthodes sont adaptables sans difficulté à ce cas. Nous avons choisi de restreindre l'étude au cas $\alpha = \frac{1}{2}$ afin de préserver la clarté d'exposition et d'éviter la multiplication de détails techniques sans véritable intérêt théorique.

1.2 Notations et résultats

Dans toute la suite, les lettres p et q désignent des nombres premiers. Introduisons les notations

$$F_\nu(y,z) := \begin{cases} \displaystyle\prod_{q\leqslant y}\Big(1+\frac{z}{q-1}\Big) & (y\geqslant 2,\ z\in\mathbb{C},\ \nu=\omega), \\ \displaystyle\prod_{q\leqslant y,\, q\neq z}\Big(1-\frac{z}{q}\Big) & (y\geqslant 2,\ z\in\mathbb{C},\ \nu=\Omega), \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\Psi_x(v) := \frac{\log_2 x}{v^2} - \frac{F_\omega'(\mathrm{e}^v, v)}{F_\omega(\mathrm{e}^v, v)} \quad (x\geqslant 3,\ v>0), \quad \varrho_x := \inf\{v>0 : \Psi_x(v)\leqslant 0\} \quad (x\geqslant 3),$$

où l'on a posé $F_\omega'(y,z) = \partial F_\omega(y,z)/\partial z$. Un développement asymptotique de ϱ_x est obtenu en (2.17) *infra*. Soit enfin x_0 tel que $\log_3 x_0 > 1$, par exemple $x_0 := 10^7$.

Théorème 1.1. *Nous avons*

$$S_\omega(x) = \frac{xF_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)\,\mathrm{e}^{-\varrho_x}}{(\log x)^{1-1/\varrho_x}\sqrt{2\log_2 x}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log_3 x}\Big)\Big\} \quad \big(x\geqslant x_0\big). \tag{1.10}$$

Corollaire 1.2. *Il existe une suite de polynômes $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $J\in\mathbb{N}$,*

$$\log\frac{S_\omega(x)}{x/\log x} = \sqrt{2(\log_2 x)\log_3 x}\Big\{\sum_{0\leqslant j\leqslant J}\frac{P_j(\log_4 x)}{(\log_3 x)^j} + O\Big(\Big\{\frac{\log_4 x}{\log_3 x}\Big\}^{J+1}\Big)\Big\} \quad (x\geqslant x_0).$$

De plus, pour tout $j\in\mathbb{N}$, P_j est de degré j et de coefficient dominant $3^j(2j)!/(1-2j)4^j(j!)^2$. En particulier, nous avons

$$\begin{aligned} &P_0(X)=1, \quad P_1(X) := -\tfrac{3}{2}X + \tfrac{3\mathfrak{L}}{2} - 1, \quad P_2(X) = -\tfrac{9}{8}X^2 + \big(\tfrac{9\mathfrak{L}}{4}+1\big)X - \tfrac{9\mathfrak{L}^2}{8} - \mathfrak{L} + 2, \\ &P_3(X) = -\tfrac{27}{16}X^3 + \big(\tfrac{81\mathfrak{L}}{16} - \tfrac{51}{8}\big)X^2 - \big(\tfrac{81\mathfrak{L}^2}{16} - \tfrac{51\mathfrak{L}}{4} + 10\big)X - \tfrac{27\mathfrak{L}^3}{16} - \tfrac{51\mathfrak{L}^2}{8} + 10\mathfrak{L} + 8 + \tfrac{4\pi^2}{3}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

où l'on a posé $\mathfrak{L} = \log 2$.

Remarque. Les polynômes P_j $(j\geqslant 0)$ sont explicités en (8.11).

La formule implicite (1.10) fournit également des informations sur le comportement local de $S_\omega(x)$.

Corollaire 1.3. *Soient $0<\varepsilon<1$ et $h>-1+\varepsilon$. Sous les conditions*

$$x\geqslant x_0^{1/\varepsilon}, \quad \log(1+h) \ll \frac{\sqrt{\log_2 x}}{(\log_3 x)^{3/2}},$$

nous avons

$$S_\omega(x^{1+h}) = \frac{x^h S_\omega(x)}{1+h}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log_3 x}\Big)\Big\}, \tag{1.12}$$

En particulier, nous avons

$$S_\omega(x^{1+h}) \sim x^h S_\omega(x) \quad (x\to\infty)$$

dès que $h=o(1)$.

Notons $\mathbb{P} := \{\mathfrak{p}_j : j \geqslant 1\}$ l'ensemble des nombres premiers, posons

$$\mathcal{F}_\nu(z) := \begin{cases} \prod_q \Big(1 + \frac{z}{q-1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{q}\Big)^z & (|z| < 2,\ \nu = \omega), \\ \prod_q \Big(1 - \frac{z}{q}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{1}{q}\Big)^z & (|z| < 2,\ \nu = \Omega), \end{cases}$$
$$\mathfrak{c}_j := \frac{3\,\mathcal{F}_\Omega(1/\mathfrak{p}_j)}{\Gamma(1/\mathfrak{p}_j)} \sum_{p \geqslant \mathfrak{p}_j} \frac{F_\Omega(p, 1/\mathfrak{p}_j)}{p(p - 1/\mathfrak{p}_j) F_\Omega(p, \mathfrak{p}_j)} \quad (j \geqslant 1). \tag{1.13}$$

Il est à noter que $\operatorname{sgn} F_\Omega(p, \mathfrak{p}_j) = (-1)^{j-1}$ pour tout $p \geqslant \mathfrak{p}_j$, et donc $\operatorname{sgn} \mathfrak{c}_j = (-1)^{j-1}$ pour tout $j \geqslant 1$. En particulier, nous avons

$$\mathfrak{c}_1 = \frac{9}{4\sqrt{\pi}} \sum_p \frac{1}{p(p-1/2)} \prod_{3 \leqslant q \leqslant p} \frac{q - 1/2}{q - 2} \prod_q \frac{\sqrt{q(q-1)}}{q - 1/2} \approx 1{,}380486, \quad \mathfrak{c}_2 \approx -0{,}983350. \tag{1.14}$$

Théorème 1.4. *Pour tout $J \geqslant 1$, nous avons*

$$S_\Omega(x) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant J} \frac{\mathfrak{c}_j x}{(\log x)^{1 - 1/\mathfrak{p}_j}} + O\bigg(\frac{x}{(\log x)^{1 - 1/\mathfrak{p}_{J+1}}}\bigg) \quad (x \geqslant 3). \tag{1.15}$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 1.4 appliqué avec $J = 1$.

Corollaire 1.5. *Nous avons l'estimation optimale*

$$S_\Omega(x) = \frac{\mathfrak{c}_1 x}{\sqrt{\log x}} \bigg\{1 + O\bigg(\frac{1}{(\log x)^{1/6}}\bigg)\bigg\} \quad (x \geqslant 3). \tag{1.16}$$

La formule (1.16) est notablement plus simple que (1.10). Comme nous le verrons dans la suite, cette disparité est due à la nature du col relevant de chaque situation.

La section 2 est consacrée à l'obtention d'un développement asymptotique pour le paramètre implicite ϱ_x défini en (1.9). À la section 3, nous déterminons les valeurs de $p_{\nu,m}(n)$ et $\nu(n)$ dominant la somme $S_\nu(x)$. Les sections 4 à 7 sont dévolues à la démonstration du Théorème 1.1 ; la section 9 à celle du Théorème 1.4. Enfin, la preuve des corollaires est donnée à la section 8.

2 Preuve du Théorème 1.1 : étude du paramètre implicite ϱ_x

Rappelons les définitions de Ψ_x et ϱ_x en (1.9) et posons

$$\operatorname{Li}(v) := \int_2^v \frac{\mathrm{d}t}{\log v} \quad (v \geqslant 2), \quad \operatorname{Ei}(v) := \int_{-\infty}^v \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{t} \quad (v \in \mathbb{R}^*), \quad \xi = \xi_x := \log_2 x \quad (x \geqslant 3), \tag{2.1}$$

où $\operatorname{Ei}(v)$ est défini en valeur principale de Cauchy lorsque $v > 0$.

Lemme 2.1. *La fonction Ψ_x admet exactement un changement de signe. De plus, nous avons la majoration*

$$\Psi_x(\varrho_x) \ll \mathrm{e}^{-\varrho_x} \quad (x \geqslant 3). \tag{2.2}$$

Démonstration. D'après les définitions (1.9), nous avons

$$\Psi_x(v) = \frac{\xi}{v^2} - \sum_{q<\mathrm{e}^v} \frac{1}{q-1+v} \quad (v>0).$$

Remarquons d'emblée que, pour x assez grand,

$$\varrho_x \in \mathcal{R}_x := \left[\sqrt{\frac{\xi}{\log \xi}}, \sqrt{\frac{5\xi}{\log \xi}}\right] \quad (x \geqslant 16).$$

En effet, nous avons d'une part, pour $0 < v < \sqrt{\xi/\log \xi}$,

$$\Psi_x(v) \geqslant \log \xi - \sum_{q<\mathrm{e}^v} \frac{1}{q-1} \geqslant \tfrac{1}{2} \log \xi + O(\log_2 \xi) > 0 \quad (x \to \infty),$$

et d'autre part, pour $v > \sqrt{5\xi/\log \xi}$,

$$\Psi_x(v) \leqslant \tfrac{1}{5} \log \xi - \frac{\pi(v)}{2v} - \tfrac{1}{2} \sum_{v \leqslant q<\mathrm{e}^v} \frac{1}{q} \leqslant -\tfrac{1}{20} \log \xi + O(\log_2 \xi) < 0 \quad (x \to \infty).$$

Posons

$$\mathcal{Q}_n := \left]\log q_n, \log q_{n+1}\right[\quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

La fonction Ψ_x est dérivable sur tout intervalle $\mathcal{Q}_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v \in \mathcal{Q}_n \cap \mathcal{R}_x$, le théorème des nombres premiers fournit

$$\begin{aligned} \Psi_x'(v) &= -\frac{2\xi}{v^3} + \sum_{q \leqslant q_n} \frac{1}{(q-1+v)^2} = -\frac{2\xi}{v^3} + \frac{\mathrm{Li}(v)}{v^2} - \mathrm{Ei}(-\log v) + O\Big(\frac{1}{v^2}\Big) \\ &= -\frac{2\xi}{v^3} + \frac{2}{v \log v} + O\Big(\frac{1}{v\{\log v\}^2}\Big) \leqslant -\frac{2(\log \xi)^{3/2}}{5\sqrt{5\xi}} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\xi \log \xi}}\Big) < 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

pour x assez grand. Enfin, puisque

$$\Psi_x(\log q_n +) - \Psi_x(\log q_n -) = -\frac{1}{q_n - 1 + \log q_n} < 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*), \tag{2.4}$$

nous déduisons de (2.3) et (2.4) que Ψ_x est strictement décroissante sur $\mathcal{R}_x$. Comme les sauts de $\Psi_x(v)$ n'excèdent pas $1/(\mathrm{e}^v - 1 + v)$ en valeur absolue, nous en déduisons bien (2.2). □

Posons

$$\mathfrak{I}(v) := \int_2^{\mathrm{e}^v} \frac{\mathrm{d}t}{(t-1+v)\log t} \quad (v>0).$$

Lemme 2.2. *Nous avons l'estimation*

$$\frac{\xi}{\varrho_x^2} = \mathfrak{I}(\varrho_x) + O\big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\log \varrho_x}}\big) \quad (x \geqslant 3). \tag{2.5}$$

Démonstration. Nous avons

$$\frac{F_\omega'(\mathrm{e}^v, v)}{F_\omega(\mathrm{e}^v, v)} = \int_2^{\mathrm{e}^v} \frac{\mathrm{d}\pi(t)}{t-1+v} = \mathfrak{I}(v) + \int_2^{\mathrm{e}^v} \frac{\mathrm{d}\{\pi(t) - \mathrm{li}(t)\}}{t-1+v} \quad (v>0).$$

Le théorème des nombres premiers sous la forme $\pi(t) - \mathrm{li}(t) \ll t\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\log t}}$ $(t \geqslant 2)$ implique

$$\int_2^{\mathrm{e}^v} \frac{\mathrm{d}\{\pi(t) - \mathrm{li}(t)\}}{t-1+v} \ll \left[\frac{t\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\log t}}}{t+v}\right]_2^\infty + \frac{1}{v}\int_2^v \mathrm{e}^{-2\sqrt{\log t}}\,\mathrm{d}t + \int_v^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{\log t}}\,\mathrm{d}t}{t} \ll \mathrm{e}^{-\sqrt{\log v}},$$

et donc (2.5), puisque d'après (2.2),

$$\frac{\xi}{\varrho_x^2} = \frac{F'_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)}{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)} + O(\mathrm{e}^{-\varrho_x}). \qquad \square$$

2.1 Estimation de $\mathfrak{I}(v)$

Commençons par un lemme technique fournissant un développement asymptotique pour deux familles d'intégrales. Rappelons la définition de l'exponentielle intégrale en (2.1).

Lemme 2.3. *Soient $m \geqslant 2$, $n \geqslant 0$ et $J \geqslant 1$. Lorsque $v \to \infty$, nous avons les estimations*

$$\int_v^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^m \log t} = \frac{1}{v^{m-1}}\left\{\sum_{1\leqslant j\leqslant J} \frac{(-1)^{j+1}(j-1)!}{(\{m-1\}\log v)^j} + O\left(\frac{1}{\{m\log v\}^{J+1}}\right)\right\}, \tag{2.6}$$

$$\int_2^v \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{\log t} = \sum_{1\leqslant j\leqslant J} \frac{v^{n+1}(j-1)!}{(\{n+1\}\log v)^j} - \frac{2^{n+1}}{n+1}\left\{\frac{1}{\log 2} + O\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\} + O\left(\frac{v^{n+1}}{\{(n+1)\log v\}^{J+1}}\right)\cdot \tag{2.7}$$

Démonstration. À l'aide des changements de variables $u = (1-m)\log t$ dans la première intégrale et $u = (n+1)\log t$ dans la seconde, nous obtenons respectivement

$$\int_v^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^m \log t} = -\,\mathrm{Ei}(\{1-m\}\log v), \qquad \int_2^v \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{\log t} = \mathrm{Ei}(\{n+1\}\log v) - \mathrm{Ei}(\{n+1\}\log 2).$$

Les formules (2.6) et (2.7) se déduisent alors du développement de $\mathrm{Ei}(x)$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$ respectivement (voir *e.g.* [2, §1.5]). $\square$

Posons

$$\alpha_j := 2(j-1)!\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^j} = 2(j-1)!(1-2^{1-j})\zeta(j) \quad (j \geqslant 1), \tag{2.8}$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann, avec la convention que le membre de droite vaut $2\log 2$ pour $j = 1$.

Notons que $\alpha_{2j} = (2^{2j-1})\pi^{2j}|B_{2j}|/j$ $(j \geqslant 1)$, où B_{2j} désigne le $(2j)$-ième nombre de Bernoulli.

Lemme 2.4. *Soit $J \in \mathbb{N}$. Nous avons*

$$\mathfrak{I}(v) = \log\left(\frac{v}{\log v}\right) + \sum_{1\leqslant j\leqslant J} \frac{\alpha_{2j}}{(\log v)^{2j}} + O\left(\frac{1}{\{\log v\}^{2J+2}}\right) \quad (v \geqslant 2). \tag{2.9}$$

Démonstration. Posant

$$\mathfrak{I}_1(v) := \int_2^v \frac{\mathrm{d}t}{(t+v)\log t}, \quad \mathfrak{I}_2(v) := \int_v^{\mathrm{e}^v} \frac{\mathrm{d}t}{(t+v)\log t} \quad (v \geqslant 2),$$

nous pouvons écrire

$$\mathfrak{I}(v) = \int_2^{\mathrm{e}^v} \frac{\mathrm{d}t}{(t+v)\log t} + \int_2^{\mathrm{e}^v} \frac{\mathrm{d}t}{(t+v)(t-1+v)\log t} = \mathfrak{I}_1(v) + \mathfrak{I}_2(v) + O\left(\frac{\log v}{v}\right)\cdot \tag{2.10}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\mathfrak{I}_2(v) = \int_v^{\mathrm{e}^v} \frac{\mathrm{d}t}{t\log t} \sum_{n\geqslant 0}\Big(\frac{-v}{t}\Big)^n = \log\Big(\frac{v}{\log v}\Big) + \sum_{n\geqslant 1}(-v)^n \int_v^{\mathrm{e}^v} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}\log t},$$

d'où, d'après (2.6),

$$\mathfrak{I}_2(v) = \log\Big(\frac{v}{\log v}\Big) + \tfrac12 \sum_{1\leqslant j\leqslant J} \frac{(-1)^j\alpha_j}{(\log v)^j} + O\bigg(\frac{1}{\{\log v\}^{J+1}}\bigg). \tag{2.11}$$

De manière analogue,

$$\mathfrak{I}_1(v) = \frac{1}{v}\int_2^v \frac{\mathrm{d}t}{\log t}\sum_{n\geqslant 0}\Big(\frac{-t}{v}\Big)^n = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{v^{n+1}}\int_2^v \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{\log t}. \tag{2.12}$$

En insérant (2.7) dans (2.12), il vient

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1(v) &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{1\leqslant j\leqslant J}\frac{(-1)^n(j-1)!}{(\{n+1\}\log v)^j} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-2)^n}{nv^n}\bigg\{\frac{1}{\log 2} + O\Big(\frac1n\Big)\bigg\} + O\bigg(\frac{1}{\{\log v\}^{J+1}}\bigg)\\ &= \tfrac12\sum_{1\leqslant j\leqslant J}\frac{\alpha_j}{(\log v)^j} + O\bigg(\frac{1}{\{\log v\}^{J+1}}\bigg).\end{aligned} \tag{2.13}$$

La formule (2.9) est obtenue en injectant les estimations (2.11) et (2.13) dans (2.10). □

2.2 Développement asymptotique de ϱ_x

Rappelons la définition de ξ en (2.1) et posons

$$\mu_x := \sqrt{\frac{2\xi}{\log \xi}} \quad (x\geqslant 16).$$

Lemme 2.5. *Pour tout $x\geqslant 5$, l'équation*

$$v^2\,\mathfrak{I}(v) = \xi \tag{2.14}$$

admet une unique solution $\nu=\nu_x$ sur $[1,+\infty[$ et l'on a $\nu_x\sim\mu_x$ lorsque $x\to\infty$. De plus,

$$\varrho_x = \nu_x\big\{1+O\big(\mathrm{e}^{-\frac12\sqrt{\log\xi}}\big)\big\} \quad (x\geqslant x_0). \tag{2.15}$$

Démonstration. Posons $\mathfrak{J}(v) := v^2\,\mathfrak{I}(v)$ $(v>0)$. Nous avons

$$\mathfrak{J}'(v) = \int_2^{\mathrm{e}^v}\frac{2v(t-1)+v^2}{(t-1+v)^2\log t}\,\mathrm{d}t + \frac{v\,\mathrm{e}^v}{\mathrm{e}^v-1+v} \geqslant 0 \quad (v\geqslant 1).$$

Comme $\mathfrak{J}(\infty)=\infty$, il s'ensuit que $\mathfrak{J}([1,\infty]) = [\mathfrak{J}(1),\infty[= [-\log_2 2,\infty[$. Nous obtenons bien ainsi l'existence et l'unicité de ν_x pour $x\geqslant 5>\mathrm{e}^{1/\log 2}$.

Posons $H_x(v) := \mathfrak{I}(v)-\xi/v^2$ $(v>0)$, de sorte que $H_x(\nu_x)=0$, et, par (2.5), $H_x(\varrho_x)\ll \mathrm{e}^{-\sqrt{\log\varrho_x}}$. Comme

$$H_x'(v) = \frac{2\xi}{v^3}+O\Big(\frac1v\Big),$$

le théorème des accroissements finis implique immédiatement (2.15) en remarquant que $\nu_x \asymp \sqrt{\xi/\log\xi}\asymp\varrho_x$, d'après (2.9). □

Nous dirons qu'une fonction réelle $\mathfrak{f}$ admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ s'il existe une suite réelle $\{c_j\}_{j\geqslant 0}$ et une suite de fonctions $\{\varphi_j\}_{j\geqslant 0}$ vérifiant $\varphi_{j+1}(v) = o(\varphi_j(v))$ $(j \geqslant 0,\, v\to\infty)$ et telles que, pour tout $J \geqslant 0$, on ait

$$\mathfrak{f}(v) = \sum_{0\leqslant j\leqslant J} c_j\varphi_j(v) + O\big(\varphi_{J+1}(v)\big) \quad (v\to\infty).$$

Nous écrivons alors

$$\mathfrak{f}(v) \approx \sum_{j\geqslant 0} c_j\varphi_j(v) \quad (v\to\infty). \tag{2.16}$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire que la série (2.16) soit convergente (voir *e.g.* [2, §1.4, §1.5]). Dans la suite, nous notons $[v^n]\,\mathfrak{f}(v)$ le coefficient de v^n dans le développement en série entière de $\mathfrak{f}(v)$.

Proposition 2.6. *Il existe une suite de polynômes $\{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $J\in\mathbb{N}$,*

$$\varrho_x = \sqrt{\frac{2\xi}{\log\xi}}\bigg\{\sum_{0\leqslant j\leqslant J}\frac{R_j(\log_2\xi)}{(\log\xi)^j} + O\bigg(\Big\{\frac{\log_2\xi}{\log\xi}\Big\}^{J+1}\bigg)\bigg\} \quad (x\geqslant x_0). \tag{2.17}$$

Pour tout $j\in\mathbb{N}$, R_j est de degré j, de coefficient dominant $3^j(2j)!/4^j(j!)^2$ et, notant $\mathfrak{L} = \log 2$, nous avons

$$R_0(X) = 1, \quad R_1(X) = \tfrac{3}{2}X - \tfrac{3\mathfrak{L}}{2}, \quad R_2(X) = \tfrac{27}{8}X^2 - \big(\tfrac{27\mathfrak{L}}{4}+\tfrac{5}{2}\big)X + \tfrac{27\mathfrak{L}^2}{8} + \tfrac{5\mathfrak{L}}{2},$$
$$R_3(X) = \tfrac{135}{16}X^3 - \big(\tfrac{405\mathfrak{L}}{16}+\tfrac{65}{4}\big)X^2 + \big(\tfrac{405\mathfrak{L}^2}{16}+\tfrac{65\mathfrak{L}}{2}+\tfrac{11}{2}\big)X - \tfrac{135\mathfrak{L}^3}{16} - \tfrac{65\mathfrak{L}^2}{4} - \tfrac{11\mathfrak{L}}{2} - \tfrac{4\pi^2}{3}.$$

Remarque. Les polynômes R_j $(j\geqslant 0)$ sont explicités en (2.24). La contribution progressive des facteurs α_{2m} dans l'expression des coefficients des polynômes R_j ne permet d'obtenir une forme close simple que pour le facteur dominant. Notons cependant que $[X^\ell]R_j(X) = P_{j,\ell}(\log 2)$ pour certains $P_{j,\ell}\in\mathbb{R}_{j-\ell}[X]$ $(j\geqslant 0,\, 0\leqslant \ell\leqslant j)$.

Démonstration. La première étape de la démonstration consiste à justifier l'existence du développement (2.17). D'après (2.15), il nous suffit d'expliciter un développement asymptotique de ν_x. Rappelons la définition des coefficients α_j en (2.8). D'après (2.9), nous avons

$$\mathfrak{I}(v) \approx \log\Big(\frac{v}{\log v}\Big) + \sum_{j\geqslant 1}\frac{\alpha_{2j}}{(\log v)^{2j}}. \tag{2.18}$$

Notons $\nu_x = \mu_x\,\mathrm{e}^{\mathfrak{h}_x}$ et montrons que $\mathfrak{h}_x = o(1)$ lorsque $x\to\infty$. Posons

$$\lambda_x(z) := \mathfrak{I}(\mu_x\,\mathrm{e}^z) - \mathfrak{I}(\mu_x) \quad (|z|<1), \quad \sigma_x := \frac{1}{\log\xi} \quad (x\geqslant 16),$$
$$\tau_x := \frac{\log(\frac12\log\xi)}{\log\xi} \quad (x\geqslant x_0), \quad f_x(z) := \frac{z}{\mathrm{e}^{-2z}-1-2\sigma_x\lambda_x(z)} \quad (0<|z|<1).$$

Notons que f_x possède une singularité apparente en $z=0$ et admet donc un prolongement analytique au voisinage de l'origine. Posant

$$c_{x,k} := \frac{1}{k!}\bigg[\frac{\mathrm{d}^{k-1}f_x(z)^k}{\mathrm{d}z^{k-1}}\bigg]_{z=0} \quad (k\geqslant 1), \quad w_x := 2\sigma_x\,\mathfrak{I}(\mu_x) - 1 \quad (x\geqslant x_0), \tag{2.19}$$

l'équation (2.14) équivaut à

$$w_x = \frac{\mathfrak{h}_x}{f_x(\mathfrak{h}_x)}\cdot \tag{2.20}$$

Par ailleurs, l'estimation (2.18) implique $\mathfrak{I}(\mu_x) = \frac{1}{2}\log\xi + O(\log_2\xi)$ de sorte que $w_x = O(\sigma_x \log_2 \xi) = o(1)$. D'après le théorème d'inversion de Lagrange (voir *e.g.* [2, §2.2]), l'équation (2.20) admet une unique solution donnée par

$$\mathfrak{h}_x = \sum_{k\geqslant 1} c_{x,k} w_x^k.$$

Puisque

$$\log\mu_x = \frac{1-\tau_x}{2\sigma_x}, \quad \log_2\mu_x = \frac{\tau_x}{\sigma_x} + \log(1-\tau_x),$$

nous obtenons, d'après la relation (2.18) et la définition de w_x en (2.19),

$$w_x \approx -3\tau_x - 2\sigma_x\log(1-\tau_x) + \sum_{j\geqslant 1}\frac{\alpha_{2j}(2\sigma_x)^{2j+1}}{(1-\tau_x)^{2j}}\cdot \tag{2.21}$$

Au vu des expressions de σ_x, τ_x et de la relation (2.21), l'existence des polynômes R_j vérifiant (2.17) résulte de développements en série successifs des termes du membre de droite de (2.21). Le reste de la preuve consiste à expliciter les coefficients de ces polynômes.

En développant en série $\log(1-\tau_x)$ et $(1-\tau_x)^{-2j}$ pour $j \geqslant 1$, nous obtenons

$$w_x \approx \sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} a_{0;m,n}\sigma_x^m\tau_x^n,$$

avec $a_{0;0,n} := -3\delta_{1n}$ $(n \geqslant 0)$, $a_{0;1,0} := 0$, $a_{0;1,n} := 2/n$ $(n \geqslant 1)$, $a_{0;2k,n} := 0$ $(k \geqslant 1,\ n \geqslant 0)$ et

$$a_{0;2k+1,n} := \binom{2k+n-1}{n} 2^{2k+1}\alpha_{2k} \quad (k \geqslant 1,\ n \geqslant 0),$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Par ailleurs, à l'aide de (2.18), nous obtenons

$$\lambda_x(\mathfrak{h}_x) \approx \mathfrak{h}_x - \log\Big(1 + \frac{2\mathfrak{h}_x\sigma_x}{1-\tau_x}\Big) + \sum_{j\geqslant 1}\frac{\alpha_{2j}(2\sigma_x)^{2j}}{(1-\tau_x)^{2j}}\bigg\{\Big(1+\frac{2\mathfrak{h}_x\sigma_x}{1-\tau_x}\Big)^{-2j} - 1\bigg\}\cdot \tag{2.22}$$

Définissons

$$a_{1;m,n} := \binom{m+n}{m}\frac{(-2)^m}{m+n} \quad (m \geqslant 1,\ n \geqslant 0), \quad a_{2;j,n} := \binom{2j+n-1}{n}4^j\alpha_{2j} \quad (j \geqslant 1,\ n \geqslant 0),$$

$$a_{3;j,m,n} := \binom{2j+m-1}{m}\binom{m+n-1}{n}(-2)^m, \ a_{4;j,m,n} := \sum_{0\leqslant \ell\leqslant n} a_{2;j,\ell}a_{3;j,m,n-\ell} \quad (j, m \geqslant 1,\ n \geqslant 0),$$

de sorte qu'en développant en série $\log(1+2\mathfrak{h}_x\sigma_x/\{1-\tau_x\})$, $(1-\tau_x)^{-2j}$ et $(1+2\mathfrak{h}_x\sigma_x/\{1-\tau_x\})^{-2j}$ pour $j \geqslant 1$ dans (2.22), nous obtenons

$$\lambda_x(\mathfrak{h}_x) \approx \mathfrak{h}_x + \sum_{m\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 0} a_{1;m,n}(\mathfrak{h}_x\sigma_x)^m\tau_x^n + \sum_{j\geqslant 1}\sum_{m\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 0} a_{4;j,m,n}\,\mathfrak{h}_x^m\,\sigma_x^{2j+m}\tau_x^n.$$

Par suite, en définissant $a_{5;1,0,0} := 1$ et

$$a_{5;\ell,m,n} := \begin{cases} a_{1;\ell,n} & \text{si } \ell = m, \\ a_{4;(m-\ell)/2,\ell,n} & \text{si } \ell < m,\ \ell \equiv m \bmod 2, \\ 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases} \quad (\ell \geqslant 1,\ m,n \geqslant 0),$$

$$a_{6;\ell,m,n} := \begin{cases} \dfrac{(-2)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} & (m = n = 0), \\ 0 & (\ell \geqslant 0, m = 0, n \geqslant 1), \\ -2a_{5;\ell+1,m-1,n} & \text{dans les autres cas,} \end{cases} \quad a^*_{6;\ell,m,n} := \begin{cases} 0 & \text{si } l = m = n = 0, \\ a_{6;\ell,m,n} & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

nous obtenons

$$\lambda_x(\mathfrak{h}_x) \approx \sum_{\ell \geqslant 1} \sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} a_{5;\ell,m,n}\, \mathfrak{h}_x^\ell\, \sigma_x^m \tau_x^n, \quad f_x(\mathfrak{h}_x) \approx \Big\{ \sum_{\ell \geqslant 0} \sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} a_{6;\ell,m,n}\, \mathfrak{h}_x^\ell\, \sigma_x^m \tau_x^n \Big\}^{-1}.$$

Définissons formellement, pour $k \geqslant 1$, $m,n \geqslant 0$,

$$a_{7;k,m,n} := \frac{(-1)^k}{2^{k-1}k} \sum_{j \geqslant 0} \binom{k+j-1}{j} \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_j=k-1 \\ r_1,\cdots,r_j \geqslant 0}} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_j=m \\ s_1,\cdots,s_j \geqslant 0}} \sum_{\substack{t_1+\cdots+t_j=n \\ t_1,\cdots,t_j \geqslant 0}} \prod_{1 \leqslant d \leqslant j} a^*_{6;r_d,s_d,t_d},$$

$$a_{8;k,m,n} := \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_k=m \\ r_1,\cdots,r_k \geqslant 0}} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_k=n \\ s_1,\cdots,s_k \geqslant 0}} \prod_{1 \leqslant d \leqslant k} a_{0;r_d,s_d}, \quad a_{9;m,n} := \sum_{k \geqslant 1} \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} \sum_{0 \leqslant d \leqslant n} a_{7;k,j,d}\, a_{8;k,m-j,n-d},$$

$$a_{10;m,n} := \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_k=m \\ r_1,\cdots,r_k \geqslant 0}} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_k=n \\ s_1,\cdots,s_k \geqslant 0}} \prod_{1 \leqslant d \leqslant k} a_{9;m,n},$$

de sorte que, d'après la définition des $c_{x,k}$ en (2.19), nous avons successivement

$$c_{x,k} \approx \sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} a_{7;k,m,n} \sigma_x^m \tau_x^n, \qquad w_x^k \approx \sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} a_{8;k,m,n} \sigma_x^m \tau_x^n \quad (k \geqslant 1),$$

$$\mathfrak{h}_x \approx \sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} a_{9;m,n} \sigma_x^m \tau_x^n, \qquad \mathrm{e}^{\mathfrak{h}_x} \approx \sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} a_{10;m,n} \sigma_x^m \tau_x^n.$$

En particulier $a_{8;k,m,n} = 0$ $(k \geqslant 1,\ m+n < k)$, $a_{9;0,0} = 0$ et $a_{10;0,0} = 1$. Finalement, définissant

$$a_{\ell,j} := \sum_{\ell \leqslant n \leqslant j} \binom{n}{\ell} a_{10;j-n,n} (-\log 2)^{n-\ell} \quad (0 \leqslant \ell \leqslant j), \tag{2.23}$$

nous obtenons (2.17) en posant

$$R_j(X) := \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant j} a_{\ell,j} X^\ell \quad (j \geqslant 0). \tag{2.24}$$

D'après (2.20), les réels $A_n := a_{n,n}$ $(n \geqslant 1)$ vérifient $A_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence

$$A_n = \tfrac{1}{2} \sum_{2 \leqslant j \leqslant n} (-1)^j (j+1) [\tau^n] \Big(\sum_{1 \leqslant d \leqslant n} A_d \tau^d \Big)^j \quad (n \geqslant 2). \tag{2.25}$$

Nous montrons par récurrence forte sur $n \geqslant 1$ que

$$A_n = \left(\tfrac{3}{4}\right)^n \binom{2n}{n} \quad (n \geqslant 1). \tag{2.26}$$

Le cas $n = 1$ est immédiat. Soit $n \geqslant 2$. Nous déduisons de (2.25) et de l'identité

$$\sum_{k \geqslant 0} \binom{2k}{k} z^k = \frac{1}{\sqrt{1-4z}} \quad \left(|z| < \tfrac{1}{4}\right),$$

que

$$A_n = [\tau^n]\left(\frac{1}{\sqrt{1-3\tau}} - 1\right) + [\tau^n]\left\{\tfrac{1}{2}\sum_{j \geqslant 0}(-1)^j(j+1)\left(\frac{1}{\sqrt{1-3\tau}} - 1\right)^j\right\} = \left(\tfrac{3}{4}\right)^n \binom{2n}{n} + \tfrac{1}{2}[\tau^n](1-3\tau),$$

et donc (2.26). Cela termine la démonstration. □

3 Domaines de contribution principale

Cette section est dévolue à l'explicitation de plages de valeurs pour $p_{\nu,m}(n)$ et $\nu(n)$ dominant la somme $S_\nu(x)$. Les deux valeurs $\nu = \omega$ et $\nu = \Omega$ sont considérées.

Commençons par écrire tout entier $n \geqslant 2$ sous la forme $n = ap_{\omega,m}^\ell(n)b = Ap_{\Omega,m}(n)B$ avec $P^+(a) < p < P^+(b)$, $P^+(A) \leqslant p \leqslant P^+(B)$, $\omega(b) - \omega(a) = \mathbf{1}_{\{2|\omega(n)\}}$ et $\Omega(B) - \Omega(A) = \mathbf{1}_{\{2|\Omega(n)\}}$. La décomposition est clairement unique dans le cas $\nu = \omega$; elle l'est aussi lorsque $\nu = \Omega$ puisque les conditions indiquées impliquent $\Omega(A) = \lfloor(\Omega(n) - 1)/2\rfloor$. Posons

$$\Phi_k(x, y) := \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P^-(n) > y \\ \omega(n) = k}} 1 \quad (k \geqslant 1,\ 2 \leqslant y \leqslant x), \tag{3.1}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} S_\omega(x) &= \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \sum_{k \leqslant \frac{\log x}{\log 4}} \sum_{\substack{a \leqslant x/p \\ P^+(a) < p \\ \omega(a) = k}} \sum_{\ell \leqslant \frac{\log x}{\log 2}} \left\{\Phi_k\left(\frac{x}{ap^\ell}, p\right) + \Phi_{k+1}\left(\frac{x}{ap^\ell}, p\right)\right\} =: S_{\omega,\iota}(x) + S_{\omega,\pi}(x), \\ S_\Omega(x) &= \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \sum_{\substack{A \leqslant x/p \\ P^+(A) \leqslant p}} \sum_{\substack{B \leqslant x/Ap \\ P^-(B) \geqslant p}} \left(\mathbf{1}_{\{\Omega(A) = \Omega(B)\}} + \mathbf{1}_{\{\Omega(A) = \Omega(B) - 1\}}\right) =: S_{\Omega,\iota}(x) + S_{\Omega,\pi}(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Commençons par évaluer la contribution $S_{\nu,\iota}(x)$ correspondant aux entiers $n \leqslant x$ pour lesquels $\nu(n)$ est impair. La première étape consiste à dégager un domaine de contribution principale pour les variables p et k.

Rappelons la définition de ϱ_x en (1.9), celle de $\xi := \log_2 x$ en (2.1), posons

$$\begin{gathered} q_{1,x} := \mathrm{e}^{\varrho_x/(\log \varrho_x)^2} = \mathrm{e}^{\{1+o(1)\}\sqrt{32\xi/(\log \xi)^5}}, \quad q_{2,x} := \mathrm{e}^{\varrho_x(\log \varrho_x)^2} = \mathrm{e}^{\{1+o(1)\}\sqrt{\xi(\log \xi)^2/8}}, \\ \mathcal{P}_{\omega,x} := [q_{1,x}, q_{2,x}], \quad \mathcal{K}_{\omega,x} := \left[1, \frac{\xi}{\log \xi}\right], \quad \mathcal{P}_{\Omega,x} := [2, \log x], \quad \mathcal{K}_{\Omega,x} := \left[1, \tfrac{3}{2}\xi\right], \\ \mathcal{A}_{\nu,x} := \{n \leqslant x : p_{\nu,m}(n) \in \mathcal{P}_{\nu,x},\ \Omega(n) \leqslant 10\xi,\ \nu(n) = 2k+1,\ k \in \mathcal{K}_{\nu,x}\} \quad (x \geqslant 16) \end{gathered} \tag{3.3}$$

et notons

$$S^*_{\nu,\iota}(x) := \sum_{n\in\mathcal{A}_{\nu,x}} \frac{1}{p_{\nu,m}(n)} \quad (x \geqslant 16), \tag{3.4}$$

la contribution à $S_{\nu,\iota}(x)$ des entiers $n \leqslant x$ appartenant au domaine $\mathcal{A}_{\nu,x}$. Les deux résultats suivants permettent de restreindre l'étude de $S_{\nu,\iota}(x)$ à celle de $S^*_{\nu,\iota}(x)$.

Proposition 3.1. *Il existe une constante $c_0 > \frac{3}{2}$ telle que*

$$S_{\omega,\iota}(x) = S^*_{\omega,\iota}(x) + O\Big(\frac{x}{\log x}\exp\Big\{\sqrt{2(\log_2 x)\log_3 x}\Big(1 - \frac{c_0\log_4 x}{\log_3 x}\Big)\Big\}\Big) \quad (x \geqslant x_0). \tag{3.5}$$

Démonstration. Rappelons la définition de ξ en (2.1). D'après [12, lemme 2.1], nous avons

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Omega(n)>10\xi}} \frac{1}{p_{\omega,m}(n)} \ll \frac{x}{(\log x)^5}, \qquad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ p_{\omega,m}(n)>\log x}} \frac{1}{p_{\omega,m}(n)} \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\log x} \leqslant \frac{x}{\log x}\cdot$$

Posons

$$E(x) := \sum_{\substack{n\in[1,x]\smallsetminus\mathcal{A}_{\omega,x}\\ \Omega(n)\leqslant 10\xi\\ p_{\omega,m}(n)\leqslant\log x}} \frac{1}{p_{\omega,m}(n)} = \Bigg(\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(a)\notin\mathcal{K}_{\omega,x}\\ \Omega(n)\leqslant 10\xi\\ p_{\omega,m}(n)\leqslant\log x}} + \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(a)\in\mathcal{K}_{\omega,x}\\ p_{\omega,m}(n)\notin\mathcal{P}_{\omega,x}\\ p_{\omega,m}(n)\leqslant\log x}}\Bigg)\frac{1}{p_{\omega,m}(n)} =: E_1(x) + E_2(x) \quad (x\geqslant 16),$$

de sorte que

$$S_{\omega,\iota}(x) = S^*_{\omega,\iota}(x) + E(x) + O\Big(\frac{x}{\log x}\Big)\cdot \tag{3.6}$$

Nous évaluons $E(x)$ en suivant la méthode employée dans [11, §4]. L'inégalité de Hardy-Ramanujan permet de majorer $E_1(x)$ par

$$\sum_{3\leqslant p\leqslant\log x}\frac{1}{p}\sum_{\substack{k\notin\mathcal{K}_{\omega,x}\\ k\leqslant 10\xi}}\sum_{\substack{a\leqslant x\\ P^+(a)<p\\ \omega(a)=k}}\sum_{\ell\leqslant 10\xi}\sum_{\substack{b\leqslant x/ap^\ell\\ \omega(b)=k}} 1 \ll \frac{x}{\log x}\sum_{3\leqslant p\leqslant\log x}\frac{1}{p^2}\sum_{\substack{k\notin\mathcal{K}_{\omega,x}\\ k\leqslant 10\xi}}\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{\substack{P^+(a)<p\\ \omega(a)=k}}\frac{1}{a}\cdot \tag{3.7}$$

Par ailleurs, le théorème de Mertens fournit la majoration

$$\sum_{\substack{P^+(a)<p\\ \omega(a)=k}}\frac{1}{a} \ll \frac{1}{k!}\Big(\sum_{q\leqslant p}\frac{1}{q-1}\Big)^k \ll \frac{(\log_2 p + M_0)^k}{k!}, \tag{3.8}$$

où M_0 désigne la constante de Meissel-Mertens. Regroupant les majorations (3.7) et (3.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} E_1(x) &\ll \frac{x}{\xi\log x}\sum_{3\leqslant p\leqslant\log x}\frac{1}{p^2}\sum_{\substack{k\notin\mathcal{K}_{\omega,x}\\ k\leqslant 10\xi}}\frac{(\{\log_2 p + M_0\}\xi)^k}{k!(k-1)!}\\ &\ll \frac{x}{\xi\log x}\sum_{3\leqslant p\leqslant\log x}\frac{1}{p^2}\sum_{\xi/\log\xi<k\leqslant 10\xi}\bigg(\frac{\mathrm{e}\sqrt{\{\log_2 p + M_0\}\xi}}{k}\bigg)^{2k}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

d'après la formule de Stirling. Puisque la fonction $v \mapsto (\lambda/v)^v$ atteint son maximum en $v = \lambda$, nous déduisons de (3.9) que

$$E_1(x) \ll \frac{x}{\log x} \sum_{3 \leqslant p \leqslant \log x} \frac{1}{p^2} \left(\frac{\{\log \xi\}^{3/2}}{\sqrt{\xi}} \right)^{2\xi/\log \xi} \ll \frac{x\xi}{\log x}. \tag{3.10}$$

Il reste à majorer $E_2(x)$. Rappelons les définitions de $q_{1,x}$ et $q_{2,x}$ en (3.3). L'estimation (2.17) avec $J = 0$ implique

$$\varrho_x = \sqrt{\frac{2\xi}{\log \xi}} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log_2 \xi}{\log \xi} \right) \right\} \quad (x \geqslant x_0).$$

Par suite,

$$\log_2 q_{1,x} = \tfrac{1}{2}\big\{\log\xi - 5\log_2 \xi + 5\log 2 + o(1)\big\}, \quad \log_2 q_{2,x} = \tfrac{1}{2}\big\{\log\xi + 3\log_2 \xi - 3\log 2 + o(1)\big\}.$$

Le terme d'erreur $E_2(x)$ est donc

$$\ll \frac{x}{\xi \log x} \sum_{p \notin \mathcal{P}_{\omega,x}} \frac{1}{p^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\omega,x}} \left(\frac{\mathrm{e}\sqrt{\{\log_2 p + M_0\}\xi}}{k} \right)^{2k} \ll \frac{x}{\xi \log x} \sum_{p \notin \mathcal{P}_{\omega,x}} \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{(\log_2 p + M_0)\xi}}}{p^2}. \tag{3.11}$$

Or, nous avons d'une part

$$\sum_{3 \leqslant p < q_{1,x}} \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{(\log_2 p + M_0)\xi}}}{p^2} \ll \exp\left(\sqrt{2\xi \log \xi} \left\{ 1 - \frac{5\log_2 \xi}{2\log \xi} + O\left(\frac{1}{\log \xi} \right) \right\} \right), \tag{3.12}$$

et, d'autre part,

$$\sum_{q_{2,x} < p \leqslant \log x} \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{(\log_2 p + M_0)\xi}}}{p^2} \ll \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2\xi \log \xi}}}{\mathrm{e}^{2\sqrt{\xi \log \xi}}} = o(1). \tag{3.13}$$

En regroupant les estimations (3.6), (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13) nous obtenons (3.5). □

Proposition 3.2. *Nous avons*

$$S_{\Omega,\iota}(x) = S^*_{\Omega,\iota}(x) + O\left(\frac{x}{\log x} \right) \quad (x \geqslant 3). \tag{3.14}$$

Démonstration. Nous avons d'abord trivialement

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ p_{\Omega,m}(n) > \log x}} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\log x} \leqslant \frac{x}{\log x}.$$

Ensuite, d'après [12, lemme 2.1] appliqué avec $k = \lfloor 3\xi \rfloor$, nous avons

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ \Omega(n) > 3\xi + 1}} \frac{1}{p_{\nu,m}(n)} \leqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \sum_{\substack{d \leqslant x/p \\ \Omega(d) \geqslant \lfloor 3\xi \rfloor}} 1 \ll \frac{x \log_2 x}{(\log x)^{\log 8 - 1}} \ll \frac{x}{\log x}. \tag{3.15}$$ □

Rappelons la définition de $F_\nu(y,z)$ en (1.9), celle de $\mathcal{F}_\nu(z)$ en (1.13) et posons

$$g_\Omega(y,z) := \frac{\mathcal{F}_\Omega(z) F_\Omega(y,z)}{1 - z/y}, \quad g_\omega(y,z) := \frac{\mathcal{F}_\omega(z)}{F_\omega(y,z)} \quad (y \geqslant 2,\, |z| < 2). \tag{3.16}$$

4 Preuve du Théorème 1.1 : préparation technique

Rappelons la définition de ξ en (2.1), celle de $\Phi_k(x,y)$ en (3.1), et posons

$$\mathfrak{r}_{x,t} := \frac{t-1}{\xi} \quad (x \geqslant 3,\ t \in \mathbb{R}). \tag{4.1}$$

Nous ferons usage du résultat suivant dû à Alladi.

Lemme 4.1 ([1, th. 6]). Soit $\varepsilon > 0$. Sous les conditions $3 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^{(\log x)^{2/5}}$ et $0 < \mathfrak{r}_{x,k} \leqslant 2-\varepsilon$, nous avons

$$\Phi_k(x,y) = \frac{x g_\omega(y, \mathfrak{r}_{x,k}) \xi^{k-1}}{(\log x)\Gamma(1+\mathfrak{r}_{x,k})(k-1)!}\Big\{1 + O\Big(\frac{k\{\log_2 y\}^2}{\xi^2}\Big)\Big\} \quad (x \geqslant 3). \tag{4.2}$$

Posons, pour $k \geqslant 1$, $p \geqslant 3$,

$$\begin{gathered}\lambda_\omega(k,p) := \sum_{\substack{P^+(a)\leqslant p\\ \omega(a)=k}} \frac{1}{a}, \quad \mathcal{U}_x := \Big[\frac{\varrho_x}{(\log \varrho_x)^2}, \varrho_x(\log \varrho_x)^2\Big], \quad \mathcal{D}_x^\pm := \Big]-\infty \pm \frac{i\xi}{\varrho_x}, \pm\frac{i\xi}{\varrho_x}\Big],\\ \mathcal{C}_x := \Big\{\frac{\xi \mathrm{e}^{i\vartheta}}{\varrho_x} : |\vartheta| \leqslant \tfrac{\pi}{2}\Big\}, \quad S^{**}_{\omega,\iota}(x) := \frac{x}{2\pi i \xi \log x}\int_{\mathcal{H}_x}\int_{\mathcal{U}_x} \frac{F_\omega(\mathrm{e}^u, \xi/s)\,\mathrm{e}^{s-u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s}{u} \quad (x \geqslant x_0),\end{gathered} \tag{4.3}$$

où $\mathcal{H}_x$ est un contour de Hankel constitué des deux demi-droites $\mathcal{D}_x^+$, $\mathcal{D}_x^-$ et du demi-cercle $\mathcal{C}_x$.

Proposition 4.2. *Nous avons*

$$S^*_{\omega,\iota}(x) = S^{**}_{\omega,\iota}(x)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log_3 x}\Big)\Big\} \quad (x \geqslant 16). \tag{4.4}$$

Démonstration. Pour $p \in \mathcal{P}_{\omega,x}$, $k \in \mathcal{K}_{\omega,x}$, nous avons $p \leqslant \log x$ et, puisque $\Omega(n) \leqslant 10\log_2 x$, il vient $ap^\ell \leqslant (\log x)^{10\log_2 x+1}$, et donc

$$p < \log x < \mathrm{e}^{\{\log(x/ap^\ell)\}^{2/5}} \quad (1 \leqslant \ell \leqslant \Omega(n)),$$

pour x suffisamment grand. Nous pouvons donc évaluer $\Phi_k(x,p)$ par le Lemme 4.1 lorsque $(p,k) \in \mathcal{P}_{\omega,x} \times \mathcal{K}_{\omega,x}$. L'estimation (4.2) fournit ainsi

$$S^*_{\omega,\iota}(x) = \Big\{1 + O\Big(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\Big)\Big\} x \sum_{p\in\mathcal{P}_{\omega,x}} \sum_{k\in\mathcal{K}_{\omega,x}} \sum_{\substack{a\leqslant x/p\\ P^+(a)\leqslant p\\ \omega(a)=k}} \sum_{1\leqslant \ell\leqslant 10\xi} \frac{g_\omega(p, \mathfrak{r}_{x/ap^\ell,k})\{\log_2(x/ap^\ell)\}^{k-1}}{ap^{\ell+1}\log(x/ap^\ell)\Gamma(1+\mathfrak{r}_{x/ap^\ell,k})(k-1)!}.$$

De plus, sous les conditions $\Omega(n) \leqslant 10\log_2 x$ et $p \leqslant \log x$, nous avons

$$\begin{gathered}\log\frac{x}{ap^\ell} = \Big\{1 + O\Big(\frac{\{\log_2 x\}^2}{\log x}\Big)\Big\}\log x, \quad \log_2\Big(\frac{x}{ap^\ell}\Big) = \Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 x}{\log x}\Big)\Big\}\log_2 x,\\ \mathfrak{r}_{x/ap^\ell,k} = \mathfrak{r}_{x,k}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 x}{\log x}\Big)\Big\} \quad (1 \leqslant \ell \leqslant \Omega(n)).\end{gathered}$$

Enfin, le théorème des accroissements finis implique

$$g_\omega(p, \mathfrak{r}_{x,k}) = 1 + O\Big(\frac{1}{\log_3 x}\Big), \quad \Gamma(1+\mathfrak{r}_{x,k}) = 1 + O\Big(\frac{1}{\log_3 x}\Big) \quad (x \geqslant 16,\ k \in \mathcal{K}_{\omega,x}).$$

Il vient

$$S^*_{\omega,\iota}(x) = \frac{x}{\log x} \sum_{p \in \mathcal{P}_{\omega,x}} \frac{1}{p^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_{\omega,x}} \frac{\xi^{k-1}\lambda_\omega(k,p)}{(k-1)!}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log \xi}\Big)\Big\} \quad (x \geqslant 16), \tag{4.5}$$

puisque

$$\sum_{1 \leqslant \ell \leqslant 10\xi} \frac{1}{p^{\ell+1}} = \frac{1}{p^2}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log \xi}\Big)\Big\} \quad (p \in \mathcal{P}_{\omega,x}).$$

Par ailleurs, d'après (3.8) et la formule de Stirling, nous avons la majoration

$$\begin{aligned}\sum_{\xi/\log \xi < k \leqslant \pi(p)} \frac{\xi^{k-1}\lambda_\omega(k,p)}{(k-1)!} &\ll \frac{1}{\xi} \sum_{\xi/\log \xi < k \leqslant \pi(p)} \Big(\frac{\mathrm{e}\sqrt{\xi\{\log_2 p + M_0\}}}{k}\Big)^{2k} \\ &\ll \frac{\pi(p)}{\xi}\Big(\frac{\{\log \xi\}^{3/2}}{\sqrt{\xi}}\Big)^{2\xi/\log \xi} \ll \frac{p}{\log p}.\end{aligned}$$

Il suit

$$\frac{x}{\log x} \sum_{p \in \mathcal{P}_{\omega,x}} \frac{1}{p^2} \sum_{\xi/\log \xi < k \leqslant \pi(p)} \frac{\xi^{k-1}\lambda_\omega(k,p)}{(k-1)!} \ll \frac{x}{\log x}. \tag{4.6}$$

Ce terme d'erreur est pleinement acceptable au vu de (1.2). En regroupant l'estimation (4.5) et la majoration (4.6), nous obtenons

$$S^*_{\omega,\iota}(x) = \frac{x}{\log x} \sum_{p \in \mathcal{P}_{\omega,x}} \frac{1}{p^2} \sum_{k \leqslant \pi(p)} \frac{\xi^{k-1}\lambda_\omega(k,p)}{(k-1)!}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log \xi}\Big)\Big\} \quad (x \geqslant 16).$$

La formule de Hankel (voir *e.g.* [15, th. II.0.17]) fournit alors

$$S^*_{\omega,\iota}(x) = \frac{x\{1 + O(1/\log \xi)\}}{2\pi i \xi \log x} \sum_{p \in \mathcal{P}_{\omega,x}} \frac{1}{p^2} \int_{\mathcal{H}_x} \Big\{\sum_{k \leqslant \pi(p)} \Big(\frac{\xi}{s}\Big)^k \lambda_\omega(k,p)\Big\} \mathrm{e}^s \,\mathrm{d}s. \tag{4.7}$$

Puisque

$$k > \pi(p) \Rightarrow \lambda_\omega(k,p) = 0 \quad (p \geqslant 2),$$

nous déduisons de (4.7) et de l'identité

$$\sum_{k \geqslant 0} \lambda_\omega(k,p) z^k = F_\omega(p,z) \quad (z \in \mathbb{C},\, p \geqslant 2),$$

l'estimation

$$S^*_{\omega,\iota}(x) = \frac{x\{1 + O(1/\log \xi)\}}{2\pi i \xi \log x} \int_{\mathcal{P}_{\omega,x}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 \log t} \int_{\mathcal{H}_x} F_\omega\Big(t, \frac{\xi}{s}\Big)\, \mathrm{e}^s \,\mathrm{d}s, \tag{4.8}$$

où nous avons utilisé le théorème des nombres premiers. La formule (4.4) résulte alors du changement de variables $u = \log t$ dans (4.8). □

Pour tout chemin γ de $\mathbb{C}^*$, définissons

$$(4.9)\qquad I_\gamma(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \int_{\mathcal{U}_x} \frac{F_\omega(\mathrm{e}^u, \xi/s)\,\mathrm{e}^{s-u}\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s}{u} \quad (x \geqslant x_0),$$

de sorte que, au vu des définitions (4.3), nous avons

$$(4.10)\qquad S^{**}_{\omega,\iota}(x) = \frac{x}{\xi\log x}\big\{I_{\mathcal{C}_x}(x) + I_{\mathcal{D}^+_x}(x) + I_{\mathcal{D}^-_x}(x)\big\}.$$

Posons encore

$$(4.11)\qquad \Theta := \big[-\pi/3, \pi/3\big], \quad \mathcal{C}^+_x := \{s \in \mathcal{C}_x : \arg s \in \Theta\}, \quad \mathcal{C}^-_x := \mathcal{C}_x \smallsetminus \mathcal{C}^+_x \quad (x \geqslant x_0).$$

Nous verrons que la contribution principale à $S^{**}_{\omega,\iota}(x)$ est obtenue le long de $\mathcal{C}^+_x$. Nous évaluons $I_{\mathcal{C}^+_x}$ à la section 5, puis, à la section 6, nous obtenons une majoration des termes d'erreur $I_{\mathcal{C}^-_x}$, $I_{\mathcal{D}^+_x}$ et $I_{\mathcal{D}^-_x}$.

5 Évaluation de $I_{\mathcal{C}^+_x}$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$(5.1)\qquad \Gamma(z; x, y) := \int_x^y t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\;\mathrm{d}t \quad (x, y > 0,\ |\arg z| \leqslant \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon).$$

Lemme 5.1. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction vérifiant $\lim_{t\to\infty}\psi(t) = +\infty$. Sous les conditions $r \geqslant 1$, $|\vartheta| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $z = r\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$, nous avons uniformément*

$$(5.2)\qquad \Gamma\Big(z; \frac{r}{\psi(r)}, r\psi(r)\Big) = \sqrt{2\pi}z^{z-1/2}\,\mathrm{e}^{-z}\left\{1 + O\Big(\frac{1}{r}\Big)\right\}.$$

Démonstration. Le changement de variables $t = z\,\mathrm{e}^s$ dans (5.1) permet d'écrire

$$(5.3)\qquad \Gamma^*(z) := z^{-z}\,\mathrm{e}^z\,\Gamma\Big(z; \frac{r}{\psi(r)}, r\psi(r)\Big) = \int_{\log\{r/z\psi(r)\}}^{\log\{r\psi(r)/z\}} \mathrm{e}^{-z(\mathrm{e}^s - s - 1)}\;\mathrm{d}s,$$

où le logarithme complexe est pris en détermination principale. Puisque $z = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$, nous avons

$$\Gamma^*(z) = \int_{-\log\psi(r) - i\vartheta}^{\log\psi(r) - i\vartheta} \mathrm{e}^{-z(\mathrm{e}^s - s - 1)}\;\mathrm{d}s.$$

Comme $s \mapsto \mathrm{e}^{-z(\mathrm{e}^s - s - 1)}$ est une fonction entière, le théorème intégral de Cauchy implique

$$(5.4)\quad \Gamma^*(z) = \left\{\int_{-\log\psi(r) - i\vartheta}^{-\log\psi(r)} + \int_{-\log\psi(r)}^{\log\psi(r)} + \int_{\log\psi(r)}^{\log\psi(r) - i\vartheta}\right\} \mathrm{e}^{-z(\mathrm{e}^s - s - 1)}\;\mathrm{d}s =: G_1(z) + G_2(z) + G_3(z).$$

Pour $s = \log\psi(r) - i\tau$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$, nous avons

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{e}^{-z(\mathrm{e}^s - s - 1)}\big| &= \exp\big(\Re\big\{-r\mathrm{e}^{i\vartheta}\big(\psi(r)\mathrm{e}^{-i\tau} - \log\psi(r) + i\tau - 1\big)\big\}\big)\\ &= \mathrm{e}^{-r\psi(r)\cos(\vartheta-\tau) + r\cos\vartheta\{1 + \log\psi(r)\} + r\tau\sin\vartheta} \ll \mathrm{e}^{-r\{\psi(r)\cos\vartheta - \log\psi(r) - \vartheta - 1\}},\end{aligned}$$

uniformément en τ. Il vient

$$G_3(z) \ll \vartheta\,\mathrm{e}^{-r\{\psi(r)\cos\vartheta-\log\psi(r)-\vartheta-1\}} \ll \frac{1}{r^{3/2}}\cdot \tag{5.5}$$

De manière analogue, nous avons

$$G_1(z) \ll \vartheta\,\mathrm{e}^{-r\{\log\psi(r)-1\}} \ll \frac{1}{r^{3/2}}\cdot \tag{5.6}$$

En insérant (5.5) et (5.6) dans (5.4), nous obtenons

$$\Gamma^*(z) = G_2(z) + O\Big(\frac{1}{r^{3/2}}\Big)\cdot \tag{5.7}$$

Désignons par $G_2^+(z)$ la contribution à $G_2(z)$ de l'intervalle $[-r^{-1/3}, r^{-1/3}]$ et posons $G_2^-(z) := G_2(z) - G_2^+(z)$. Puisque

$$\mathrm{e}^v - v - 1 = \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{6}v^3 + O(v^4) \quad (v \ll 1),$$

nous obtenons, par symétrie de l'intervalle d'intégration,

$$G_2^+(z) = \int_{-r^{-1/3}}^{r^{-1/3}} \mathrm{e}^{-zv^2/2}\left\{1 + O\big(rv^4 + r^2v^6\big)\right\}\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big\}\cdot \tag{5.8}$$

Par ailleurs,

$$G_2^-(z) \ll \exp\big(-r\big\{\mathrm{e}^{-r^{-1/3}} + r^{-1/3} - 1\big\}\cos\vartheta\big)\log\psi(r) \ll \frac{1}{r^{3/2}}, \tag{5.9}$$

de sorte que la formule (5.2) découle des estimations (5.3), (5.7), (5.8) et (5.9). □

Rappelons la définition de ϱ_x en (1.9).

Lemme 5.2. *Nous avons*

$$I_{\mathcal{C}_x^+}(x) = \frac{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)\,\mathrm{e}^{\xi/\varrho_x - \varrho_x}\sqrt{\xi}}{\sqrt{2}\varrho_x}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log_3 x}\Big)\Big\} \quad (x \geqslant x_0). \tag{5.10}$$

Démonstration. D'après la définition (4.9), nous avons

$$I_{\mathcal{C}_x^+}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_x^+}\int_{\mathcal{U}_x} \frac{F_\omega(\mathrm{e}^u, \xi/s)\,\mathrm{e}^{s-u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s}{u}\cdot$$

Rappelons la définition de Θ en (4.11), posons $z_\vartheta = z_{x,\vartheta} := \varrho_x\,\mathrm{e}^{-i\vartheta}$ ($\vartheta \in \mathbb{R}$) et notons que $\mathcal{C}_x^+ = \{\xi/z_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, de sorte que

$$I_{\mathcal{C}_x^+}(x) = \frac{\xi}{2\pi\varrho_x}\int_\Theta\int_{\mathcal{U}_x} \frac{F_\omega(\mathrm{e}^u, z_\vartheta)\,\mathrm{e}^{\xi/z_\vartheta + i\vartheta - u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\vartheta}{u}\cdot$$

Avec le changement de variables $u = \varrho_x(1+t)$, nous obtenons

$$I_{\mathcal{C}_x^+}(x) = \frac{\xi\,\mathrm{e}^{-\varrho_x}}{2\pi\varrho_x}\int_\Theta \mathrm{e}^{\xi/z_\vartheta + i\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \int_{1/(\log\varrho_x)^2-1}^{(\log\varrho_x)^2-1} \frac{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x\{1+t\}}, z_\vartheta)\,\mathrm{e}^{-\varrho_x t}\,\mathrm{d}t}{1+t}\cdot \tag{5.11}$$

Posons

$$\varphi(\vartheta, v) := \log F_\omega(\mathrm{e}^v, z_\vartheta) = \sum_{q<\mathrm{e}^v} \log\Big(1 + \frac{z_\vartheta}{q-1}\Big) \quad (\vartheta \in \Theta,\ v \geqslant 0).$$

Pour $0 \leqslant t \leqslant (\log \varrho_x)^2 - 1$ et x assez grand, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi(\vartheta, \varrho_x\{1+t\}) - \varphi(\vartheta, \varrho_x) &= \sum_{\mathrm{e}^{\varrho_x} \leqslant q < \mathrm{e}^{\varrho_x(1+t)}} \log\Big(1 + \frac{z_\vartheta}{q-1}\Big) \\ &= z_\vartheta \sum_{\mathrm{e}^{\varrho_x} \leqslant q < \mathrm{e}^{\varrho_x(1+t)}} \frac{1}{q-1} + O\Big(\varrho_x^2 \sum_{q \geqslant \mathrm{e}^{\varrho_x}} \frac{1}{\{q-1\}^2}\Big) \\ &= z_\vartheta\big\{\log(1+t) + O\big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\varrho_x}} + \varrho_x \mathrm{e}^{-\varrho_x}\big)\big\},\end{aligned} \tag{5.12}$$

où la dernière égalité découle d'une application d'une forme forte du théorème de Mertens. Lorsque $1/(\log \varrho_x)^2 - 1 \leqslant t \leqslant 0$, nous obtenons

$$\varphi(\vartheta, \varrho_x\{1+t\}) - \varphi(\vartheta, \varrho_x) = z_\vartheta\big\{\log(1+t) + O\big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\varrho_x}/\log \varrho_x}\big)\big\}.$$

Définissons

$$a_\vartheta(t) := \frac{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x\{1+t\}}, z_\vartheta)\,\mathrm{e}^{-\varrho_x t}}{1+t}, \quad A_\vartheta(t) := \log a_\vartheta(t) \quad (\vartheta \in \Theta,\ t \geqslant 0). \tag{5.13}$$

Nous déduisons de (5.12) que, pour $1/(\log \varrho_x)^2 - 1 \leqslant t \leqslant (\log \varrho_x)^2 - 1$,

$$A_\vartheta(t) - A_\vartheta(0) = (z_\vartheta - 1)\log(1+t) - \varrho_x t + O\big(\varrho_x \mathrm{e}^{-\sqrt{\varrho_x}/\log \varrho_x}\big),$$

soit

$$\frac{a_\vartheta(t)}{a_\vartheta(0)} = (1+t)^{z_\vartheta - 1}\mathrm{e}^{-\varrho_x t}\left\{1 + O\big(\varrho_x \mathrm{e}^{-\sqrt{\varrho_x}/\log \varrho_x}\big)\right\} \quad \Big(\frac{1}{\{\log \varrho_x\}^2} - 1 \leqslant t \leqslant \{\log \varrho_x\}^2 - 1\Big). \tag{5.14}$$

Posons

$$K_x(\vartheta) := \int_{1/(\log \varrho_x)^2 - 1}^{(\log \varrho_x)^2 - 1} (1+t)^{z_\vartheta - 1}\mathrm{e}^{-\varrho_x t}\,\mathrm{d}t \quad (x \geqslant 3,\ \vartheta \in \Theta).$$

D'après (5.11) et (5.14), nous avons

$$I_{\mathcal{C}_x^+}(x) = \frac{\xi\,\mathrm{e}^{-\varrho_x}\{1 + O(\varrho_x \mathrm{e}^{-\sqrt{\varrho_x}/\log \varrho_x})\}}{2\pi \varrho_x} \int_\Theta F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, z_\vartheta)\,\mathrm{e}^{\xi/z_\vartheta + i\vartheta} K_x(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Le changement de variables $v = \varrho_x(1+t)$ fournit

$$K_x(\vartheta) = \frac{\mathrm{e}^{\varrho_x}}{\varrho_x^{z_\vartheta}} \int_{\varrho_x/(\log \varrho_x)^2}^{\varrho_x(\log \varrho_x)^2} v^{z_\vartheta - 1}\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v = \frac{\{1 + O(1/\varrho_x)\}\sqrt{2\pi}\,z_\vartheta^{z_\vartheta - 1/2}\,\mathrm{e}^{\varrho_x - z_\vartheta}}{\varrho_x^{z_\vartheta}}, \tag{5.15}$$

où nous avons appliqué (5.2) avec $\psi = \log^2$. Il vient,

$$I_{\mathcal{C}_x^+}(x) = \frac{\xi\{1 + O(1/\varrho_x)\}}{\sqrt{2\pi}\,\varrho_x^{3/2}} \int_\Theta F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, z_\vartheta)\,\mathrm{e}^{\xi/z_\vartheta - z_\vartheta\{1+i\vartheta\} + 3i\vartheta/2}\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{5.16}$$

Il reste à évaluer l'intégrale en ϑ. Puisque $|\mathrm{e}^{-i\vartheta} - 1| \leqslant 1$ $(\vartheta \in \Theta)$, nous avons

$$\varphi(\vartheta, \varrho_x) - \varphi(0, \varrho_x) = (\mathrm{e}^{-i\vartheta} - 1)\sum_{q<\mathrm{e}^{\varrho_x}} \frac{\varrho_x}{q - 1 + \varrho_x} + O\Big(\varrho_x^2 \vartheta^2 \sum_{q<\mathrm{e}^{\varrho_x}} \frac{1}{q^2 + \varrho_x^2}\Big) \quad (\vartheta \in \Theta). \tag{5.17}$$

Rappelons que, d'après (2.2), ϱ_x vérifie la relation

$$\sum_{q<\mathrm{e}^{\varrho_x}} \frac{\varrho_x}{q-1+\varrho_x} = \frac{\xi}{\varrho_x} + O\big(\varrho_x \mathrm{e}^{-\varrho_x}\big).$$

En scindant la somme du terme d'erreur de (5.17) à $q=\varrho_x$, nous obtenons

$$\varphi(\vartheta,\varrho_x) - \varphi(0,\varrho_x) = \frac{\xi}{\varrho_x}\Big\{\mathrm{e}^{-i\vartheta} - 1 + O\Big(\frac{\vartheta^2}{\{\log \varrho_x\}^2} + \frac{|\vartheta|\,\mathrm{e}^{-\varrho_x}}{\log \varrho_x}\Big)\Big\},$$

puisque $\varrho_x^2 \log \varrho_x \asymp \xi$, au vu de (2.17). Définissons

$$\Theta_x^+ := \Big[-\Big(\frac{\xi}{\varrho_x}\Big)^{-1/3}, \Big(\frac{\xi}{\varrho_x}\Big)^{-1/3}\Big], \quad \Theta_x^- := \Theta \smallsetminus \Theta_x^+ \quad (x \geqslant 3).$$

La formule intégrale de Cauchy implique

$$\mathfrak{s}_{x,m} = \mathfrak{s}_m := \frac{1}{(-i)^m}\Big[\frac{\mathrm{d}^m \varphi(\vartheta,\varrho_x)}{\mathrm{d}\vartheta^m}\Big]_{\vartheta=0} = \frac{\xi}{\varrho_x}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\{\log \varrho_x\}^2}\Big)\Big\} \quad (x \geqslant 3,\ m \geqslant 1).$$

Puisque $\varphi'(0,\varrho_x) = -i\xi/\varrho_x + O(\varrho_x\,\mathrm{e}^{-\varrho_x})$, par définition de ϱ_x, il vient

$$\varphi(\vartheta,\varrho_x) - \varphi(0,\varrho_x) = -\frac{i\xi\vartheta}{\varrho_x} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{s}_2\,\vartheta^2 + \tfrac{1}{6} i\,\mathfrak{s}_3\,\vartheta^3 + O\Big(\varrho_x|\vartheta|\,\mathrm{e}^{-\varrho_x} + \frac{\xi\vartheta^4}{\varrho_x}\Big) \quad (\vartheta \in \Theta_x^+).$$

Posons

$$b(\vartheta) := F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, z_\vartheta)\,\mathrm{e}^{\xi/z_\vartheta - z_\vartheta\{1+i\vartheta\}+3i\vartheta/2}, \quad B(\vartheta) := \log b(\vartheta) \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Il vient,

$$\begin{aligned} B(\vartheta) - B(0) &= \frac{\xi}{z_\vartheta} - z_\vartheta\{1+i\vartheta\} + \tfrac{3}{2}i\vartheta - \frac{i\xi\vartheta}{\varrho_x} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{s}_2\,\vartheta^2 + \tfrac{1}{6}i\,\mathfrak{s}_3\,\vartheta^3 - \frac{\xi}{\varrho_x} + \varrho_x + O\Big(\varrho_x|\vartheta|\,\mathrm{e}^{-\varrho_x} + \frac{\xi\vartheta^4}{\varrho_x}\Big) \\ &= \tfrac{3}{2}i\vartheta - \tfrac{1}{2}\Big\{\frac{\xi}{\varrho_x} + \mathfrak{s}_2 + \varrho_x\Big\}\vartheta^2 - \tfrac{1}{6}i\Big\{\frac{\xi}{\varrho_x} - \mathfrak{s}_3 - 2\varrho_x\Big\}\vartheta^3 + O\Big(\varrho_x|\vartheta|\,\mathrm{e}^{-\varrho_x} + \frac{\xi\vartheta^4}{\varrho_x}\Big) \ (\vartheta \in \Theta_x^+), \end{aligned}$$

d'où, en posant $\mathfrak{s}_2^* := \xi/\varrho_x + \mathfrak{s}_2 + \varrho_x$ et $\mathfrak{s}_3^* := \xi/\varrho_x - \mathfrak{s}_3 - 2\varrho_x$ $(x \geqslant 3)$,

$$\frac{b(\vartheta)}{b(0)} = \mathrm{e}^{-\mathfrak{s}_2^*\vartheta^2/2}\big\{1 + \tfrac{3}{2}i\vartheta + O(\vartheta^2)\big\}\Big\{1 + \tfrac{1}{6}i\,\mathfrak{s}_3^*\,\vartheta^3 + O\Big(\frac{\xi^2\vartheta^6}{\varrho_x^2}\Big)\Big\}\Big\{1 + O\Big(\varrho_x|\vartheta|\,\mathrm{e}^{-\varrho_x} + \frac{\xi\vartheta^4}{\varrho_x}\Big)\Big\} \ (\vartheta \in \Theta_x^+).$$

En intégrant sur Θ_x^+, nous obtenons, grâce à la symétrie de l'intervalle d'intégration,

$$\begin{aligned} \int_{\Theta_x^+} \frac{b(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta}{b(0)} &= \int_{\Theta_x^+} \mathrm{e}^{-\mathfrak{s}_2^*\vartheta^2/2}\Big\{1 + O\Big(\frac{\xi\vartheta^4}{\varrho_x} + \frac{\xi^2\vartheta^6}{\varrho_x^2}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\mathfrak{s}_2^*}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\varrho_x}\Big)\Big\} = \sqrt{\frac{\pi\varrho_x}{\xi}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log \xi}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ainsi,

$$\int_{\Theta_x^+} F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, z_\vartheta)\,\mathrm{e}^{\xi/z_\vartheta - z_\vartheta\{1+i\vartheta\}+3i\vartheta/2}\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\sqrt{\pi\varrho_x}F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x},\varrho_x)\,\mathrm{e}^{\xi/\varrho_x - \varrho_x}}{\sqrt{\xi}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log \xi}\Big)\Big\}. \tag{5.19}$$

Il reste à majorer

$$\mathcal{E}(x) := \int_{\Theta_x^-} F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, z_\vartheta)\,\mathrm{e}^{\xi/z_\vartheta - z_\vartheta\{1+i\vartheta\}+3i\vartheta/2}\,\mathrm{d}\vartheta \quad (x \geqslant 3).$$

En majorant $|F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x\,\mathrm{e}^{-i\vartheta})|$ comme dans [9, lemme 3], nous déduisons l'existence d'une constante absolue $c > 0$ telle que

$$\frac{|F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x\,\mathrm{e}^{-i\vartheta})|}{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)} \ll \mathrm{e}^{-c\xi\vartheta^2/\varrho_x} \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}(x)| &\ll F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x) \int_{\Theta_x^-} \mathrm{e}^{-c\xi\vartheta^2/\varrho_x}\,\mathrm{e}^{\Re\{\xi/z_\vartheta - z_\vartheta(1+i\vartheta)\}}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &\ll F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)\,\mathrm{e}^{\xi/\varrho_x - \varrho_x} \int_{\Theta_x^-} \mathrm{e}^{-c\xi\vartheta^2/\varrho_x}\,\mathrm{e}^{\xi(\cos\vartheta - 1)/\varrho_x + \varrho_x(1-\vartheta\sin\vartheta-\cos\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta.\end{aligned}$$

Puisque $1 - \vartheta\sin\vartheta - \cos\vartheta \sim -\frac{1}{2}\vartheta^2 < 0$ $(\vartheta \in \Theta_x^-)$, il vient

$$|\mathcal{E}(x)| \ll F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)\,\mathrm{e}^{\xi/\varrho_x - \varrho_x} \int_{\Theta_x^-} \mathrm{e}^{-c\xi\vartheta^2/\varrho_x}\,\mathrm{d}\vartheta \ll F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)\,\mathrm{e}^{\xi/\varrho_x - \varrho_x}\Big(\frac{\varrho_x}{\xi}\Big)^{3/2}. \tag{5.20}$$

En regroupant les estimations (5.16), (5.19) et (5.20), nous obtenons bien (5.10). □

6 Preuve du Théorème 1.1 : estimation des termes d'erreur

Lemme 6.1. *Nous avons*

$$I_{\mathcal{C}_x^-}(x) \ll F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)\,\mathrm{e}^{\xi/2\varrho_x - \varrho_x}\,\xi^{1/4}(\log\xi)^{3/4} \quad (x \geqslant 3). \tag{6.1}$$

Démonstration. Rappelons la notation $z_\vartheta = \varrho_x\,\mathrm{e}^{-i\vartheta}$ et posons

$$T := \{\vartheta : \pi/3 < |\vartheta| \leqslant \pi/2\}, \quad J_1(u) := \int_T F_\omega(\mathrm{e}^u, z_\vartheta)\,\mathrm{e}^{\xi/z_\vartheta + i\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \quad (u \in \mathcal{U}_x).$$

D'après la définition de $I_{\mathcal{C}_x^-}$ en (4.9), nous avons

$$I_{\mathcal{C}_x^-}(x) = \frac{\xi}{2\pi\varrho_x} \int_{\mathcal{U}_x} \frac{J_1(u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}{u}. \tag{6.2}$$

Notons que, pour $\vartheta \in T$,

$$\big|F_\omega(\mathrm{e}^u, z_\vartheta)\big| = \prod_{q<\mathrm{e}^u}\left|1 + \frac{\varrho_x\,\mathrm{e}^{-i\vartheta}}{q-1}\right| \leqslant \prod_{q<\mathrm{e}^u}\Big(1 + \frac{\varrho_x}{q-1}\Big) = F_\omega(\mathrm{e}^u, \varrho_x).$$

Ainsi,

$$|J_1(u)| \leqslant F_\omega(\mathrm{e}^u, \varrho_x) \int_T \mathrm{e}^{\xi\cos\vartheta/\varrho_x}\,\mathrm{d}\vartheta \ll F_\omega(\mathrm{e}^u, \varrho_x)\,\mathrm{e}^{\xi/2\varrho_x}. \tag{6.3}$$

Posant

$$J_2(x) := \int_{\mathcal{U}_x} \frac{F_\omega(\mathrm{e}^u, \varrho_x)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}{u} \quad (x \geqslant x_0), \tag{6.4}$$

nous déduisons de (6.2) et (6.3) la majoration

$$I_{\mathcal{C}_x^-}(x) \ll \mathrm{e}^{\xi/2\varrho_x}\, J_2(x)\sqrt{\xi\log\xi}. \tag{6.5}$$

Rappelons la définition de a_ϑ en (5.13). À l'aide du changement de variables $u=\varrho_x(1+t)$, nous obtenons

$$J_2(x)=\mathrm{e}^{-\varrho_x}\int_{1/(\log\varrho_x)^2-1}^{(\log\varrho_x)^2-1}\frac{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x\{1+t\}},\varrho_x)\,\mathrm{e}^{-\varrho_x t}\,\mathrm{d}t}{1+t}=\mathrm{e}^{-\varrho_x}\int_{1/(\log\varrho_x)^2-1}^{(\log\varrho_x)^2-1}a_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'estimation (5.14) appliquée avec $\vartheta=0$, fournit

$$J_2(x)\ll F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x},\varrho_x)\,\mathrm{e}^{-\varrho_x}\,K_x(0)\ll\frac{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x},\varrho_x)\,\mathrm{e}^{-\varrho_x}}{\sqrt{\varrho_x}}, \tag{6.6}$$

d'après (5.15). La formule (6.1) est alors une conséquence directe des majorations (6.5) et (6.6). □

Il reste à évaluer $I_{\mathcal{D}_x^\pm}$. Rappelons que

$$I_{\mathcal{D}_x^\pm}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{D}_x^\pm}\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s\int_{\mathcal{U}_x}\frac{F_\omega(\mathrm{e}^u,\xi/s)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}{u}\quad(x\geqslant x_0).$$

Lemme 6.2. *Nous avons*

$$|I_{\mathcal{D}_x^\pm}(x)|\ll\frac{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x},\varrho_x)\,\mathrm{e}^{-\varrho_x}}{\sqrt{\varrho_x}}\quad(x\geqslant 3). \tag{6.7}$$

Démonstration. Notons d'emblée que

$$\mathcal{D}_x^\pm=\Big\{t\pm\frac{i\xi}{\varrho_x}:t\leqslant 0\Big\}$$

et rappelons la définition de $J_2(x)$ en (6.4). Nous affirmons que

$$I_{\mathcal{D}^\pm}(x)\ll J_2(x). \tag{6.8}$$

En effet, puisque l'on a, uniformément pour $t\leqslant 0$,

$$\Big|F_\omega\Big(\mathrm{e}^u,\frac{\xi}{t\pm i\xi/\varrho_x}\Big)\Big|=\prod_{q<\mathrm{e}^u}\Big|1+\frac{\xi}{(t\pm i\xi/\varrho_x)(q-1)}\Big|\leqslant\prod_{q<\mathrm{e}^u}\Big(1+\frac{\varrho_x}{q-1}\Big)=F_\omega(\mathrm{e}^u,\varrho_x),$$

nous pouvons écrire

$$\Big|\int_{\mathcal{D}_x^\pm}F_\omega\Big(\mathrm{e}^u,\frac{\xi}{s}\Big)\,\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s\Big|\leqslant\int_{-\infty}^0\Big|F_\omega\Big(\mathrm{e}^u,\frac{\xi}{t\pm i\xi/\varrho_x}\Big)\Big|\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\leqslant F_\omega(\mathrm{e}^u,\varrho_x)\quad(u\in\mathcal{U}_x),$$

et donc (6.8). Le résultat découle alors des estimations (6.6) et (6.8). □

7 Preuve du Théorème 1.1 : complétion de l'argument

D'après (6.1) et (6.7), il est clair que

$$\max\big\{I_{\mathcal{D}_x^\pm}(x), I_{\mathcal{C}_x^-}(x)\big\} \ll F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)\,\mathrm{e}^{\xi/2\varrho_x-\varrho_x}\,\xi^{1/4}(\log\xi)^{3/4}.$$

Les estimations (5.10) et (6.1) fournissent de plus

$$\max\big\{I_{\mathcal{D}_x^\pm}(x), I_{\mathcal{C}_x^-}(x)\big\} \ll \frac{I_{\mathcal{C}_x^+}(x)\sqrt{\xi}\,\mathrm{e}^{-\xi/2\varrho_x}}{\sqrt{\varrho_x}} \ll I_{\mathcal{C}_x^+}(x)\log\xi,$$

puisque, d'après (2.17), nous avons $\varrho_x \leqslant 2\sqrt{\xi/\log\xi}$ pour x suffisamment grand, soit $-\xi/2\varrho_x \leqslant -\frac{1}{4}\sqrt{\xi\log\xi}$. Les estimations (4.10) et (5.10) impliquent donc

$$S_{\omega,\iota}^{**}(x) = \frac{xI_{\mathcal{C}_x^+}(x)}{\xi\log x}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log\xi}\Big)\Big\} = \frac{xF_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x},\varrho_x)\,\mathrm{e}^{\xi/\varrho_x-\varrho_x}}{\sqrt{2}\varrho_x(\log x)\sqrt{\log_2 x}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log\xi}\Big)\Big\}. \tag{7.1}$$

Il reste à estimer la somme $S_{\omega,\pi}(x)$ correspondant au cas des entiers $n \leqslant x$ pour lesquels $\omega(n)$ est pair. Posons

$$S_{\omega,\pi}^*(x) := \sum_{p\in\mathcal{P}_{\omega,x}}\frac{1}{p}\sum_{k\in\mathcal{K}_{\omega,x}}\sum_{\substack{a\leqslant x/p\\ P^+(a)<p\\ \omega(a)=k}}\sum_{1\leqslant\ell\leqslant 10\log_2 x}\Phi_{k+1}\Big(\frac{x}{ap^\ell},p\Big)\quad(x\geqslant 16).$$

L'estimation (3.5) persiste alors sous la forme

$$S_{\omega,\pi}(x) = S_{\omega,\pi}^*(x) + O\Big(\frac{x}{\log x}\exp\Big\{\sqrt{2(\log_2 x)\log_3 x}\Big(1-\frac{c_1\log_4 x}{\log_3 x}\Big)\Big\}\Big)\quad(x\geqslant x_0),$$

pour une constante $c_1 > \frac{3}{2}$. L'ensemble des estimations obtenues dans le cas $\omega(n)$ impair est encore valide lorsque $\omega(n)$ est pair. La seule différence significative réside dans la formule (4.7) pour laquelle la quantité $\lambda_\omega(k,p)$ doit être remplacée par $\lambda_\omega(k-1,p)$. Définissant

$$S_{\omega,\pi}^{**}(x) := \frac{x}{2\pi i\log x}\int_{\mathcal{U}_x}\frac{\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}{u}\int_{\mathcal{H}_x}F_\omega\Big(\mathrm{e}^u,\frac{\xi}{s}\Big)\frac{\mathrm{e}^s}{s}\,\mathrm{d}s\quad(x\geqslant 3),$$

nous avons l'estimation

$$S_{\omega,\pi}^*(x) = S_{\omega,\pi}^{**}(x)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log_3 x}\Big)\Big\}\quad(x\geqslant 3).$$

Ainsi, rappelant que $s\in\mathcal{C}_x^+ \Rightarrow |s| = \xi/\varrho_x$, nous obtenons finalement

$$S_{\omega,\pi}(x) = \varrho_x S_{\omega,\iota}(x)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log_3 x}\Big)\Big\}\quad(x\geqslant 3). \tag{7.2}$$

Par conséquent, la formule (1.10) découle des estimations (3.5), (4.4), (7.1) et (7.2). □

8 Formule explicite pour $\log S_\omega(x)$ et comportement local

8.1 Développement asymptotique de $\log F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)$

Rappelons que, d'après la définition de $F_\omega(y,z)$ en (1.9), nous avons

$$\log F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x) = \sum_{q<\mathrm{e}^{\varrho_x}} \log\Big(1+\frac{\varrho_x}{q-1}\Big).$$

Afin d'évaluer cette somme, nous la scindons à $q=\varrho_x$. Posons

$$\beta_m := (-1)^m(m-1)!\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^m(n+1)} \quad (m\geqslant 1).$$

Lemme 8.1. *Soit $M\geqslant 1$. Nous avons*

$$\sum_{v<q\leqslant \mathrm{e}^v}\log\Big(1+\frac{v}{q}\Big) = v\bigg\{\log\Big(\frac{v}{\log v}\Big)+\sum_{1\leqslant m\leqslant M}\frac{\beta_m}{(\log v)^m}+O\bigg(\frac{1}{\{\log v\}^{M+1}}\bigg)\bigg\}. \tag{8.1}$$

Démonstration. Posons

$$I_1(v) := \int_v^{\mathrm{e}^v}\frac{\log(1+v/t)\,\mathrm{d}t}{\log t} \quad (v\geqslant 3).$$

Une application du théorème des nombres premiers fournit

$$\sum_{v<q\leqslant \mathrm{e}^v}\log\Big(1+\frac{v}{q}\Big) = I_1(v)+O\bigg(\int_v^{\mathrm{e}^v}\log\Big(1+\frac{v}{t}\Big)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log t}}\,\mathrm{d}t\bigg). \tag{8.2}$$

Le terme d'erreur peut être majoré par

$$v\int_v^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\log t}}}{t}\,\mathrm{d}t \ll v\sqrt{\log v}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log v}}. \tag{8.3}$$

Par ailleurs, d'après (2.6), nous avons

$$\begin{aligned} I_1(v) &= \int_v^{\mathrm{e}^v}\frac{\mathrm{d}t}{\log t}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}v^n}{nt^n} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}v^n}{n}\int_v^{\mathrm{e}^v}\frac{\mathrm{d}t}{t^n\log t} \\ &= v\bigg\{\log\Big(\frac{v}{\log v}\Big)+\sum_{1\leqslant m\leqslant M}\frac{(-1)^m(m-1)!}{(\log v)^m}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)n^m}+O\bigg(\frac{1}{\{\log v\}^{M+1}}\bigg)\bigg\}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

En regroupant les estimations (8.2), (8.3) et (8.4), nous obtenons le résultat annoncé. □

Posons, pour $m\geqslant 1$,

$$\gamma_m := m!\bigg\{1+\frac{1}{m}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)^m}\bigg\},\ \mathfrak{a}_m := m!+\gamma_m+\beta_m = m!\bigg\{1+\frac{2}{m}\sum_{0\leqslant j\leqslant m/2}(1-2^{1-2j})\zeta(2j)\bigg\}.$$

Lemme 8.2. *Soit $M\geqslant 1$. Nous avons*

$$\sum_{q\leqslant v}\log\Big(1+\frac{v}{q}\Big) = v\bigg\{\sum_{1\leqslant m\leqslant M}\frac{\gamma_m}{(\log v)^m}+O\bigg(\frac{1}{\{\log v\}^{M+1}}\bigg)\bigg\}. \tag{8.5}$$

Démonstration. Posons

$$I_2(v) := \int_2^v \frac{\log(1+v/t)\,\mathrm{d}t}{\log t} \quad (v \geqslant 2),$$

de sorte que

$$\sum_{q\leqslant v} \log\Big(1+\frac{v}{q}\Big) = I_2(v) + \int_2^v \log\Big(1+\frac{v}{t}\Big)\,\mathrm{d}\{\pi(t)-\mathrm{li}(t)\}. \tag{8.6}$$

Or, l'intégrale du membre de droite de (8.6) peut être majorée par

$$\Big[t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log t}}\log\Big(1+\frac{v}{t}\Big)\Big]_2^v + v\int_2^v \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\log t}}\,\mathrm{d}t}{t+v} \ll v\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log v}} + \int_2^v \mathrm{e}^{-\sqrt{\log t}}\,\mathrm{d}t \ll v\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log v}}. \tag{8.7}$$

De plus, d'après (2.7), nous avons

$$\begin{aligned} I_2(v) &= (\log v)\,\mathrm{li}(v) - v + \int_2^v \frac{\mathrm{d}t}{\log t}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{nv^n} + O(1) \\ &= v\Big\{\sum_{1\leqslant m\leqslant M}\frac{m!}{(\log v)^m} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{nv^{n+1}}\int_2^v \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{\log t} + O\Big(\frac{1}{\{\log v\}^{M+1}}\Big)\Big\} \\ &= v\sum_{1\leqslant m\leqslant M}\Big\{\frac{m!}{(\log v)^m} + \frac{(m-1)!}{(\log v)^m}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)^m} + O\Big(\frac{1}{\{\log v\}^{M+1}}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

En regroupant les estimations (8.6), (8.7) et (8.8), nous obtenons (8.5). Cela termine la démonstration. □

Proposition 8.3. *Soit $M \geqslant 1$. Nous avons*

$$\log F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x},\varrho_x) = \varrho_x\Big\{\log\Big(\frac{\varrho_x}{\log\varrho_x}\Big) + \sum_{1\leqslant m\leqslant M}\frac{\mathfrak{a}_m}{(\log\varrho_x)^m} + O\Big(\frac{1}{\{\log\varrho_x\}^{M+1}}\Big)\Big\}. \tag{8.9}$$

Démonstration. Nous avons directement

$$\log F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x},\varrho_x) = \sum_{q\leqslant\varrho_x}\log\Big(1+\frac{\varrho_x}{q}\Big) + \sum_{\varrho_x<q<\mathrm{e}^{\varrho_x}}\log\Big(1+\frac{\varrho_x}{q}\Big) + O(\log\varrho_x). \tag{8.10}$$

puis (8.9) en évaluant la première somme de (8.10) par (8.5) et la deuxième par (8.1). □

8.2 Preuve du Corollaire 1.2

Posons

$$\mathfrak{E}_N(x) := \frac{\sqrt{2\log_2 x}(\log_4 x)^{N+1}}{(\log_3 x)^{N+1/2}} \quad (x\geqslant x_0), \quad \mathcal{G}_\omega(v) := \log F_\omega(\mathrm{e}^v, v) + \frac{\xi}{v} - v \quad (v\geqslant 2),$$

$$\mathfrak{a}_{1;1} = -\tfrac{1}{2}, \quad \mathfrak{a}_{1;n} := \begin{cases} \frac{1}{2}\{\mathfrak{a}_{n-1} + \alpha_{(n-1)/2}\} & \text{si } n\equiv 1 \bmod 2, \\ \frac{1}{2}\,\mathfrak{a}_{n-1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (n\geqslant 2).$$

Remarquons d'emblée que $\log_3 x = \mathrm{e}^{O(\mathfrak{E}_N(x))}$, de sorte que, d'après (1.10), nous avons

$$\log S_\omega(x) = \log\frac{x}{\log x} + \mathcal{G}_\omega(\varrho_x) + O\big(\mathfrak{E}_N(x)\big).$$

Or, d'après (8.9), nous avons

$$\mathcal{G}_\omega(\varrho_x) \approx 2\varrho_x \log \varrho_x \bigg\{ 1 - \frac{\log_2 \varrho_x}{\log \varrho_x} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathfrak{a}_{1;n}}{(\log \varrho_x)^n} \bigg\}.$$

Rappelons la définition des $a_{\ell,j}$ en (2.23) et définissons formellement $\kappa_{0,1} := \log 2$, $\kappa_{1,1} := -1$,

$$\kappa_{\ell,j} := \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_k=\ell\\ r_1,\cdots,r_k\geqslant 0}} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_k=j-1\\ s_1,\cdots,s_k\geqslant 1}} \prod_{1\leqslant d\leqslant k} a_{r_d,s_d}, \quad \kappa^*_{0,0} := -\log 2, \quad \kappa^*_{1,0} := 1$$

$$\kappa^*_{\ell,j} := \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_k=\ell\\ r_1,\cdots,r_k\geqslant 0}} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_k=j\\ s_1,\cdots,s_k\geqslant 1}} \prod_{1\leqslant d\leqslant k} \kappa_{r_d,s_d}, \quad \kappa_{m;j,k} := 0 \ (0 \leqslant k \leqslant j \leqslant m),$$

$$\kappa_{n;\ell,j} := \sum_{k\geqslant 0} \binom{n+k-1}{k} \mathfrak{a}_{1;n}\, 2^n (-1)^k \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_k=\ell\\ r_1,\cdots,r_k\geqslant 0}} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_k=j-n\\ s_1,\cdots,s_k\geqslant 0}} \prod_{1\leqslant d\leqslant k} \kappa_{r_d,s_d},$$

$$\mathfrak{b}_{0;\ell,j} := \sum_{0\leqslant r\leqslant \ell} \sum_{0\leqslant s\leqslant j} a_{r,s} \kappa_{\ell-r,j-s}, \quad \mathfrak{b}_{1;\ell,j} := \sum_{0\leqslant r\leqslant \ell} \sum_{0\leqslant s\leqslant j} \kappa^*_{r,s} \kappa_{1;\ell-r,j-s},$$

$$\mathfrak{b}_{2;\ell,j} := \mathfrak{b}_{1;\ell,j} + \sum_{n\geqslant 1} \kappa_{n;\ell,j}, \quad z_{\ell,j} := \sum_{0\leqslant r\leqslant \ell} \sum_{0\leqslant s\leqslant j} \mathfrak{b}_{2;r,s}\, \mathfrak{b}_{0;\ell-r,j-s} \quad (n \geqslant 1,\ \ell, j \geqslant 0),$$

de sorte qu'après plusieurs développements en série successifs, nous obtenons à l'aide de (2.17),

$$\mathcal{G}_\omega(\varrho_x) \approx \sqrt{2\xi \log \xi} \sum_{j\geqslant 0} \sum_{0\leqslant \ell\leqslant j} \frac{z_{\ell,j} (\log_2 \xi)^\ell}{(\log \xi)^j}.$$

En posant

$$P_j(X) := \sum_{0\leqslant \ell\leqslant j} z_{\ell,j} X^\ell \quad (j \geqslant 0), \tag{8.11}$$

nous obtenons finalement (1.11). En particulier, les coefficients $z_{j,j}$ vérifient la relation

$$\begin{cases} z_{0,0} = 1, \\ z_{j,j} = a_{j,j} - 3a_{j-1,j-1} \quad (j \geqslant 1), \end{cases}$$

où les coefficients $a_{j,j}$ $(j \geqslant 0)$ sont définis en (2.23). Il vient,

$$z_{j,j} = \binom{2j}{j} \frac{3^j}{4^j(1-2j)} \quad (j \geqslant 0).$$

Ceci termine la démonstration.

8.3 Preuve du Corollaire 1.3

Rappelons la définition de ϱ_x en (1.9) et posons

$$\delta_x := \frac{1}{\log_3 x}, \quad \eta_x := \frac{\sqrt{\log_2 x}}{(\log_3 x)^{3/2}} \quad (x \geqslant 16).$$

Commençons par préciser le comportement local du paramètre ϱ_x. Afin d'alléger l'écriture, nous notons dans la suite $X := x^{1+h}$ $(h \in \mathbb{R})$.

Lemme 8.4. *Soient* $0 < \varepsilon < 1$ *et* $h > -1 + \varepsilon$. *Sous les conditions* $x \geqslant x_0^{1/\varepsilon}$, $\log(1+h) \ll \eta_x$, *nous avons*

$$\varrho_X - \varrho_x \ll \delta_x^2. \tag{8.12}$$

Démonstration. Rappelons la définition de $\Psi_x(v)$ en (1.9) et remarquons d'emblée que

$$\Psi_X(v) - \Psi_x(v) = \frac{\log(1+h)}{v^2} \quad (v > 0),$$

de sorte que, d'après (2.2), nous avons

$$\Psi_x(\varrho_X) = -\frac{\log(1+h)}{\varrho_X^2} + O(\mathrm{e}^{-\varrho_X}). \tag{8.13}$$

Par ailleurs, un rapide calcul permet d'obtenir

$$\Psi_x(v + \mathfrak{v}) - \Psi_x(v) = -\,\mathfrak{v}\left\{\frac{2\xi}{v^3} + \frac{1}{v} + O\Big(\frac{1}{v\log v}\Big)\right\} \quad (\mathfrak{v} \ll 1),$$

soit, avec $\mathfrak{v} = |\varrho_X - \varrho_x|$ et pour x suffisamment grand,

$$|\varrho_X - \varrho_x| \leqslant \frac{\varrho_x^3|\Psi_x(\varrho_x) - \Psi_x(\varrho_X)|}{2\xi} \leqslant \frac{\varrho_x^3}{2\xi}\left\{\frac{|\log(1+h)|}{\varrho_X^2} + O\Big(\mathrm{e}^{-\min\{\varrho_X,\varrho_x\}}\Big)\right\}, \tag{8.14}$$

d'après (2.2) et (8.13). En particulier, puisque d'après (2.17), $\varrho_X \sim \varrho_x$ lorsque $\log(1+h) \ll \eta_x$, nous déduisons (8.12) de (8.14). □

Nous pouvons désormais compléter la preuve du Corollaire 1.3. Pour $\log(1+h) \ll \eta_x$, nous avons

$$\sqrt{2\log_2 X} = \{1 + O(\delta_x)\}\sqrt{2\log_2 x}, \qquad \frac{\log_2 X}{\varrho_X} = \frac{\log_2 x}{\varrho_X} + O(\delta_x),$$

Nous déduisons alors de (1.10) que

$$\frac{(1+h)S_\omega(X)}{x^h S_\omega(x)} = \frac{\{1 + O(\delta_x)\}F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_X}, \varrho_X)\,\mathrm{e}^{\xi/\varrho_X - \varrho_X}}{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)\,\mathrm{e}^{\xi/\varrho_x - \varrho_x}}. \tag{8.15}$$

Par ailleurs, d'après (8.12), nous avons d'une part

$$\frac{\xi}{\varrho_X} - \frac{\xi}{\varrho_x} \ll \frac{\xi|\varrho_X - \varrho_x|}{\varrho_x^2} \ll \delta_x, \tag{8.16}$$

et, d'autre part, notant $\varrho^- := \min(\varrho_x, \varrho_X)$ et $\varrho^+ := \max(\varrho_x, \varrho_X)$,

$$\begin{aligned}\log\frac{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_X}, \varrho_X)}{F_\omega(\mathrm{e}^{\varrho_x}, \varrho_x)} &= \sum_{q \leqslant \exp(\varrho^-)} \log\Big(1 + \frac{\varrho_X - \varrho_x}{q - 1 + \varrho_x}\Big) + \sum_{\exp(\varrho^-) < q < \exp(\varrho^+)} \log\Big(1 + \frac{\varrho^+}{q-1}\Big)\\ &\ll |\varrho_X - \varrho_x|\log\varrho_x \ll \delta_x.\end{aligned} \tag{8.17}$$

L'estimation (1.12) résulte alors des estimations (8.15), (8.16), (8.17) et de la majoration (8.12). □

9 Preuve du Théorème 1.4

9.1 Préparation

Rappelons la définition de $F_\Omega(y,z)$ en (1.9), celle de $g_\Omega(y,z)$ en (3.16).

Lemme 9.1 ([1, th. 1]). Sous les conditions $y \leqslant \mathrm{e}^{(\log x)^{2/5}}$, $|z|<2$, nous avons

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ P^-(m)\geqslant y}} z^{\Omega(m)} = \frac{xg_\Omega(y,z)}{\Gamma(z)(\log x)^{1-z}} + O\bigg(\frac{x(\log y)^{1-\Re z}}{(\log x)^{2-\Re z}}\bigg) \quad (x\geqslant 3). \tag{9.1}$$

Posons

$$\lambda_{\Omega,x}(y,z) := \sum_{\substack{P^+(m)\leqslant y\\ \Omega(m)\leqslant 3\xi/2}} \frac{z^{-\Omega(m)}}{m} \quad \big(2\leqslant y\leqslant x,\ |z|>\tfrac12\big). \tag{9.2}$$

Lemme 9.2. *Sous les conditions* $2\leqslant y\leqslant \log x$, $|z|=1$, *nous avons*

$$\lambda_{\Omega,x}(y,z) = \frac{1}{F_\Omega(y,1/z)} + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big). \tag{9.3}$$

Démonstration. Pour tout $k\geqslant 1$, posons $v_k := 2-1/k$. Une majoration de type Rankin fournit

$$\sum_{\substack{P^+(m)\leqslant y\\ \Omega(m)>3\xi/2}} \frac{z^{-\Omega(m)}}{m} \ll \sum_{k>3\xi/2}\sum_{P^+(m)\leqslant y} \frac{v_k^{\Omega(m)-k}}{m} \ll \sum_{k>3\xi/2} \frac{k}{v_k^k} \prod_{3\leqslant q\leqslant y}\Big(1-\frac{v_k}{q}\Big)^{-1} \ll \frac{\xi(\log y)^2}{2^{3\xi/2}},$$

et donc (9.3), d'après (9.2), en observant que $\frac32\log 2>1$. □

9.2 Complétion

Notons que, pour $p\leqslant \log x$ et $\Omega(A)\in\mathcal{K}_{\Omega,x}$, nous avons

$$Ap \leqslant (\log x)^{3(\log_2 x)/2+1} \Rightarrow p\leqslant \log x \leqslant \mathrm{e}^{\{\log(x/Ap)\}^{2/5}}.$$

Nous déduisons donc de (9.1) que, pour $p\leqslant\log x$, $\Omega(A)\in\mathcal{K}_{\Omega,x}$ et $|z|=1$,

$$\sum_{\substack{B\leqslant x/Ap\\ P^-(B)\geqslant p}} z^{\Omega(B)} = \frac{xg_\Omega(p,z)}{Ap\Gamma(z)\{\log(x/Ap)\}^{1-z}} + O\bigg(\frac{x(\log p)^{1-\Re z}}{Ap\{\log(x/Ap)\}^{2-\Re z}}\bigg). \tag{9.4}$$

En remarquant d'une part que $g_\Omega(p,z)\asymp(\log p)^{-\Re z}$ et d'autre part que

$$\log\frac{x}{ap} = \bigg\{1+O\bigg(\frac{(\log_2 x)^2}{\log x}\bigg)\bigg\}\log x,$$

l'estimation (9.4) implique

$$\sum_{\substack{B\leqslant x/Ap\\ P^-(B)\geqslant p}} z^{\Omega(B)} = \frac{xg_\Omega(p,z)}{Ap\Gamma(z)(\log x)^{1-z}}\bigg\{1+O\bigg(\frac{(\log_2 x)^2}{\log x}\bigg)\bigg\}. \tag{9.5}$$

Rappelons la définition de $\lambda_{\Omega,x}(y,z)$ en (9.2). Nous déduisons de la définition de $S^*_{\Omega,\iota}(x)$ en (3.4) et de l'estimation (9.5) que

$$S^*_{\Omega,\iota}(x) = \left\{\frac{1}{2\pi i} + O\left(\frac{(\log_2 x)^2}{\log x}\right)\right\} \sum_{p\leqslant \log x} \frac{x}{p^2} \oint_{|z|=1} \frac{g_\Omega(p,z)\lambda_{\Omega,x}(p,z)\,\mathrm{d}z}{\Gamma(1+z)(\log x)^{1-z}} \quad (x \geqslant 3). \tag{9.6}$$

Posons

$$\mathcal{G}_\Omega(y,z) := \frac{g_\Omega(y,z)}{\Gamma(1+z)F_\Omega(y,1/z)} \quad (y \geqslant 2,\ \tfrac{1}{2} < |z| < 2).$$

D'après (9.3), nous avons

$$\begin{aligned} S^*_{\Omega,\iota}(x) &= \left\{\frac{1}{2\pi i} + O\left(\frac{(\log_2 x)^2}{\log x}\right)\right\} \sum_{p\leqslant \log x} \frac{x}{p^2} \left\{ \oint_{|z|=1} \frac{\mathcal{G}_\Omega(p,z)\,\mathrm{d}z}{(\log x)^{1-z}} + O\left(\oint_{|z|=1} \frac{|g_\Omega(p,z)\mathrm{d}z|}{(\log x)^{2-\Re z}}\right)\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{2\pi i} + O\left(\frac{(\log_2 x)^2}{\log x}\right)\right\} \sum_{p\leqslant \log x} \frac{x}{p^2} \left\{ \oint_{|z|=1} \frac{\mathcal{G}_\Omega(p,z)\,\mathrm{d}z}{(\log x)^{1-z}} + O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{9.7}$$

puisque $|g_\Omega(p,z)| \asymp (\log p)^{-\Re z}$.

Fixons $J \geqslant 1$ et posons $\delta = \delta_J := \frac{1}{2}(1/q_{J+1} + 1/q_{J+2})$. Le théorème des résidus fournit

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{\mathcal{G}_\Omega(p,z)\,\mathrm{d}z}{(\log x)^{1-z}} = \sum_{1\leqslant j\leqslant \min\{J+1;\,\pi(p)\}} \frac{\text{Rés}(\mathcal{G}_\Omega(p,z);1/\mathfrak{p}_j)}{(\log x)^{1-1/\mathfrak{p}_j}} + O\left(\oint_{|z|=\delta} \frac{|\mathcal{G}_\Omega(p,z)|}{(\log x)^{1-\Re z}}|\mathrm{d}z|\right)\cdot \tag{9.8}$$

Puisque, pour $p \leqslant \log x$ et $|z| = \delta$, nous avons la majoration

$$|\mathcal{G}_\Omega(p,z)| \ll \frac{|F_\Omega(p,z)|}{|F_\Omega(p,1/\delta)|} \ll (\log p)^{\delta+1/\delta},$$

il vient

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{|\mathcal{G}_\Omega(p,z)|}{(\log x)^{1-\Re z}}|\mathrm{d}z| \ll \frac{(\log p)^{\delta+1/\delta}}{\log x}\int_0^{2\pi} (\log x)^{\delta\cos\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \ll \frac{1}{(\log x)^{1-1/\mathfrak{p}_{J+1}}}\cdot \tag{9.9}$$

Les estimations (3.14), (9.8) et (9.9) impliquent directement, d'après (9.7),

$$\begin{aligned} S_{\Omega,\iota}(x) &= \sum_{p\leqslant \log x} \frac{x}{p^2}\left\{ \sum_{1\leqslant j\leqslant \min\{J+1;\,\pi(p)\}} \frac{\text{Rés}(\mathcal{G}_\Omega(p,z);1/\mathfrak{p}_j)}{(\log x)^{1-1/\mathfrak{p}_j}} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1-1/\mathfrak{p}_{J+1}}}\right)\right\}\cdot \\ &= \sum_{1\leqslant j\leqslant J+1} \frac{x}{(\log x)^{1-1/\mathfrak{p}_j}} \sum_{\mathfrak{p}_j\leqslant p\leqslant \log x} \frac{\text{Rés}(\mathcal{G}_\Omega(p,z);1/\mathfrak{p}_j)}{p^2} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{1-1/\mathfrak{p}_{J+1}}}\right)\cdot \end{aligned} \tag{9.10}$$

En outre, posant

$$S^*_{\Omega,\pi}(x) := \sum_{p\leqslant \log x} \frac{1}{p}\oint_{|z|=1} \Bigg(\sum_{\substack{P^+(A)\leqslant p \\ \Omega(A)\in\mathcal{K}_{\Omega,x}}} z^{-\Omega(A)} \sum_{\substack{B\leqslant x/Ap \\ P^-(B)\geqslant p}} z^{\Omega(B)}\Bigg)\frac{\mathrm{d}z}{z^2} \quad (x \geqslant 3),$$

il est clair, d'une part, que l'estimation (3.14) reste valable sous la forme

$$S_{\Omega,\pi}(x) = S^*_{\Omega,\pi}(x) + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \quad (x \geqslant 3). \tag{9.11}$$

et, d'autre part, que

$$S^*_{\Omega,\pi}(x) = 2S^*_{\Omega,\iota}(x) + O\Big(\frac{x}{\log x}\Big) \quad (x \geqslant 3). \tag{9.12}$$

Les estimations (3.2), (9.10), (9.11) et (9.12) impliquent alors

$$S_\Omega(x) = \sum_{1\leqslant j\leqslant J+1} \frac{3x}{(\log x)^{1-1/\mathfrak{p}_j}} \sum_{p\geqslant \mathfrak{p}_j} \frac{\text{Rés}(\mathcal{G}_\Omega(p,z);1/\mathfrak{p}_j)}{p^2} + O\Big(\frac{x}{(\log x)^{1-1/\mathfrak{p}_{J+1}}}\Big), \tag{9.13}$$

avec $\text{Rés}(\mathcal{G}_\Omega(p,z);1/\mathfrak{p}_j) \ll g_\Omega(p,1/\mathfrak{p}_j)/F_\Omega(p,\mathfrak{p}_j) \ll (\log p)^{\mathfrak{p}_j-1/\mathfrak{p}_j}$, puisque

$$\sum_{p>\log x} \frac{\text{Rés}(\mathcal{G}_\Omega(p,z);1/\mathfrak{p}_j)}{p^2} \ll \frac{1}{\sqrt{\log x}} \sum_p \frac{(\log p)^{\mathfrak{p}_j-1/\mathfrak{p}_j}}{p^{3/2}} \ll \frac{1}{\sqrt{\log x}}.$$

La formule (1.15) découle alors de (9.13) et de la définition des $\mathfrak{c}_j$ en (1.13). Cela termine la démonstration du Théorème 1.4. □

Bibliographie

[1] K. Alladi, The distribution of $\nu(n)$ in the sieve of Eratosthenes, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **33** (1982), no. 130, 129-148. MR657120.

[2] N.G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, North Holland (Amsterdam), 3ème éd. ; réimpression : Dover (New York), 1981.

[3] J. M. De Koninck and J. Galambos, Some randomly selected arithmetical sums, *Acta Math. Hung.* **52** (1988), 37–43.

[4] J. M. De Koninck, Sur les plus grands facteurs premiers d'un entier, *Monatsh. Math.* **116** (1993), 13–37.

[5] J.M. De Koninck & F. Luca, On the middle prime factor of an integer, *J. Integer Seq.,* 16 (5) :13.5.5, 2013.

[6] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Entiers friables : inégalité de Turán-Kubilius et applications, *Invent. Math.* **159** (2005), 531-588.

[7] N. Doyon, V. Ouellet, On the sum of the reciprocals of the middle prime factor counting multiplicity, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* **47** (2018) 249-259.

[8] P. Erdős, A. Ivić, and C. Pomerance, On sums involving reciprocals of the largest prime factor of an integer, *Glas. Mat. Ser. III* **21** (1986), 283–300.

[9] P. Erdős & G. Tenenbaum, Sur les densités de certaines suites d'entiers, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **59** (1989), 417-438.

[10] N. McNew, P. Pollack & A. Singha Roy, The distribution of intermediate prime factors, *Illinois J. Math.* 68 (3) 537-576, September 2024.

[11] V. Ouellet, On the sum of the reciprocals of the middle prime factors of an integer, *J. Integer Seq.* 20 (2017), no. 10, Art. 17.10.1, 16.

[12] J. Rotgé, Étude statistique du facteur premier médian, 1 : valeur moyenne, prépublication, arXiv :2501.15947.

[13] J. Rotgé, Étude statistique du facteur premier médian, 2 : lois locales, prépublication, arXiv :2501.15951.

[14] J. Rotgé, Étude statistique du facteur premier médian, 3 : lois de répartition, *Bull. Sci. Math.* **203** (2025) 103641.

[15] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres,* 5ème édition, Dunod, 2022.