Étude statistique du facteur premier médian, 1 : valeur moyenne

Jonathan Rotgé*

Université d'Aix-Marseille, Institut de Mathématiques de Marseille CNRS UMR 7373,
163 Avenue De Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, FRANCE

Abstract

We provide an asymptotic expansion for the mean-value of the logarithm of the middle prime factor of an integer, defined according to multiplicity or not, thus generalising a recent study of McNew, Pollack, and Roy. This yields an improvement of the asymptotic estimate, in particular by furnishing an optimal remainder when the expansion is truncated at the first order.

Résumé

Nous fournissons un développement asymptotique pour la valeur moyenne du logarithme du facteur premier médian d'un entier, défini en tenant compte ou non, de la multiplicité, généralisant ainsi une étude récente de McNew, Pollack et Roy. Ceci induit une amélioration de l'estimation asymptotique, en fournissant notamment un reste optimal lorsque le développement est tronqué au premier ordre.

1 Introduction et énoncé du résultat

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, posons

$$\omega(n) := \sum_{p \mid n} 1, \qquad \Omega(n) := \sum_{p^k \| n} k,$$

et notons $\nu \in \{\omega, \Omega\}$ l'une ou l'autre de ces fonctions. Si $\{q_j(n)\}_{1 \leqslant j \leqslant \omega(n)}$ désigne la suite croissante des facteurs premiers de n comptés sans multiplicité et $\{Q_j(n)\}_{1 \leqslant j \leqslant \Omega(n)}$ celle des facteurs premiers de n comptés avec multiplicité, nous écrivons

$$p_{m,\nu}(n) := \begin{cases} q_{\lceil \omega(n)/2 \rceil}(n) & \text{si } \nu = \omega \\ Q_{\lceil \Omega(n)/2 \rceil}(n) & \text{si } \nu = \Omega \end{cases}, \qquad P^-(n) := q_1(n), \qquad P^+(n) := q_{\omega(n)}(n).$$

*Adresse e-mail : jonathan.rotge@etu.univ-amu.fr
2020 *Mathematics Subject Classification*: 11N25, 11N37.
Key words and phrases. middle prime factor, mean value.

Nous dirons qu'un entier n est y-friable (respectivement y-criblé) s'il vérifie $P^+(n) \leqslant y$ (respectivement $P^-(n) > y$). Dans toute la suite, les lettres p et q désignent des nombres premiers. Notons κ la constante de Mertens et définissons

$$\mathcal{H}_\nu(z) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\kappa(1-z)} \prod_q \Big(1 - \frac{1}{q}\Big)^z \Big(1 + \frac{z}{q-1}\Big) \quad (z \in \mathbb{C}) & \text{si } \nu = \omega, \\ \prod_q \Big(1 - \frac{1}{q}\Big)^z \Big(1 - \frac{z}{q}\Big)^{-1} \quad (\Re z < 2) & \text{si } \nu = \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Notons enfin

$$\varphi := \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \qquad A_\nu := \frac{\varphi\, \mathrm{e}^{-\gamma}\, \mathcal{H}_\nu(\varphi - 1)}{\sqrt{5}\Gamma(\varphi)} \approx \begin{cases} 0{,}545102 & \text{si } \nu = \omega, \\ 0{,}414005 & \text{si } \nu = \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

où γ désigne la constante d'Euler-Mascheroni. Dans un travail récent [2], McNew, Pollack et Singha Roy s'intéressent à la répartition statistique des facteurs premiers intermédiaires à travers l'estimation de diverses quantités. Ils fournissent notamment ([2, th. 2.6]) une estimation de la valeur moyenne de $\log p_{m,\Omega}(n)$. Posant

$$S_\nu(x) := \sum_{n \leqslant x} \log p_{m,\nu}(n) \quad (x \geqslant 3),$$

ils démontrent ainsi que

$$S_\Omega(x) = A_\Omega x (\log x)^{1/\varphi} \bigg\{ 1 + O\bigg(\frac{\{\log_3 x\}^{3/2}}{\sqrt{\log_2 x}} \bigg) \bigg\}.$$

Nous nous proposons ici de généraliser et de préciser ce résultat.

Théorème 1.1. *Il existe une suite réelle $\{\mathfrak{c}_{\nu,j}\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $J \in \mathbb{N}$,*

$$S_\nu(x) = A_\nu x (\log x)^{1/\varphi} \bigg\{ 1 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant J} \frac{\mathfrak{c}_{\nu,j}}{(\log_2 x)^j} + O\bigg(\frac{1}{\{\log_2 x\}^{J+1}} \bigg) \bigg\} \qquad (x \geqslant 3). \tag{1.3}$$

Remarque. Le coefficient $\mathfrak{c}_{\nu,1}$ est explicité en (5.23) *infra* et satisfait à l'approximation suivante

$$\mathfrak{c}_{\nu,1} \approx \begin{cases} -2{,}399504 & \text{si } \nu = \omega, \\ -2{,}798031 & \text{si } \nu = \Omega. \end{cases}$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 1.1 appliqué avec $J = 1$.

Corollaire 1.2. *Nous avons l'estimation optimale*

$$S_\nu(x) = A_\nu x (\log x)^{1/\varphi} \bigg\{ 1 + O\bigg(\frac{1}{\log_2 x} \bigg) \bigg\} \qquad (x \geqslant 3).$$

Notre approche consiste à écrire tout entier naturel $n \geqslant 2$ sous la forme $n = apb$ où $p = p_{m,\nu}(n)$, a est p-friable, b est p-criblé, et $\nu(a) - \nu(b) \in \{0, 1\}$. Posons

$$\Phi_{\nu,k}(x,y) := \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P^-(n) > y \\ \nu(n) = k}} 1 \quad (2 \leqslant y \leqslant x,\ k \geqslant 1), \tag{1.4}$$

de sorte que

$$S_\nu(x) = \sum_{p\leqslant x} \log p \sum_{\substack{a\leqslant x/p\\ P^+(a)\leqslant p}} \sum_{\substack{b\leqslant x/ap\\ P^-(b)\geqslant p\\ \nu(b)-\nu(a)\in\{0,1\}}} 1 = \sum_{p\leqslant x} \log p \sum_{k\leqslant(\log x)/\log 4} \sum_{\substack{a\leqslant x/p\\ P^+(a)\leqslant p\\ \nu(a)\in\{k-1,k\}}} \Phi_{\nu,k}\Big(\frac{x}{ap}, p\Big). \tag{1.5}$$

La première étape de l'évaluation de (1.5) consiste à déterminer les plages de valeurs de p et k induisant une contribution dominante.

2 Domaines de contribution principale

Notons d'emblée que la contribution à $S_\nu(x)$ des entiers n divisibles par $p_{m,\nu}(n)^2$ peut être majorée trivialement. En effet, nous avons

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p_{m,\nu}(n)^2\mid n}} \log p_{m,\nu}(n) \leqslant \sum_{p\leqslant x} \log p \sum_{m\leqslant x/p^2} 1 \leqslant x \sum_{p\leqslant x} \frac{\log p}{p^2} \ll x. \tag{2.1}$$

Il en est de même de la contribution des entiers n tels que $p_{m,\nu}(n) > \sqrt{x}$. En effet, cette éventualité implique $n = p_{m,\nu}(n)$, d'où

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p_{m,\nu}(n)>\sqrt{x}}} \log p_{m,\nu}(n) \leqslant \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \log p \ll x. \tag{2.2}$$

Les quatre énoncés qui suivent nous permettront d'obtenir des estimations de la contribution à (1.5) de différents sous-domaines en p et k.

Lemme 2.1. *L'estimation*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Omega(n)\geqslant k}} 1 \ll \frac{kx\log x}{2^k}, \tag{2.3}$$

a lieu uniformément pour $k \geqslant 1$, $x \geqslant 2$.

Démonstration. En appliquant [8, ex. 66] à la fonction sommatoire de $n \mapsto z^{\Omega(n)}$, nous obtenons, pour $z \in]1, 2[$, $j \geqslant 0$,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Omega(n)=j}} 1 \leqslant \sum_{n\leqslant x} z^{\Omega(n)-j} \leqslant xz^{-j} \prod_{p\leqslant x} \frac{p-1}{p-z} \ll \frac{xz^{-j}}{2-z} (\log x)^{z-1}.$$

Par sommation sur $j \geqslant k$, nous obtenons que le membre de gauche de (2.3) est

$$\ll \frac{x(\log x)^{z-1}}{2-z} \sum_{j\geqslant k} z^{-j} \ll \frac{xz^{-k}(\log x)^{z-1}}{(2-z)(z-1)}.$$

Le choix $z = 2 - 1/2k$ fournit alors la majoration

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Omega(n)\geqslant k}} 1 \ll \frac{kx(\log x)^{1-1/k}}{(2-1/2k)^k} \ll \frac{kx\log x}{2^k}. \qquad \square$$

Pour tout ensemble de nombre premiers non vide E, posons

$$\omega(n,E) := \sum_{p|n,\, p\in E} 1 \quad (n\geqslant 1), \quad \Omega(n,E) := \sum_{p^k\|n,\, p\in E} k \quad (n\geqslant 1), \quad E(x) := \sum_{p\leqslant x,\, p\in E} \frac{1}{p} \quad (x\geqslant 2).$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation $\nu(n,E)$ pour faire simultanément référence à $\omega(n,E)$ ou $\Omega(n,E)$. Définissons enfin

$$Q(v) := v\log v - v + 1 \quad (v>0).$$

Lemme 2.2 ([4, th. 08, th. 09]). Soit p_0 un nombre premier et E un ensemble de nombres premiers non vide tel que $\min\{p : p\in E\}\geqslant p_0$. Pour tous $0<a<1<b<p_0$, nous avons

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \nu(n,E)\leqslant aE(x)}} 1 \ll_{a,p_0} x\,\mathrm{e}^{-E(x)Q(a)}, \qquad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \nu(n,E)\geqslant bE(x)}} 1 \ll_{b,p_0} x\,\mathrm{e}^{-E(x)Q(b)}. \tag{2.4}$$

Lemme 2.3. *Notons*

$$\mathcal{A}_\nu := \Big\{n\leqslant x : \tfrac14 < \frac{\nu(n)}{\log_2 x} < 2,\ (\log x)^{3/5} < \log p_{m,\nu}(n) \leqslant (\log x)^{16/17}\Big\}.$$

Nous avons alors

$$\sum_{n\in[1,x)\smallsetminus\mathcal{A}_\nu} \log p_{m,\nu}(n) \ll x(\log x)^{1/\varphi-1/250}. \tag{2.5}$$

Démonstration. En appliquant (2.3) avec $k=\lfloor 2\log_2 x\rfloor$, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \nu(n)\geqslant 2\log_2 x}} \log p_{m,\nu}(n) &\leqslant \sum_{p\leqslant x}\log p \sum_{\substack{d\leqslant x/p\\ \Omega(d)\geqslant\lfloor 2\log_2 x\rfloor-1}} 1 \ll \frac{x\log_2 x}{(\log x)^{\log 4-1}}\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p}\\ &\ll x(\log_2 x)(\log x)^{2-\log 4} \ll x(\log x)^{1/\varphi-1/250}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

La contribution des entiers n tels que $\nu(n)\geqslant 2\log_2 x$ peut donc être absorbée par le terme d'erreur de (1.3). En notant W_0 et W_{-1} respectivement les deux branches de la fonction de Lambert, réciproque de la fonction $z\mapsto z\,\mathrm{e}^z$, nous remarquons que les deux solutions ξ_0 et ξ_1 de l'équation $1/\varphi+Q(\xi)-1=0$ sont

$$\xi_0 = \exp\Big(1+W_{-1}\Big(-\frac{1}{e\varphi}\Big)\Big)\approx 0.26583 \qquad \text{et} \qquad \xi_1=\exp\Big(1+W_0\Big(-\frac{1}{e\varphi}\Big)\Big)\approx 1.99374, \tag{2.7}$$

ce qui permet d'estimer la contribution à (2.5) des entiers n tels que $\nu(n)\leqslant(\log_2 x)/4$. En effet, notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, le théorème de Mertens implique, pour x assez grand,

$$\mathcal{P}(x/p)\geqslant\mathcal{P}(\sqrt{x})\geqslant\log_2 x-1.$$

En choisissant $a=\frac14$, la première majoration (2.4) fournit alors

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\, p|n\\ \nu(n,\mathcal{P})\leqslant(\log_2 x)/4}} 1 \leqslant \sum_{\substack{d\leqslant x/p\\ \omega(d,\mathcal{P})\leqslant\{1+\mathcal{P}(x/p)\}/4}} 1 \ll \frac{x}{p(\log x)^{Q(1/4)}}. \tag{2.8}$$

Nous en déduisons que la contribution à (2.5) de tels entiers est

$$\sum_{p\leqslant x}\log p\sum_{\substack{n\leqslant x,\,p\mid n\\ \omega(n)\leqslant(\log_2 x)/4}}1\ll\frac{x}{(\log x)^{Q(1/4)}}\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p}\ll x(\log x)^{1-Q(1/4)},$$

ce qui convient puisque $1-Q(1/4)<1/\varphi-1/250$.

La contribution à (2.5) des entiers n contrevenant à l'encadrement $(\log_2 x)/4<\nu(n)\leqslant 2\log_2 x$ est donc acceptable. Si $n\in[1,x]\smallsetminus\mathcal{A}_\nu$ vérifie cette condition, nous avons $\log p_{m,\nu}(n)\leqslant(\log x)^{3/5}$ ou, compte tenu de (2.2), $(\log x)^{16/17}<\log p_{m,\nu}(n)\leqslant\frac{1}{2}\log x$. La contribution à (2.5) des entiers correspondant à la première éventualité est

$$\ll\sum_{\log p\leqslant(\log x)^{3/5}}\frac{x\log p}{p}\ll x(\log x)^{3/5}. \tag{2.9}$$

Si n vérifie la seconde inégalité, alors n possède au moins $(\log_2 x)/8$ facteurs premiers dans l'intervalle $]\exp\{(\log x)^{16/17}\},x]$. Posons $\mathcal{P}_1:=\mathcal{P}\cap]\exp\{(\log x)^{16/17}\},x]$. Une nouvelle utilisation du théorème de Mertens montre que $\mathcal{P}_1(x/p)=(\log_2 x)/17+o(1)<(\log_2 x)/16$ pour x assez grand et $p\leqslant\sqrt{x}$. la deuxième majoration (2.4) appliquée avec $b=2$ implique

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\,p\mid n\\ \nu(n,\mathcal{P}_1)\geqslant(\log_2 x)/8}}1\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x,\,p\mid n\\ \Omega(n,\mathcal{P}_1)\geqslant(\log_2 x)/8}}1\leqslant\sum_{\substack{d\leqslant x/p\\ \Omega(d,\mathcal{P}_1)\geqslant 2\,\mathcal{P}_1(x/p)}}1\ll\frac{x}{p(\log x)^{Q(2)}}.$$

La contribution correspondante à (2.5) est donc

$$\sum_{\exp\{(\log x)^{16/17}\}<p\leqslant x}\frac{x\log p}{p(\log x)^{Q(2)}}\ll x(\log x)^{1-Q(2)}. \tag{2.10}$$

Puisque $3/5<1/\varphi-4/250$ et $1-Q(2)<1/\varphi-1/250$, les majorations (2.9) et (2.10) impliquent bien (2.5). □

Dans la suite, nous nous intéresserons principalement à l'évaluation de la contribution $S_{\nu,\iota}(x)$ à $S_\nu(x)$ des entiers n vérifiant $\nu(n)\equiv 1(\operatorname{mod}2)$. Dans ce cas, plus favorable pour les calculs à suivre, nous avons $\nu(a)=k$ dans (1.5). Nous traiterons en parallèle le cas de la somme complémentaire $S_{\nu,\pi}(x)$ en indiquant au fil des énoncés les éventuelles modifications à prendre en compte concernant son évaluation. Posons, pour $x\geqslant 3$,

$$\begin{gathered}\mathcal{J}_x:=\left]\,\mathrm{e}^{(\log x)^{3/5}},\mathrm{e}^{(\log x)^{16/17}}\right],\qquad\mathcal{K}_x:=\left[\tfrac{1}{8}\log_2 x-1,\log_2 x\right]\cap\mathbb{R}_+^*,\\ S^*_{\nu,\iota}(x):=\sum_{p\in\mathcal{J}_x}\log p\sum_{k\in\mathcal{K}_x}\sum_{\substack{a\leqslant x/p\\ P^+(a)<p\\ \nu(a)=k}}\Phi_{\nu,k}\Big(\frac{x}{ap},p\Big).\end{gathered} \tag{2.11}$$

Proposition 2.4. *Nous avons l'estimation*

$$S_{\nu,\iota}(x)=S^*_{\nu,\iota}(x)+O\big(x(\log x)^{1/\varphi-1/250}\big). \tag{2.12}$$

Démonstration. D'après (2.6), nous pouvons restreindre la somme intérieure de (1.5) aux entiers a tels que $\frac{1}{8}\log_2 x - 1 \leqslant \nu(a) = (\nu(n)-1)/2 \leqslant \log_2 x$. Ainsi, d'après (2.1), (2.6) et (2.8) nous avons

$$\begin{aligned}
S_{\nu,\iota}(x) &= \sum_{p\leqslant x} \log p \sum_{k\in\mathcal{K}_x} \sum_{\substack{a\leqslant x/p\\ P^+(a)<p\\ \nu(a)=k}} \Phi_{\nu,k}\Big(\frac{x}{ap},p\Big) + O\Big(x(\log x)^{1/\varphi-1/250}\Big)\\
&= S^*_{\nu,\iota}(x) + \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\notin\mathcal{J}_x}} \log p \sum_{k\in\mathcal{K}_x} \sum_{\substack{a\leqslant x/p\\ P^+(a)<p\\ \nu(a)=k}} \Phi_{\nu,k}\Big(\frac{x}{ap},p\Big) + O\Big(x(\log x)^{1/\varphi-1/250}\Big)\\
&= S^*_{\nu,\iota}(x) + O\bigg(\sum_{n\in[1,x)\smallsetminus\mathcal{A}_\nu} \log p_{m,\nu}(n) + x(\log x)^{1/\varphi-1/250}\bigg).
\end{aligned}$$

Une nouvelle application du Lemme 2.3 fournit alors le résultat annoncé. □

3 Réduction de la somme $S^*_{\nu,\iota}(x)$

3.1 Préparation

Une estimation précise de la somme intérieure en k de $S^*_{\nu,\iota}(x)$ définie en (2.11) nécessite d'évaluer $\Phi_{k,\nu}(X,Y)$ pour certaines valeurs relatives de X et Y.

Introduisons les fonctions

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-s^2}\,ds \quad (z\in\mathbb{C}), \qquad \operatorname{erfc}(z) := 1-\operatorname{erf}(z) \quad (z\in\mathbb{C}),$$

et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et s complexe de module assez petit, posons

$$\text{(3.1)} \qquad \mathfrak{q}(z) := \sqrt{\frac{z^2}{2(1+iz-\mathrm{e}^{iz})}} \quad (0<|z|<7),\ ^{1} \qquad \lambda(s) := \sum_{n\geqslant 1}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,\mathfrak{q}(z)^n}{\mathrm{d}z^{n-1}}\right]_{z=0}\frac{s^n}{n!},$$

où la racine carrée est prise en détermination principale. Remarquons que $\mathfrak{q}(z)$ possède une singularité apparente en $z=0$ et admet donc un prolongement analytique au voisinage de l'origine. Le théorème d'inversion de Lagrange montre donc que λ est solution de l'équation $s\,\mathfrak{q}(\vartheta)=\vartheta$ pour $|s|$ et $|\vartheta|$ suffisamment petits. Notons $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement asymptotique de $z\mapsto\Gamma(z+1)\,\mathrm{e}^z/z^z\sqrt{2\pi z}$ selon les puissances croissantes de $1/z$. Pour tous $b>0$, $m\in\mathbb{N}$ et toute fonction φ holomorphe sur $D(0,b)$, posons

$$\text{(3.2)} \qquad \mathfrak{C}_{m,\varphi}(v) := \sum_{0\leqslant j\leqslant m}\frac{d_{m-j}\Gamma(j+\frac{1}{2})2^j}{v^m\sqrt{\pi}}\sum_{0\leqslant n\leqslant 2j}\frac{\lambda^{(2j-n+1)}(0)}{n!(2j-n)!}\left[\frac{\mathrm{d}^n\varphi(v\,\mathrm{e}^{i\lambda(\tau)})}{\mathrm{d}\tau^n}\right]_{\tau=0} \quad (0<v<b).$$

Définissons enfin,

$$\text{(3.3)} \qquad I_{k,\varphi}(\xi) := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^{\xi z}\,\varphi(z)}{z^{k+1}}\,\mathrm{d}z \quad (r<b,\ \xi>0).$$

Nous aurons besoin du lemme technique suivant, fournissant une estimation de $I_{k,\varphi}$ dans un domaine restreint de valeurs du rapport k/ξ.

1. Les pôles de $\mathfrak{q}$ sont de la forme $z_n = i+w_n$ avec $-iw_n$ solution de $s\,\mathrm{e}^s=\mathrm{e}^{-1}$. En particulier, le pôle de plus petit module vérifie $|z_1|\approx 7.75$.

Lemme 3.1. *Soient $0 < a < b$, $M \in \mathbb{N}$, φ une fonction holomorphe sur $D(0,b)$ et $\xi > 0$. Pour $a < r := k/\xi < b$, nous avons*

$$I_{k,\varphi}(\xi) = \frac{\xi^k}{k!}\bigg\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\frac{\mathfrak{C}_{m,\varphi}(r)}{\xi^m} + O\Big(\frac{1}{\xi^{M+1}}\Big)\bigg\} \qquad (\xi > 0). \tag{3.4}$$

En particulier,

$$\mathfrak{C}_{0,\varphi}(v) = \varphi(v), \qquad \mathfrak{C}_{1,\varphi}(v) = -\tfrac{1}{2}v\varphi''(v) \quad (0 < v < b).$$

Démonstration. D'après (3.3), nous avons

$$I_{k,\varphi}(\xi) = \frac{\mathrm{e}^k}{2\pi r^k}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{k\{\mathrm{e}^{i\vartheta}-1-i\vartheta\}}\,\varphi(r\,\mathrm{e}^{i\vartheta})\,\mathrm{d}\vartheta \qquad (\xi > 0).$$

Rappelons que le théorème d'inversion de Lagrange assure l'existence de $\delta > 0$ tel que pour $|\vartheta| \leqslant \delta$, la fonction $\lambda = \lambda(s)$ est solution de l'équation $s\,\mathfrak{q}(\vartheta) = \vartheta$. Notons respectivement $I^+(\delta)$ et $I^-(\delta)$ les contributions à $I_{k,\psi,\varphi}(x,y)$ des domaines $|\vartheta| \leqslant \delta$ et $\delta < |\vartheta| \leqslant \pi$.

Intéressons-nous tout d'abord à $I^+(\delta)$. Avec le changement de variables $\vartheta = \lambda(s)$, nous obtenons, en posant $\delta' := \delta/\lambda(\delta) = \sigma + i\tau$ $(\sigma > 0)$ et en remarquant que $-\delta/\lambda(-\delta) = -\overline{\delta'}$,

$$I^+(\delta) = \frac{\xi^k\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}k!}\bigg\{\sum_{0\leqslant n\leqslant M}\frac{d_n}{k^n} + O\Big(\frac{1}{k^{M+1}}\Big)\bigg\}\int_{-\sigma+i\tau}^{\sigma+i\tau}\mathrm{e}^{-ks^2/2}\,\varphi(r\,\mathrm{e}^{i\mu(s)})\mu'(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.5}$$

Notons $\{a_j(r)\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ la suite des coefficients de Taylor à l'origine de $\varphi(r\,\mathrm{e}^{i\mu(s)})\mu'(s)$, de sorte que l'intégrale de (3.5) peut se réécrire sous la forme

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant M}\frac{a_{2j}(r)\Gamma(j+\frac{1}{2})2^{j+1/2}}{k^{j+1/2}}\bigg\{1 + O\bigg(\frac{\mathrm{e}^{-\delta'^2k} + \mathrm{e}^{-\overline{\delta'}^2k}}{\sqrt{k}}\bigg)\bigg\}. \tag{3.6}$$

Les estimations (3.5) et (3.6) permettent d'obtenir, en remarquant que $k \asymp \xi$,

$$\begin{aligned} I^+(\delta) &= \frac{\xi^k}{k!}\bigg\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\sum_{n+j=m}\frac{d_n a_{2j}(r)\Gamma(j+\frac{1}{2})2^j}{\sqrt{\pi}r^m\xi^m} + O\Big(\frac{1}{\xi^{M+1}}\Big)\bigg\} \\ &= \frac{\xi^k}{k!}\bigg\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\frac{\mathfrak{C}_{m,\varphi}(r)}{\xi^m} + O\Big(\frac{1}{\xi^{M+1}}\Big)\bigg\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Il reste à évaluer $I^-(\delta)$. Notons $T(\delta) := [-\pi,\pi] \smallsetminus [-\delta,\delta]$. Puisque φ est holomorphe pour $|z| < b$, il existe une constante B telle que $|\varphi(z)| \leqslant B$ $(|z| < b)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E_k(\delta) &:= \Big|\int_{T(\delta)}\mathrm{e}^{k\{\mathrm{e}^{i\vartheta}-1-i\vartheta\}}\,\varphi(r\,\mathrm{e}^{i\vartheta})\,\mathrm{d}\vartheta\Big| \leqslant B\int_{T(\delta)}\mathrm{e}^{k\{\cos\vartheta-1\}}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &\leqslant 2B\int_{\delta}^{\pi}\mathrm{e}^{-2k\vartheta^2/\pi^2}\,\mathrm{d}\vartheta \leqslant \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2k}}\operatorname{erfc}\Big(\frac{\delta\sqrt{2k}}{\pi}\Big) \ll_B \frac{1}{\xi^{M+3/2}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Le résultat annoncé découle des estimations (3.7) et (3.8) en remarquant que

$$I^-(\delta) \ll \frac{\xi^k\sqrt{k}E_k(\delta)}{k!}. \qquad \square$$

Le Lemme 3.1 sera utile dans l'estimation de deux quantités cruciales pour l'évaluation de $S^*_{\nu,\iota}(x)$. L'obtention de ces estimations fait l'objet des deux sous-sections suivantes.

3.2 Développement asymptotique de $\Phi_{\nu,k}(x,y)$

Dans la suite, pour tout $y \in [2,x]$ et tout réel t, nous posons

$$u = u_y := \frac{\log x}{\log y}, \qquad I(s) := \int_0^s \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t \quad (s \in \mathbb{C}), \quad J(s) := \int_s^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad (s \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-), \tag{3.9}$$

et notons $\{b_k(z)\}_{k=0}^\infty$ la suite des coefficients du développement de Taylor de $\mathrm{e}^{-zI(-s)}$ au point $s=0$. Définissons également, pour $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} h_\ell(z) &:= \frac{\mathrm{e}^{-\gamma z}}{z\Gamma(z-\ell)}, \qquad h_\ell(z,y) := h_\ell(z) \sum_{0 \leqslant j \leqslant \ell} \frac{(-1)^j b_{\ell-j}(z)}{(\log y)^j} \quad (y>1), \\ Q_{\ell,k}(X,y) &:= \sum_{m+r=k-1} \frac{h_\ell^{(m)}(0,y) X^r}{m!r!} \quad (y>1), \end{aligned} \tag{3.10}$$

où les dérivées sont prises par rapport à la première variable. Nous proposons une généralisation d'un résultat d'Alladi [1] dans un domaine restreint de valeurs de k.

Théorème 3.2. *Soient $L \in \mathbb{N}$, $A > 1$ et $\varepsilon > 0$. Sous les conditions $3 \leqslant y \leqslant x^{1-\varepsilon}$, $1/A \leqslant (k-1)/\log u \leqslant A$, nous avons, uniformément*

$$\Phi_{\nu,k}(x,y) = \frac{x}{\log x}\bigg\{ \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant L} \frac{Q_{\ell,k}(\log u, y)}{u^\ell} + O_A\Big(\frac{(\log u)^k}{k! u^{L+1}}\Big)\bigg\}. \tag{3.11}$$

Démonstration. Posons

$$\Phi_\nu(x,y,z) := \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P^-(n) > y}} z^{\nu(n)} = \sum_{k \geqslant 0} \Phi_{\nu,k}(x,y) z^k \quad (3 \leqslant y \leqslant x,\ z \in \mathbb{C}), \tag{3.12}$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, définissons $\omega_z(u)$ comme l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions initiales $\omega_z(u) = 0 \quad (u \leqslant 1)$, $u\omega_z(u) = z \quad (1 < u \leqslant 2)$ et l'équation différentielle aux différences $u\omega_z'(u) + \omega_z(u) = z\omega_z(u-1) \quad (u > 2)$. Définissons également,

$$A_z(x,y) := x \int_0^\infty \omega_z(u-v) \frac{\mathrm{d}v}{y^v} \qquad (3 \leqslant y \leqslant x,\ z \in \mathbb{C}). \tag{3.13}$$

Étant donné que $\omega_z(u) = 0$ lorsque $u \leqslant 1$, nous pouvons restreindre le domaine d'intégration de (3.13) à l'intervalle $[0, u-1]$. Nous avons [9]

$$\Phi_\nu(x,y,z) = A_z(x,y) + O(x\,\mathrm{e}^{-(\log x)^a}). \tag{3.14}$$

En effet, d'après (3.12), nous pouvons écrire

$$\Phi_\nu(x,y,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b+i\mathbb{R}} \frac{\zeta(s)^z x^s}{\zeta(s,y)^z s}\,\mathrm{d}s,$$

avec $b := 1 + 1/\log x$. Pour $a < \frac{3}{5}$ fixé, posons $T = \mathrm{e}^{(\log y)^a}$ et remarquons que la contribution du domaine $|\tau| > T$ est $\ll x \log(Tx)/T$. D'après [6, lemme III.5.16], nous avons

$$\zeta(s,y) = \zeta(s) s_y \widehat{\varrho}(s_y) \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{T}\Big) \Big\} \qquad (|\tau| \leqslant T).$$

Puisque, $1+\widehat{\omega_z}(s)=1/s^z\widehat{\varrho}(s)^z$, où $\widehat{\varrho}$ désigne la transformée de Laplace de la fonction de Dickman. Nous obtenons ainsi

$$\Phi_\nu(x,y,z)=\frac{x}{2\pi i}\int_{1/u-iT\log y}^{1/u+iT\log y}\frac{1+\widehat{\omega_z}(s)}{s+\log y}\,\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s+O\bigg(\frac{x}{T}\int_{1/u-iT\log y}^{1/u+iT\log y}\frac{\mathrm{d}s}{|s^z\widehat{\varrho}(s)^z(s+\log y)|}\bigg).\tag{3.15}$$

Maintenant, d'après [5, lemme 2], nous avons $|s^z\widehat{\varrho}(s)^z|\asymp\min(|s|^{\Re z},1)$ pour $1/A\leqslant z\leqslant A$, $\Re s\geqslant -1$. En écrivant $s=1/u+i\tau$, le terme d'erreur de (3.15) est

$$\ll\frac{x}{T}\bigg\{\int_{|\tau|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}\tau}{|s|^{\Re z}|s+\log y|}+\int_{1<|\tau|\leqslant T\log y}\frac{\mathrm{d}\tau}{|s+\log y|}\bigg\}\ll\frac{x(u^{|z|}+\log T)}{T},$$

uniformément par rapport à y. Posons

$$R(y):=\bigg|\int_{|\tau|>T\log y}\frac{\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s}{s^z\widehat{\varrho}(s)^z(s+\log y)}\bigg|\qquad(y\leqslant x).$$

Puisque $x(1+\widehat{\omega_z}(s))/(s+\log y)$ est la transformée de Laplace de $t\mapsto xy^{-t}+A_z(x,y)$, nous pouvons écrire

$$\Phi_\nu(x,y,z)=A_z(x,y)+O\bigg(xR(y)+\frac{x(u+1)^{|z|}\log T}{T}\bigg).$$

L'estimation $J(s)\ll\mathrm{e}^{-\sigma}/|\tau|$ fournit, avec $\sigma=1/u$, $s^{-z}\varrho(s)^{-z}=\mathrm{e}^{zJ(s)}=1+O(1/s)$ $(|s|>1)$. Nous obtenons ainsi

$$R(y)=\bigg|\int_{|\tau|>T\log y}\frac{\mathrm{e}^{us}}{s+\log y}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{s}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}s\bigg|=\bigg|\int_{T\log y}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{1+i\tau u}}{\tau}\Big\{1+O\Big(\frac{1+\log y}{s}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}\tau\bigg|.$$

Puisque la contribution du terme d'erreur est

$$\ll\int_{T\log y}^{\infty}\frac{|1+\log y|}{\tau^2}\,\mathrm{d}\tau\ll\frac{1}{T},$$

une application de la seconde formule de la moyenne à la fonction $\tau\mapsto 1/\tau$ fournit $R(y)\ll 1/T$ et l'estimation (3.14) s'ensuit.

Posons

$$a_{z,n}(x,y):=\frac{1}{\Gamma(z-n)}\int_0^{u-1}\Big(1-\frac{v}{u}\Big)^{z-1-n}\frac{\mathrm{d}v}{y^v}\qquad(3\leqslant y\leqslant x^{1-\varepsilon},\ n\geqslant 0),$$

et évaluons la quantité $A_z(x,y)$ à l'aide des développements asymptotiques de ω_z obtenus en [7, lemme 2.1]. Notons que ces estimations sont énoncées pour $\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2$ mais qu'il est possible d'étendre ce domaine à $1/A\leqslant|z|\leqslant A$ au vu de [5, (1.9)], [5, (1.10)] et [5, th. 1]. Plus précisément, en injectant [7, (2.3)] dans (3.13), nous obtenons, pour $1/A\leqslant|z|\leqslant A$,

$$A_z(x,y)=x\bigg\{\sum_{0\leqslant n\leqslant L}\mathrm{e}^{-\gamma z}\,b_n(z)u^{z-1-n}a_{z,n}(x,y)+O_L\bigg(u^{z-2-L}\int_0^{u-1}\Big(1-\frac{v}{u}\Big)^{z-2-L}\frac{dv}{y^v}\bigg)\bigg\}.\tag{3.16}$$

Puisque $v\leqslant u-1$ sur le domaine d'intégration, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}a_{z,n}(x,y)&=\frac{1}{\Gamma(z-n)}\int_0^{u-1}\bigg\{\sum_{0\leqslant j\leqslant L-n}\binom{z-1-n}{j}\Big(\frac{-v}{u}\Big)^j+O\Big(\Big\{\frac{v}{u}\Big\}^{L-n+1}\Big)\bigg\}\frac{\mathrm{d}v}{y^v}\\&=\frac{1}{\log y}\sum_{0\leqslant j\leqslant L-n}\frac{(-1)^j}{\Gamma(z-n-j)(\log x)^j}\Big\{1+O\Big(\frac{(\log x)^{j+1}}{x}\Big)\Big\}+O\Big(\frac{1}{(\log x)^{L-n+1}}\Big),\end{aligned}\tag{3.17}$$

compte tenu de l'estimation uniforme

$$\int_0^{u-1} \frac{v^j}{y^v}\,\mathrm{d}v = \frac{j!}{(\log y)^{j+1}}\Big\{1 + O\Big(2^j\sqrt{\frac{y}{x}}\Big)\Big\}.$$

En injectant (3.17) dans (3.16), nous pouvons estimer la quantité $A_z(x,y)$ par

$$\frac{xu^{z-1}\,\mathrm{e}^{-\gamma z}}{\log y}\Big\{\sum_{0\leqslant n\leqslant L}\sum_{0\leqslant j\leqslant L-n}\frac{(-1)^j b_n(z)}{\Gamma(z-n-j)u^n(\log x)^j}\Big\{1+O\Big(2^j\sqrt{\frac{y}{x}}\Big)\Big\}+O\Big(\frac{1}{u^{L+1}}\Big)\Big\}. \tag{3.18}$$

En effectuant le changement d'indices $\ell = n + j$, nous obtenons

$$\begin{aligned} A_z(x,y) &= \frac{xu^{z-1}\,\mathrm{e}^{-\gamma z}}{\log y}\Big\{\sum_{0\leqslant n\leqslant L}\sum_{n\leqslant \ell\leqslant L}\frac{(-1)^{\ell-n} b_n(z)(\log y)^n}{\Gamma(z-\ell)(\log x)^\ell}\Big\{1+O\Big(2^{\ell-n}\sqrt{\frac{y}{x}}\Big)\Big\}+O\Big(\frac{1}{u^{L+1}}\Big)\Big\} \\ &= \frac{xu^{z-1}}{\log y}\Big\{\sum_{0\leqslant \ell\leqslant L}\frac{zh_\ell(z,y)}{u^\ell}+O\Big(\frac{1}{u^{L+1}}\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

puisque pour $0 \leqslant n \leqslant \ell \leqslant L$, $y \leqslant x$, nous avons

$$\frac{(-1)^{\ell-n}\,\mathrm{e}^{-\gamma z}\,b_n(z)u^{-\ell}2^{\ell-n}}{\Gamma(z-\ell)(\log y)^{\ell-n}x^{(u-1)/2u}} \ll_A 2^{\ell-n}\sqrt{\frac{y}{x}} \ll_A \frac{1}{u^{L+1}}. \tag{3.20}$$

Remarquons maintenant que la démonstration de [6, th II.6.3] reste valable lorsque la quantité $\log x$ est remplacée par $C\log x$ où C est une quantité indépendante de x, k et z. En particulier, lorsque $C = C(y) := 1/\log y$, les hypothèses de [6, th. II.6.3] sont vérifiées. Le résultat se déduit directement des expressions de $\Phi_\nu(x,k)$ et $\Phi_\nu(x,y,z)$, de [6, (II.6.11)] et des estimations (3.14) et (3.18). □

Rappelons les définitions des fonctions $\mathfrak{C}_{m,\varphi}$ en (3.2) et h_0 en (3.10) et posons, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$f_m(v) := \mathfrak{C}_{m,h_0}(v) \quad (v\in\mathbb{R}), \qquad r_{t,y} := \frac{t-1}{\log u_y} \quad (t\in\mathbb{R},\ 3\leqslant y < x). \tag{3.21}$$

Nous utiliserons le Théorème 3.2 sous la forme de l'énoncé suivant.

Corollaire 3.3. *Soient $M \in \mathbb{N}$ et $A > 1$. Sous les conditions $1/A \leqslant r_{k,y} \leqslant A$, $3 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$ nous avons uniformément*

$$\Phi_{\nu,k}(x,y) = \frac{x(\log u)^{k-1}}{(k-1)!\log x}\Big\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\frac{f_m(r_{k,y})}{(\log u)^m}+O\Big(\frac{1}{(\log u)^{M+1}}\Big)\Big\}. \tag{3.22}$$

En particulier,

$$f_0(v) = h_0(v), \quad f_1(v) = -\tfrac{1}{2}vh_0''(v) \quad (v\in\mathbb{R}).$$

Démonstration. Avec les notations (3.10), nous avons

$$h_0(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma z}}{\Gamma(1+z)} \qquad (z\in\mathbb{C}).$$

En particulier, h_0 est une fonction entière, il existe donc B tel que $h_0(z) \ll B$ $(|z| \leqslant A)$. Une application du Théorème 3.2 avec $L = 0$ fournit, lorsque $u \to \infty$,

$$\begin{aligned}\Phi_{\nu,k}(x,y) &= \frac{x}{\log x}\Big\{Q_{0,k}(\log u, y) + O\Big(\frac{(\log u)^k}{k!u}\Big)\Big\}\\ &= \frac{x}{\log x}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} h_0(z)\,\mathrm{e}^{z\log u}\, z^{-k}\,\mathrm{d}z + O\Big(\frac{(\log u)^k}{k!u}\Big)\Big\}\\ &= \frac{x}{\log x}\Big\{I_{k-1,h_0}(\log u) + O\Big(\frac{(\log u)^k}{k!u}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Le résultat annoncé est alors une conséquence immédiate de (3.4). □

Remarquons que les conditions de sommation portant sur les variables p et k dans la somme (2.11) entrent dans le domaine d'application du Corollaire 3.3 puisque nous pouvons considérer de plus que $p \leqslant \sqrt{x/ap}$. En effet, d'après (2.6), nous pouvons supposer $\Omega(n) \leqslant 2\log_2 x$ et donc $\nu(a) \leqslant 2\log_2 x$. Puisque $p \leqslant \exp\{(\log x)^{16/17}\}$, il suit, pour x suffisamment grand,

$$p\sqrt{ap} \leqslant ap^2 \leqslant p^{2\log_2 x + 2} \leqslant \exp\{(2\log_2 x + 2)(\log x)^{16/17}\} \leqslant \sqrt{x}.$$

3.3 Estimation d'une moyenne logarithmique

Posons

$$\lambda_\nu(p,k) := \sum_{\substack{P^+(a)<p\\ \nu(a)=k}} \frac{1}{a} \qquad \big(3 \leqslant p \leqslant \sqrt{x},\ k \in \mathbb{N}\big). \tag{3.23}$$

Le résultat suivant précise, dans un domaine restreint de valeurs de k, une estimation de $\lambda_\nu(p,k)$ due à Erdős et Tenenbaum [3]. Posons $r_\nu := 2$ si $\nu = \Omega$, et $r_\nu := +\infty$ si $\nu = \omega$. Rappelons les définitions des fonctions $\mathcal{H}_\nu$ en (1.1) et $\mathfrak{C}_{m,\varphi}$ en (3.2) et définissons

$$F_\nu(z) := \mathrm{e}^{\gamma z}\,\mathcal{H}_\nu(z) \quad (|z| < r_\nu). \tag{3.24}$$

Posons enfin

$$g_{\nu,m}(v) := \mathfrak{C}_{m,F_\nu}(v) \quad (v < r_\nu), \quad \mathfrak{r}_{t,p} := \frac{t}{\log_2 p} \quad (t \in \mathbb{R},\ p \geqslant 3). \tag{3.25}$$

Théorème 3.4. *Soient $M \in \mathbb{N}$ et $0 < a < b < r_\nu$. Sous les conditions $p \geqslant 3$, $a \leqslant \mathfrak{r}_{k,p} \leqslant b$, nous avons uniformément*

$$\lambda_\nu(p,k) = \frac{(\log_2 p)^k}{k!}\Big\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M} \frac{g_{\nu,m}(\mathfrak{r}_{k,p})}{(\log_2 p)^m} + O\Big(\frac{1}{(\log_2 p)^{M+1}}\Big)\Big\}. \tag{3.26}$$

Démonstration. Le membre de gauche de (3.26) est le coefficient de z^k dans la série

$$\sum_{P^+(n)<p} \frac{z^{\nu(n)}}{n} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{q\leqslant p}\Big(1 + \frac{z}{q-1}\Big) & \text{si } \nu = \omega\\ \displaystyle\prod_{q\leqslant p}\Big(1 - \frac{z}{q}\Big)^{-1} & \text{si } \nu = \Omega\end{cases} \qquad (|z| < r_\nu).$$

Une forme forte du théorème des nombres premiers implique

$$\sum_{P^+(n)<p} \frac{z^{\nu(n)}}{n} = F_\nu(z)(\log p)^z \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log p}\Big)\Big\}.$$

Cela permet d'évaluer $\lambda_\nu(p,k)$ à l'aide de la formule de Cauchy, soit

$$\begin{aligned}\lambda_\nu(p,k) &= \frac{1+O(1/\log p)}{2\pi i} \oint_{|z|=r} F_\nu(z)\, \mathrm{e}^{z \log_2 p}\, z^{-k-1}\, \mathrm{d}z \\ &= I_{k,F_\nu}(\log_2 p)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log p}\Big)\Big\}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Ici encore, le résultat souhaité est une conséquence directe de l'estimation (3.4). □

3.4 Réduction de la somme intérieure de $S^*_{\nu,\iota}(x)$

Rappelons les définitions de u_p en (3.9), de $\mathfrak{J}_x$ en (2.11), et remarquons que nous avons l'encadrement

$$(\log x)^{1/17} \leqslant u_p \leqslant (\log x)^{2/5} \quad (x \geqslant 3,\ p \in \mathfrak{J}_x).$$

Posons également

$$v_{a,p} := \frac{\log(x/ap)}{\log p} \qquad (p \in \mathfrak{J}_x,\ a \leqslant x/p).$$

Lemme 3.5. *Sous les conditions*

$$\begin{gathered} x \geqslant 3, \qquad p \in \mathfrak{J}_x, \qquad 1 \leqslant k \leqslant \log_2 x, \\ a \leqslant x/p, \qquad P^+(a) < p, \qquad \Omega(a) \leqslant 2\log_2 x, \end{gathered}$$

nous avons,

$$\frac{(\log v_{a,p})^{k-1}}{(k-1)!\log(x/ap)} = \frac{(\log u_p)^{k-1}}{(k-1)!\log x}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 x}{(\log x)^{1/17}}\Big)\Big\}. \tag{3.28}$$

Démonstration. Puisque $P^+(a) < p$ et $\Omega(a) \leqslant 2\log_2 x$, nous avons $ap \leqslant p^{2\log_2 x+1}$. Par suite, $\log(ap) \ll (\log_2 x)\log p$, et nous pouvons écrire

$$\log\left(\frac{x}{ap}\right) = \log x\Big(1 - \frac{\log ap}{\log x}\Big) = \log x\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 x}{u_p}\Big)\Big\}. \tag{3.29}$$

Par ailleurs,

$$v_{a,p} = \frac{\log(x/ap)}{\log p} = u_p\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 x}{u_p}\Big)\Big\},$$

donc

$$(\log v_{a,p})^{k-1} = (\log u_p)^{k-1}\Big\{1 + O\Big(\frac{(\log_2 x)\log p}{(\log u_p)\log x}\Big)\Big\}^{k-1} = (\log u_p)^{k-1}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 x}{u_p}\Big)\Big\}, \tag{3.30}$$

puisque $k \ll \log_2 x$.

En regroupant les estimations (3.29) et (3.30), nous obtenons le résultat annoncé en notant que $1/u_p \ll 1/(\log x)^{1/17}$ dès que $p \in \mathfrak{J}_x$. □

Rappelons les définitions de f_m et $r_{t,p}$ en (3.21), de $g_{\nu,m}$ et $\mathfrak{r}_{t,p}$ en (3.25) et posons, pour $m \in \mathbb{N}$, $3 \leqslant p \leqslant x$,

$$\beta_p := \frac{\log_2 p}{\log_2 x}, \quad \varepsilon_x := \frac{1}{\log_2 x}, \quad \mathfrak{S}_{\nu,m}(p,k) := \sum_{0\leqslant j\leqslant m} \frac{f_j(r_{k,p})g_{\nu,m-j}(\mathfrak{r}_{k,p})}{(1-\beta_p)^j\beta_p^{m-j}} \quad (p \in \mathfrak{J}_x,\ k \in \mathcal{K}_x). \tag{3.31}$$

Définissons enfin, pour tout $M \in \mathbb{N}$,

$$s_\nu(p,k) := \frac{(\log_2 p)^k(\log u_p)^{k-1}}{k!(k-1)!} \quad (p \in \mathfrak{J}_x,\ k \in \mathcal{K}_x), \tag{3.32}$$

$$S^{**}_{\nu,\iota}(x) = S^{**}_{\nu,\iota}(x,M) := \frac{x}{\log x}\sum_{p\in\mathfrak{J}_x}\frac{\log p}{p}\sum_{k\in\mathcal{K}_x} s_\nu(p,k)\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\mathfrak{S}_{\nu,m}(p,k)\varepsilon_x^m \quad (x \geqslant 3). \tag{3.33}$$

Proposition 3.6. *Pour tout $M \in \mathbb{N}$, nous avons l'estimation*

$$S^*_{\nu,\iota}(x) = S^{**}_{\nu,\iota}(x)\{1 + O(\varepsilon_x^{M+1})\} \qquad (x \geqslant 3). \tag{3.34}$$

Démonstration. Rappelons la définition de $r_{k,p}$ en (3.21) et notons que

$$r_{k,p,a} := \frac{k-1}{\log v_{a,p}} = \frac{(k-1)(1+O\{(\log_2 x)/(u_p\log u_p)\})}{\log u_p} = r_{k,p}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u_p}\Big)\Big\}. \tag{3.35}$$

Remarquons également que, pour $p \in \mathfrak{J}_x$, $k \in \mathcal{K}_x$, nous avons $\frac{5}{16} \leqslant r_{k,p} \leqslant 17$ et $\frac{17}{128} \leqslant \mathfrak{r}_{k,p} \leqslant \frac{5}{3}$. D'une part, l'estimation (3.22) appliquée avec $A = 17$ fournit, pour $x \geqslant 3$, $p \in \mathfrak{J}_x$,

$$\Phi_{\nu,k}\Big(\frac{x}{ap},p\Big) = \frac{x(\log v_{a,p})^{k-1}}{ap(k-1)!\log(x/ap)}\Big\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\frac{f_m(r_{k,p,a})}{(\log v_{a,p})^m} + O\Big(\frac{1}{(\log v_{a,p})^{M+1}}\Big)\Big\} \ (a \leqslant x/p^2), \tag{3.36}$$

et d'autre part, une application du Théorème 3.4 avec $a = \frac{17}{128}$ et $b = \frac{5}{3}$ fournit

$$\lambda_\nu(p,k) = \frac{(\log_2 p)^k}{k!}\Big\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\frac{g_{\nu,m}(\mathfrak{r}_{k,p})}{\beta_p^m}\varepsilon_x^m + O(\varepsilon_x^{M+1})\Big\} \quad (p \in \mathfrak{J}_x,\ k \in \mathcal{K}_x). \tag{3.37}$$

Rappelons alors que, d'après (3.30), nous avons, pour $0 \leqslant m \leqslant M+1$,

$$(\log v_{a,p})^m = (\log u_p)^m\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 x}{u_p}\Big)\Big\}. \tag{3.38}$$

À l'aide de (3.35) et (3.38) et en insérant (3.36) dans (2.11), nous obtenons

$$S^*_{\nu,\iota}(x) = \sum_{p\in\mathfrak{J}_x}\log p\sum_{k\in\mathcal{K}_x}\sum_{\substack{a\leqslant x/p\\ P^+(a)<p\\ \nu(a)=k}}\frac{x(\log v_{a,p})^{k-1}}{ap(k-1)!\log(x/ap)}\Big\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\frac{f_m(r_{k,p})}{(1-\beta_p)^m}\varepsilon_x^m + O(\varepsilon_x^{M+1})\Big\}.$$

L'estimation (3.28) fournit alors

$$S^*_\iota(x) = \frac{x}{\log x}\sum_{p\in\mathfrak{J}_x}\frac{\log p}{p}\sum_{k\in\mathcal{K}_x}\frac{(\log u_p)^{k-1}\lambda_\nu(p,k)}{(k-1)!}\Big\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\frac{f_m(r_{k,p})}{(1-\beta_p)^m}\varepsilon_x^m + O(\varepsilon_x^{M+1})\Big\}. \tag{3.39}$$

En insérant (3.37) dans (3.39), l'estimation requise (3.34) s'ensuit. □

Concernant la somme complémentaire $S_{\nu,\pi}(x)$, portant sur les entiers $n \leqslant x$ vérifiant $\nu(n) \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$, rappelons que $p_{m,\nu}(n)$ désigne alors le facteur premier d'indice $\nu(n)/2$. Ainsi, $\nu(a) = \nu(b) - 1 = k - 1$ et, en posant

$$S^*_{\nu,\pi}(x) := \sum_{p\in\mathcal{J}_x} \log p \sum_{k\in\mathcal{K}_x} \sum_{\substack{a\leqslant x/p\\ P^+(a)<p\\ \nu(a)=k-1}} \Phi_{\nu,k}\Big(\frac{x}{ap}, p\Big) \quad (x \geqslant 3), \qquad s^+_\nu(p,k) := \mathfrak{r}_{k,p} s_\nu(p,k) \quad (p \in \mathcal{J}_x,\ k \in \mathcal{K}_x),$$

$$S^{**}_{\nu,\pi}(x) = S^{**}_{\nu,\pi}(x, M) := \frac{x}{\log x} \sum_{p\in\mathcal{J}_x} \frac{\log p}{p} \sum_{k\in\mathcal{K}_x} s^+_\nu(p,k) \sum_{0\leqslant m\leqslant M} \mathfrak{S}_{\nu,m}(p,k)\varepsilon_x^m \quad (x \geqslant 3),$$

l'estimation (3.34) reste valable sous la forme

$$S^*_{\nu,\pi}(x) = S^{**}_{\nu,\pi}(x)\{1 + O(\varepsilon_x^{M+1})\}.$$

Dans la suite, les quantités introduites seront définies implicitement pour le cas $\nu(n)$ impair. Lorsque des différences notables existent pour le cas $\nu(n)$ pair, les quantités associées seront marquées du symbole $^+$.

4 Préparation technique

Dans toute cette section, fixons $M \in \mathbb{N}$. Rappelons la définition de $\mathcal{J}_x$ en (2.11) ainsi que les définitions de u_y en (3.9) et de f_m et $r_{t,y}$ en (3.21). Posons

$$w^*_p := \sqrt{(\log u_p)\log_2 p}, \qquad w_p := \lfloor w^*_p \rfloor \qquad (x \geqslant 3,\ p \in \mathcal{J}_x). \tag{4.1}$$

Afin d'alléger les notations, posons également, pour $p \in \mathcal{J}_x$,

$$\alpha^*_p := \frac{w^*_p}{\log_2 p} = \sqrt{\frac{1-\beta_p}{\beta_p}}, \qquad \alpha_p := \frac{w_p}{\log_2 p}. \tag{4.2}$$

Remarquons d'emblée que, pour $p \in \mathcal{J}_x$, nous avons $\frac{3}{5} \leqslant \beta_p \leqslant \frac{16}{17}$, ainsi que $\frac{1}{4} \leqslant \alpha^*_p \leqslant \frac{\sqrt{6}}{3}$. En particulier, $w^*_p = \sqrt{\beta_p(1-\beta_p)}\log_2 x \asymp \log_2 x \asymp \log_2 p$. Nous utiliserons implicitement ces estimations dans la suite.

Rappelons que la fonction polygamma d'ordre $m \in \mathbb{N}$, notée $\psi^{(m)}$ est définie par

$$\psi^{(m)}(z) := \frac{\mathrm{d}^{m+1}\log\Gamma(z)}{\mathrm{d}z^{m+1}} \quad (z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, -2\ldots\}).$$

Nous notons $\psi := \psi^{(0)}$ la fonction digamma.

Posons enfin, pour $x \geqslant 3$, $p \in \mathcal{J}_x$,

$$\begin{gathered}\mathcal{K}_{p,x} := \big[\tfrac{1}{8}\log_2 x - 1 - w_p, \log_2 x - w_p\big],\\ \mathcal{K}_{p,x,1} := \Big[-\sqrt{6(M+1)w_p\log w_p}, \sqrt{6(M+1)w_p\log w_p}\Big], \qquad \mathcal{K}_{p,x,2} := \mathcal{K}_{p,x} \smallsetminus \mathcal{K}_{p,x,1}\,.\end{gathered} \tag{4.3}$$

(Le facteur $\sqrt{6(M+1)}$ apparaissant ici pourrait être remplacé par toute constante assez grande comme nous le verrons dans la démonstration du Lemme 4.1.)

Afin d'estimer la somme intérieure de (3.33), étendons aux valeurs réelles de k la quantité $s_\nu(p,k)$ définie en (3.32). Posons alors

$$s_\nu^*(p,t) := \frac{(w_p^*)^{2t}}{(\log u_p)t\Gamma(t)^2} \quad (3 \leqslant p \leqslant x,\, t \geqslant 1). \tag{4.4}$$

Pour $p \in \mathfrak{J}_x$, la quantité $\log s_\nu^*(p,t)$ est dominée par le terme

$$2t\log w_p^* - 2\log\Gamma(t) = 2t\log(w_p^*/t) + 2t + O(\log t).$$

Cela laisse augurer que le maximum est atteint lorsque t est proche de w_p^*, donc de w_p. Ces considérations mènent à leur tour à supputer que la somme intérieure de (3.33) est dominée par un intervalle de valeurs de k centré en w_p. Définissons alors

$$Z_\nu(x,p) := \sum_{h\in\mathcal{K}_{p,x}} \frac{s_\nu(p,w_p+h)}{s_\nu(p,w_p)} \sum_{0\leqslant m\leqslant M} \mathfrak{S}_{\nu,m}(w_p+h)\varepsilon_x^m \quad (x \geqslant 3,\, p \in \mathfrak{J}_x). \tag{4.5}$$

Notons encore, pour $z \in \mathbb{C}$, $-1 < \Re z < 2$,

$$\sigma_{\nu,1}(z) := \begin{cases} \displaystyle\sum_q \frac{1-z}{q(q-1+z)} & \text{si } \nu = \omega, \\ \displaystyle\sum_q \frac{z}{q(q-z)} + \kappa & \text{si } \nu = \Omega, \end{cases} \qquad \sigma_{\nu,2}(z) := \begin{cases} \displaystyle\sum_q \frac{-1}{(q-1+z)^2} & \text{si } \nu = \omega, \\ \displaystyle\sum_q \frac{1}{(q-z)^2} & \text{si } \nu = \Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

où κ désigne toujours la constante de Mertens. Posons enfin, pour $z \in \mathbb{C}$, $0 < \Re z < 2$,

$$\begin{gathered} j_{\nu,1}(z) := z\sigma_{\nu,1}(z) - \frac{\psi(1+1/z)+\gamma}{z}, \qquad j_{\nu,2}(z) := z^2\sigma_{\nu,2}(z) - \frac{\psi'(1+1/z)}{z^2}, \\ \Theta_{v,x} := \Big\langle \sqrt{v(1-v)}\log_2 x \Big\rangle \ (0 \leqslant v \leqslant 1,\, x \geqslant 3), \end{gathered} \tag{4.7}$$

où $\langle v\rangle := v - \lfloor v\rfloor$ désigne la partie fractionnaire de v. Dans la suite, notons $\delta_v := \sqrt{(1-v)/v}$ $\quad(0 < v < 1)$. Le résultat suivant fournit une estimation de la quantité $Z_\nu(x,p)$ pour $p \in \mathfrak{J}_x$.

Lemme 4.1. *Il existe une suite de fonctions* $\{\mathfrak{z}_{\nu,m}(x,v)\}_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{[1,\infty[\times]\frac15,1[}$*, telles que, uniformément pour* $x \geqslant 3$ *et* $p \in \mathfrak{J}_x$*, on ait*

$$Z_\nu(x,p) = \frac{\mathrm{e}^{\gamma\{\mathfrak{r}_{w_p,p} - r_{w_p,p}\}}\,\mathcal{H}_\nu(\mathfrak{r}_{w_p,p})\sqrt{\pi w_p}}{\Gamma(1+r_{w_p,p})} \Big\{ \sum_{0\leqslant m\leqslant M} \mathfrak{z}_{\nu,m}(x,\beta_p)\varepsilon_x^m + O(\varepsilon_x^{M+1}) \Big\}. \tag{4.8}$$

En particulier, $\mathfrak{z}_{\nu,0} = 1$ *et, pour* $\frac15 < v < 1$*, nous avons*

$$\mathfrak{z}_{\nu,1}(x,v) = \frac{A\Theta_{v,x}^2 + B_{\nu,v}\Theta_{v,x} + C_{\nu,v}}{4\sqrt{v(1-v)}} - \frac{D_v\sqrt{v}}{(1-v)^{3/2}} - \frac{E_{\nu,v}\sqrt{1-v}}{v^{3/2}}, \tag{4.9}$$

avec

$$\begin{gathered} A = 4, \quad B_{\nu,v} = 4j_{\nu,1}(\delta_v) + 2, \quad C_{\nu,v} = j_{\nu,1}(\delta_v)^2 + j_{\nu,1}(\delta_v) + j_{\nu,2}(\delta_v) - \tfrac{1}{12}, \\ D_v = \frac{h_0''(1/\delta_v)}{2h_0(1/\delta_v)}, \quad E_{\nu,v} = \frac{F_\nu''(\delta_v)}{2F_\nu(\delta_v)}. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Démonstration. Rappelons la définition des $\mathfrak{S}_{\nu,m}(p,k)$ en (3.31) et posons

$$Z_{\nu,\ell}(x,p) := \sum_{h\in\mathcal{K}_{p,x}} \frac{s_\nu(p,w_p+h)\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,w_p+h)}{s_\nu(p,w_p)\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,w_p)} \quad (\ell\in\mathbb{N},\ x\geqslant 3,\ p\in\mathfrak{J}_x), \tag{4.11}$$

de sorte que $Z_\nu(x,p)=\sum_{0\leqslant\ell\leqslant M}\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,w_p)Z_{\nu,\ell}(x,p)\varepsilon_x^\ell$. Définissons encore

$$H_{p,\ell}(t) := \log\{s_\nu^*(p,t)\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,t)\} \quad (\ell\in\mathbb{N},\ x\geqslant 3,\ p\in\mathfrak{J}_x,\ 1\leqslant t< r_\nu\log_2 x). \tag{4.12}$$

Soit $p\in\mathfrak{J}_x$. Notre premier objectif consiste à expliciter un développement de Taylor pour $H_{p,\ell}(t)$ autour du point $t=w_p$. À cette fin, évaluons les dérivées logarithmiques des fonctions de t apparaissant au membre de droite de (4.4).

Notons B_n le n-ième nombre de Bernoulli. En appliquant la formule d'Euler-Maclaurin à la fonction log, nous obtenons la formule de Stirling complexe (voir, *e.g.*, [6, th. I.0.12])

$$\log\Gamma(s)=(s-\tfrac12)\log s - s+\tfrac12\log 2\pi+\sum_{1\leqslant k\leqslant M}\frac{(-1)^{k+1}B_{k+1}}{k(k+1)s^k}+O\Big(\frac{1}{s^{M+1}}\Big) \quad (s\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}_-). \tag{4.13}$$

La fonction $\log\Gamma$ étant holomorphe sur $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}_-$, une dérivation terme à terme de (4.13) fournit, pour $1\leqslant j\leqslant M$, $|\arg s|<\pi$, le développement

$$\psi^{(j)}(s)=(-1)^{j+1}\bigg\{\frac{(j-1)!}{s^j}+\frac{j!}{2s^{j+1}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant M-j-1}\frac{B_{k+1}(k+j)!}{(k+1)!s^{j+k+1}}+O\Big(\frac{1}{s^{M+1}}\Big)\bigg\}. \tag{4.14}$$

Posons pour $\ell\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{N}^*$,

$$\Xi_{\nu,\ell,j}(p,w_p) := \bigg[\frac{\mathrm{d}^j\log\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,t)}{\mathrm{d}t^j}\bigg]_{t=w_p} \quad (p\in\mathfrak{J}_x).$$

Notons δ_{ij} le symbole de Kronecker et rappelons les définitions de $s_\nu^*(p,t)$ en (4.4) et de $H_{p,\ell}(t)$ en (4.12). En dérivant la formule

$$H_{p,\ell}(t)=2t\log w_p^*-\log_2 u_p-\log t-2\log\Gamma(t)+\log\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,t),$$

nous obtenons, pour tous $\ell\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{N}^*$,

$$H_{p,\ell}^{(j)}(t)=2\delta_{1j}\log w_p^*+\frac{(-1)^j(j-1)!}{t^j}-2\psi^{(j-1)}(t)+\Xi_{\nu,\ell,j}(p,t),$$

soit, d'après (4.13) et (4.14),

$$\begin{aligned} H_{p,\ell}^{(j)}(w_p) &= 2\delta_{1j}\log\frac{w_p^*}{w_p}+2(-1)^{j+1}\bigg\{\frac{(j-2)!}{w_p^{j-1}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant M-j}\frac{B_{k+1}(k+j-1)!}{(k+1)!w_p^{j+k}}\bigg\}\\ &\quad+\Xi_{\nu,\ell,j}(p,w_p)+O\big(\varepsilon_x^{M+1}\big)\\ &=2\delta_{1j}\log\Big(1+\frac{\Theta_{\beta_p,x}}{w_p}\Big)+2(-1)^{j+1}\sum_{0\leqslant k\leqslant\lfloor(M-j+1)/2\rfloor}\frac{B_{2k}(2k+j-2)!}{(2k)!w_p^{2k+j-1}}\\ &\quad+\Xi_{\nu,\ell,j}(p,w_p)+O\big(\varepsilon_x^{M+1}\big), \end{aligned} \tag{4.15}$$

puisque $B_{2k+1}=0$ pour $k\geqslant 1$.

Rappelons les définitions des intervalles $\mathcal{K}_{p,x}$, $\mathcal{K}_{p,x,1}$, et $\mathcal{K}_{p,x,2}$ en (4.3). Pour $\ell \in \mathbb{N}$, désignons respectivement par $Z_{\nu,\ell,1}(x,p)$ et $Z_{\nu,\ell,2}(x,p)$, les contributions à $Z_{\nu,\ell}(x,p)$ des intervalles $\mathcal{K}_{p,x,1}$ et $\mathcal{K}_{p,x,2}$.

La définition des fonctions $\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,k)$ en (3.31) implique $\Xi_{\nu,\ell,j}(p) \asymp \varepsilon_x^j$ $(p \in \mathcal{J}_x,\ j \in \mathbb{N}^*)$. Par ailleurs, l'estimation (4.15) implique $H_{p,\ell}^{(j)}(w_p) \ll \varepsilon_x^{j-1}$ $(j \geqslant 2)$. Un développement de Taylor à l'ordre $2M+1$ fournit donc, pour $h \in \mathcal{K}_{p,x,1} \cap \mathbb{Z}$,

$$H_{p,\ell}(w_p+h) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant 2M} \frac{H_{p,\ell}^{(j)}(w_p)h^j}{j!} + O\Big(h^{2M+1}\varepsilon_x^{2M}\Big), \tag{4.16}$$

soit

$$\frac{s_\nu^*(p,w_p+h)\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,w_p+h)}{s_\nu^*(p,w_p)\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,w_p)} = \Big\{1+O\Big(h^{2M+1}\varepsilon_x^{2M}\Big)\Big\}\exp\bigg(\sum_{1 \leqslant j \leqslant 2M}\frac{H_{p,\ell}^{(j)}(w_p)h^j}{j!}\bigg). \tag{4.17}$$

Puisque, pour $h \in \mathcal{K}_{p,x,1} \cap \mathbb{Z}$, nous avons $s_\nu(p,w_p+h) = s_\nu^*(p,w_p+h)$, il vient, pour $\ell \in \mathbb{N}$, par sommation sur $h \in \mathcal{K}_{p,x,1}$,

$$Z_{\nu,\ell,1}(x,p) = \sum_{h \in \mathcal{K}_{p,x,1}} \Big\{1+O\Big(h^{2M+1}\varepsilon_x^{2M}\Big)\Big\}\exp\bigg(\sum_{1 \leqslant j \leqslant 2M}\frac{H_{p,\ell}^{(j)}(w_p)h^j}{j!}\bigg) \quad (x \geqslant 3,\ p \in \mathcal{J}_x).$$

L'estimation (4.15) fournit alors un développement de $Z_{\nu,\ell,1}(x,p)$ selon les puissances de ε_x. Plus précisément, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{J}_x$, les estimations

$$H'_{p,\ell}(w_p) = \frac{2\Theta_{\beta_p,x}}{w_p} + \Xi_{\nu,\ell,1}(p) + O\big(\varepsilon_x^2\big), \quad H''_{p,\ell}(w_p) = -\frac{2}{w_p} + \Xi_{\nu,\ell,2}(p) + O\big(\varepsilon_x^3\big),$$
$$H_{p,\ell}^{(j)}(w_p) \ll \varepsilon_x^{j-1} \ (j \geqslant 2),$$

fournissent, en développant en série le membre de droite de (4.17), l'existence d'une suite de fonctions réelles $\{z_{p,\ell;j}(v)\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$Z_{\nu,\ell,1}(x,p) = \sum_{h \in \mathcal{K}_{p,x,1}} \mathrm{e}^{-h^2/w_p}\bigg\{\sum_{0 \leqslant j \leqslant M} z_{p,\ell;j}(w_p)h^{2j} + O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\bigg\} \quad (x \geqslant 3,\ p \in \mathcal{J}_x),$$

où nous avons utilisé le fait que, par symétrie de l'intervalle de sommation, la contribution des termes impairs est nulle. En particulier, $z_{p,\ell;0} = 1$. Posons, pour $j \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{J}_x$,

$$\mathcal{I}_{j,p}(x) := \int_{\mathcal{K}_{p,x,1}} h^{2j}\,\mathrm{e}^{-h^2/w_p}\,\mathrm{d}h = w_p^{j+\frac12}\Gamma\big(j+\tfrac12\big)\Big\{1+O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\Big\} \qquad (x \geqslant 3). \tag{4.18}$$

La formule d'Euler-Maclaurin appliquée à l'ordre 0 fournit alors, pour $p \in \mathcal{J}_x$,

$$Z_{\nu,\ell,1}(x,p) = \sqrt{\pi w_p}\,\mathrm{erf}\Big(\sqrt{6(M+1)\log w_p}\Big) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant M} z_{p,\ell;j}(w_p)\,\mathcal{I}_{j,p}(x) + O\Big(\varepsilon_x^{M+\frac12}\Big). \tag{4.19}$$

Nous déduisons des estimations (4.18) et (4.19), l'existence d'une suite $\{z_{p,\ell;j}^*(v)\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions réelles vérifiant

$$Z_{\nu,\ell,1}(x,p) = \sqrt{\pi w_p}\bigg\{\sum_{0 \leqslant j \leqslant M} z_{p,\ell;j}^*(\beta_p)\varepsilon_x^j + O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\bigg\} \quad (x \geqslant 3,\ p \in \mathcal{J}_x), \tag{4.20}$$

avec $z^*_{p,\ell;0}=1$. En particulier, un rapide calcul permet d'obtenir

$$\Xi_{\nu,1,1}(p)=\frac{j_{\nu,1}(\alpha_p)}{w_p}\quad(p\in\mathcal{J}_x),\qquad \Xi_{\nu,1,2}(p)=\frac{j_{\nu,2}(\alpha_p)}{w_p^2}\quad(p\in\mathcal{J}_x),$$

de sorte que pour $\ell=1$, nous avons,

$$\begin{aligned}Z_{\nu,1,1}(x,p)&=\sqrt{\pi w_p}+\frac{\big\{4\Theta^2_{\beta_p,x}+4\Theta_{\beta_p,x}j_{\nu,1}(\alpha_p)+j_{\nu,1}(\alpha_p)^2+j_{\nu,2}(\alpha_p)\big\}\,\mathcal{I}_{1,p}(x)}{2w_p^2}\\&\qquad+\big\{\tfrac{1}{24}H^{(4)}_{p,1}(w_p)+\tfrac16 H'_{p,1}(w_p)H'''_{p,1}(w_p)\big\}\,\mathcal{I}_{2,p}(x)+\tfrac{1}{72}H'''_{p,1}(w_p)^2\,\mathcal{I}_{3,p}(x)+O(\varepsilon_x^{3/2})\\&=\sqrt{\pi w_p}\bigg\{1+\frac{A\Theta^2_{\beta_p,x}+B_{\nu,\beta_p}\Theta_{\beta_p,x}+C_{\nu,\beta_p}}{4\sqrt{\beta_p(1-\beta_p)}}\varepsilon_x+O(\varepsilon_x^2)\bigg\}\end{aligned}\tag{4.21}$$

De manière analogue, nous avons

$$Z_{\nu,2,1}(x,p)=\sqrt{\pi w_p}\{1+O(\varepsilon_x)\}.\tag{4.22}$$

Il reste à évaluer la contribution de l'intervalle $\mathcal{K}_{p,x,2}$. Pour $\ell\in\mathbb{N}$, d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, il existe, pour tout $h\in\mathcal{K}_{p,x,2}$, un nombre réel $c_h\in\mathcal{K}_x$ tel que

$$H_{p,\ell}(w_p+h)=H_{p,\ell}(w_p)+H'_{p,\ell}(w_p)h+\tfrac12 H''_{p,\ell}(c_h)h^2\quad\big(p\in\mathcal{J}_x,\ h\in\mathcal{K}_{p,x,2}\big).\tag{4.23}$$

Puisque $c_h\in\mathcal{K}_x$, nous avons $\varepsilon_x\leqslant 1/c_h\leqslant 8\varepsilon_x$. Rappelons que les estimations (4.15) fournissent, pour $h\in\mathcal{K}_{p,x,2}$,

$$H'_{p,\ell}(w_p)\ll\varepsilon_x,\quad H''_{p,\ell}(c_h)=-\frac{2+O(\varepsilon_x)}{c_h}\leqslant-2\varepsilon_x+O\big(\varepsilon_x^2\big)\leqslant-\frac{1}{3w_p}+O\big(\varepsilon_x^2\big),\tag{4.24}$$

puisque $\varepsilon_x w_p^*=\sqrt{\beta_p(1-\beta_p)}\geqslant\frac{4}{17}>\frac16$. En regroupant les estimations (4.23) et (4.24), il vient

$$H_{p,\ell}(w_p+h)-H_{p,\ell}(w_p)\leqslant-\frac{h^2}{6w_p}+O(1)\quad(p\in\mathcal{J}_x,\ h\in\mathcal{K}_{p,x,2})\,,$$

soit

$$\frac{s_\nu(p,w_p+h)\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,w_p+h)}{s_\nu(p,w_p)\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,w_p)}\ll\mathrm{e}^{-h^2/6w_p}\quad(p\in\mathcal{J}_x,\ h\in\mathcal{K}_{p,x,2}).$$

Une sommation sur $h\in\mathcal{K}_{p,x,2}$ fournit alors, pour $\ell\in\mathbb{N}$,

$$Z_{\nu,\ell,2}(x,p)\ll\int_{\mathcal{K}_{p,x,2}}\mathrm{e}^{-t^2/6w_p}\,\mathrm{d}t\ll\sqrt{w_p}\bigg\{1-\operatorname{erf}\bigg(\sqrt{6(M+1)\log w_p}\bigg)\bigg\}\ll\varepsilon_x^{M+\frac12}.\tag{4.25}$$

Ainsi la contribution de l'intervalle $\mathcal{K}_{p,x,2}$ à $Z_{\nu,l}(x,p)$ peut être englobée dans le terme d'erreur de $Z_{\nu,\ell,1}(x,p)$. L'existence du développement de $Z_\nu(x,p)$ se déduit alors directement des définitions (3.31), (4.5) et (4.11) ainsi que des estimations (4.20) et (4.25). L'expression de $\mathfrak{z}_{\nu,1}$ se déduit quant à elle des estimations (4.21) et (4.22) en remarquant que, d'après la définition de $\mathfrak{S}_{\nu,0}(p,k)$ en (3.31), ainsi que des fonctions h_0 en (3.10) et F_ν en (3.24), nous avons

$$\mathfrak{S}_{\nu,0}(p,w_p)=h_0(r_{w_p,p})F_\nu(\mathfrak{r}_{w_p,p})=\frac{\mathrm{e}^{\gamma\{\mathfrak{r}_{w_p,p}-r_{w_p,p}\}}\,\mathcal{H}_\nu(\mathfrak{r}_{w_p,p})}{\Gamma(1+r_{w_p,p})}\quad(p\in\mathcal{J}_x).\tag{4.26}$$

$\square$

Nous sommes désormais en mesure d'évaluer la somme intérieure de $S^{**}_{\nu,\iota}(x)$ définie en (3.33). Posons

$$K_\nu(z) := \frac{\mathcal{H}_\nu(z)\,\mathrm{e}^{\gamma(z-1/z)}}{\Gamma(1+1/z)}\ (0<\Re z<2),\quad \kappa(v) := 2\sqrt{v(1-v)}+v-1\quad (0\leqslant v\leqslant 1),$$
$$\varrho_\nu(v) := \frac{v^{1/4}K_\nu\Big(\sqrt{(1-v)/v}\Big)}{2\sqrt{\pi}(1-v)^{3/4}}\ \big(\tfrac15<v<1\big). \tag{4.27}$$

Proposition 4.2. *Il existe une suite de fonctions* $\{\mathfrak{s}_{\nu;m}(v)\}_{m\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{]1/5,1[}$, *telles que*

$$S_{\nu,\iota}(x) = \frac{x}{\sqrt{\log_2 x}}\sum_{p\in\mathfrak{J}_x}\frac{\varrho_\nu(\beta_p)(\log x)^{\kappa(\beta_p)}}{p}\Bigg\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\mathfrak{s}_{\nu;m}(\beta_p)\varepsilon_x^m + O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\Bigg\}\quad (x\geqslant 3). \tag{4.28}$$

En particulier, $\mathfrak{s}_{\nu;0}=1$ *et*

$$\mathfrak{s}_{\nu;1}(v) = \frac{A_{\nu,v}}{4\sqrt{v(1-v)}} - \frac{D_v\sqrt{v}}{(1-v)^{3/2}} - \frac{E_{\nu,v}\sqrt{1-v}}{v^{3/2}}, \tag{4.29}$$

avec D_v *et* $E_{\nu,v}$ *définies en* (4.10) *et*

$$A_{\nu,v} = \frac{4\{\gamma+\psi(1+1/\delta_v)\}}{\delta_v} + j_{\nu,1}(\delta_v) + j_{\nu,1}(\delta_v)^2 + j_{\nu,2}(\delta_v) - \tfrac34.$$

Démonstration. Compte tenu de la définition de $S^{**}_{\nu,\iota}(x)$ en (3.33) et de celle de $Z_\nu(x,p)$ en (4.5), nous avons

$$S^{**}_{\nu,\iota}(x) = \frac{x}{\log x}\sum_{p\in\mathfrak{J}_x}\frac{(\log p)s_\nu(p,w_p)Z_\nu(x,p)}{p}. \tag{4.30}$$

Or, la définition de $s_\nu(p,w_p)$ en (3.32) ainsi que le développement de $Z_\nu(x,p)$ issu de (4.8) impliquent l'existence d'une suite de fonctions réelles $\{\mathfrak{s}_{\nu,x;m}(v)\}_{m\in\mathbb{N}}$ et d'un terme principal $\Upsilon(x,p)$ tels que

$$S^{**}_{\nu,\iota}(x) = \sum_{p\in\mathfrak{J}_x}\Upsilon(x,p)\Bigg\{1+\sum_{1\leqslant m\leqslant M}\mathfrak{s}_{\nu,x;m}(\beta_p)\varepsilon_x^m + O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\Bigg\}. \tag{4.31}$$

Il reste à établir les expressions de $\Upsilon(x,p)$ et $\mathfrak{s}_{\nu;1}(v)$. Remarquons d'emblée que $\langle w_p^*\rangle = \Theta_{\beta_p,x}$. Nous avons, pour $p\in\mathfrak{J}_x$,

$$r_{w_p^*,p} = \frac{1}{\alpha_p^*} - \frac{\varepsilon_x}{1-\beta_p} + O\big(\varepsilon_x^2\big),\ \Gamma(1+r_{w_p^*,p}) = \Gamma\Big(1+\frac{1}{\alpha_p^*}\Big)\Bigg\{1-\frac{\psi(1+1/\alpha_p^*)}{1-\beta_p}\varepsilon_x + O\big(\varepsilon_x^2\big)\Bigg\},$$
$$\mathrm{e}^{\gamma(\mathfrak{r}_{w_p^*,p}-r_{w_p^*,p})} = \mathrm{e}^{\gamma(\alpha_p^*-1/\alpha_p^*)}\Bigg\{1+\frac{\gamma\varepsilon_x}{1-\beta_p}+O\big(\varepsilon_x^2\big)\Bigg\},\quad \sqrt{w_p} = \sqrt{w_p{}^*}\Bigg\{1-\frac{\Theta_{\beta_p,x}}{2w_p^*}+O\big(\varepsilon_x^2\big)\Bigg\}. \tag{4.32}$$

Par ailleurs, l'estimation (4.17) restant valable pour h réel, nous pouvons écrire, en choisissant $h=-\langle w_p^*\rangle = -\Theta_{\beta_p,x}$,

$$s_\nu(p,w_p)\mathfrak{S}_{\nu,0}(p,w_p) = s_\nu^*(p,w_p^*)\mathfrak{S}_{\nu,0}(p,w_p^*)\Bigg\{1-\frac{\Theta_{\beta_p,x}\{\Theta_{\beta_p,x}+j_{\nu,1}(\alpha_p^*)\}}{w_p^*}+O\big(\varepsilon_x^2\big)\Bigg\}. \tag{4.33}$$

D'après (4.4), (4.26) et (4.32), nous avons

$$s_\nu^*(p,w_p^*)\mathfrak{S}_{\nu,0}(p,w_p^*)=\frac{K_\nu(\alpha_p^*)(w_p^*)^{2w_p^*+1}}{\Gamma(w_p^*+1)^2\log u_p}\Big\{1+\frac{\gamma+\psi(1+1/\alpha_p^*)}{1-\beta_p}\varepsilon_x+O\big(\varepsilon_x^2\big)\Big\}. \tag{4.34}$$

La formule de Stirling fournissant enfin

$$\Gamma(w_p^*+1)^2=2\pi(w_p^*)^{2w_p^*+1}\,\mathrm{e}^{-2w_p^*}\Big\{1+\frac{1}{6w_p^*}+O\big(\varepsilon_x^2\big)\Big\}\quad(p\in\mathfrak{J}_x), \tag{4.35}$$

nous déduisons de (4.32), (4.33), (4.34) et (4.35) que

$$s_\nu(p,w_p)\mathfrak{S}_{\nu,0}(p,w_p)\sqrt{\pi w_p}=\frac{K_\nu(\alpha_p^*)\,\mathrm{e}^{2w_p^*}\sqrt{w_p^*}}{2\sqrt{\pi}\log u_p}\Big\{1+\mathfrak{s}_{\nu;1}(\beta_p)\varepsilon_x+O\big(\varepsilon_x^2\big)\Big\}. \tag{4.36}$$

Puisque d'après les estimations (2.12) et (3.34), nous avons de plus

$$S_{\nu,\iota}(x)=S_{\nu,\iota}^{**}(x)\Big\{1+O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\Big\},$$

le résultat annoncé s'ensuit en vertu de (4.8), (4.30), (4.31), (4.36) et des définitions de $\kappa(v)$ et $\varrho_\nu(v)$ en (4.27).

□

Concernant le cas $\nu(n)\equiv 0(\bmod 2)$, nous définissons la quantité complémentaire $Z_\nu^+(x,p)$ par

$$Z_\nu^+(x,p):=\sum_{h\in\mathcal{K}_{p,x}}\frac{s_\nu^+(p,w_p+h)}{s_\nu^+(p,w_p)}\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\mathfrak{S}_{\nu,m}(w_p+h)\varepsilon_x^m\quad(x\geqslant 3,\ p\in\mathfrak{J}_x).$$

Notons qu'en posant, pour $\ell\in\mathbb{N}$,

$$H_{p,\ell}^+(t):=\log\{s_\nu^{+*}(p,t)\mathfrak{S}_{\nu,\ell}(p,t)\}=\log\mathfrak{r}_{t,p}+H_{p,\ell}(t)\quad(x\geqslant 3,\ p\in\mathfrak{J}_x,\ 1\leqslant t<r_\nu\log_2 x),$$

les estimations (4.15) restent valables pour $H_{p,\ell}^+$ de sorte que $Z_\nu^+(x,p)$ admet un développement analogue à (4.8) sous la forme

$$Z_\nu^+(x,p)=\frac{\mathrm{e}^{\gamma\{\mathfrak{r}_{w_p,p}-r_{w_p,p}\}}\,\mathcal{H}_\nu(\mathfrak{r}_{w_p,p})\sqrt{\pi w_p}}{\Gamma(1+r_{w_p,p})}\Big\{\sum_{0\leqslant m\leqslant M}\mathfrak{z}_{\nu,m}^+(x,\beta_p)\varepsilon_x^m+O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\Big\}\quad(x\geqslant 3),$$

puisque,

$$\left[\frac{\mathrm{d}^j\log\mathfrak{r}_{t,p}}{\mathrm{d}t^j}\right]_{t=w_p}\ll\varepsilon_x^j\qquad(j\in\mathbb{N}^*,\ p\in\mathfrak{J}_x).$$

En particulier, l'estimation (4.21) persiste en remplaçant $j_{\nu,1}(\alpha_p)$ et $j_{\nu,2}(\alpha_p)$ par $j_{\nu,1}(\alpha_p)+1$ et $j_{\nu,2}(\alpha_p)-1$ respectivement, d'où nous déduisons que

$$\mathfrak{z}_{\nu,1}^+(x,v)=\mathfrak{z}_{\nu,1}(x,v)+\frac{2j_{\nu,1}(\delta_v)+1+4\Theta_{v,x}}{4\sqrt{v(1-v)}}\quad\big(\tfrac15<v<1\big).$$

Ensuite, remarquons d'une part que l'estimation (4.33) reste valable en remplaçant la quantité $j_{\nu,1}(\alpha_p^*)$ par $j_{\nu,1}(\alpha_p^*)+1$, et d'autre part que

$$s_\nu^{+*}(p,w_p^*)=\mathfrak{r}_{w_p^*,p}s_\nu^*(p,w_p^*)=\alpha_p^*s_\nu(p,w_p^*),$$

de sorte qu'en posant

$$\varrho_\nu^+(v) := \delta_v \varrho_\nu(v) \quad \big(\tfrac{1}{5} < v < 1\big), \qquad \mathfrak{s}_{\nu;1}^+(v) := \mathfrak{s}_{\nu;1}(v) + \frac{2j_{\nu,1}(\delta_v)+1}{4\sqrt{v(1-v)}}, \tag{4.37}$$

la somme $S_{\nu,\pi}(x)$ admet un développement analogue à (4.28) sous la forme

$$S_{\nu,\pi}(x) = \frac{x}{\sqrt{\log_2 x}} \sum_{p\in\mathfrak{J}_x} \frac{\varrho_\nu^+(\beta_p)(\log x)^{\kappa(\beta_p)}}{p} \Big\{ \sum_{0\leqslant m\leqslant M} \mathfrak{s}_{\nu;m}^+(\beta_p)\varepsilon_x^m + O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\Big\} \quad (x \geqslant 3), \tag{4.38}$$

avec $\mathfrak{s}_{\nu;0}^+ = 1$. Nous sommes désormais en mesure de démontrer le Théorème 1.1.

5 Preuve du Théorème 1.1

Rappelons la définition de ϱ_ν en (4.27) et posons

$$R_\nu(v) := \log \varrho_\nu(v) \quad \big(\tfrac{1}{5} < v < 1\big).$$

Compte tenu de la Proposition 4.2, il nous faut évaluer la somme en p de (4.28). Fixons $M \in \mathbb{N}$, posons, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$w_{\nu,x,m}(p) := \frac{\mathfrak{s}_{\nu;m}(\beta_p)\varrho_\nu(\beta_p)(\log x)^{\kappa(\beta_p)}}{p} \ (p\in\mathfrak{J}_x), \qquad w_{\nu,x}(p) := \sum_{0\leqslant m\leqslant M} w_{\nu,x,m}(p)\varepsilon_x^m \quad (p\in\mathfrak{J}_x),$$

et écrivons la somme en p de (4.28) sous forme intégrale. Il vient

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &:= \sum_{p\in\mathfrak{J}_x} \frac{\varrho_\nu(\beta_p)(\log x)^{\kappa(\beta_p)}}{p} \sum_{0\leqslant m\leqslant M} \mathfrak{s}_{\nu;m}(\beta_p)\varepsilon_x^m = \int_{\mathfrak{J}_x} w_{\nu,x}(t)\,\mathrm{d}\pi(t) \\ &= \int_{\mathfrak{J}_x} w_{\nu,x}(t)\,\mathrm{d}\,\mathrm{li}(t) + \int_{\mathfrak{J}_x} w_{\nu,x}(t)\,\mathrm{d}\{\pi(t)-\mathrm{li}(t)\} =: J_{\nu,1}(x) + J_{\nu,2}(x), \end{aligned}$$

disons.

Nous traitons $J_{\nu,2}(x)$ comme un terme d'erreur. Une forme forte du théorème des nombres premiers fournit $\pi(t) - \mathrm{li}(t) \ll t\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\log t}}$ $(t \geqslant 2)$. Notant par ailleurs que

$$\kappa\big(\beta_{\exp\{(\log x)^{3/5}\}}\big) = \tfrac{2}{5}(\sqrt{6}-1), \qquad \kappa\big(\beta_{\exp\{(\log x)^{16/17}\}}\big) = \tfrac{7}{17}, \tag{5.1}$$

une intégration par parties implique

$$J_{\nu,2}(x) = \Big[w_{\nu,x}(t)(\pi(t)-\mathrm{li}(t))\Big]_{\mathfrak{J}_x} - \int_{\mathfrak{J}_x} w_{\nu,x}'(t)\{\pi(t)-\mathrm{li}(t)\}\,\mathrm{d}t. \tag{5.2}$$

Nous déduisons de (5.1) que le terme entre crochets est

$$\ll \big\{(\log x)^{2(\sqrt{6}-1)/5}\,\mathrm{e}^{-2(\log x)^{3/10}} + (\log x)^{7/17}\,\mathrm{e}^{-2(\log x)^{8/17}}\big\} \ll \mathrm{e}^{-(\log x)^{3/10}}. \tag{5.3}$$

Évaluons ensuite l'intégrale de (5.2). Puisque, $\log w_{\nu,x,0}(t) = \log \varrho_\nu(\beta_t) + \kappa(\beta_t)\log_2 x - \log t$, nous pouvons écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log w_{\nu,x,0}(t) = O\Big(\frac{1}{t\log t}\Big) - \frac{4\log_2 t}{t\log t\log_2 x} + O\Big(\frac{1}{t\log t}\Big) - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t} + O\Big(\frac{1}{t\log t}\Big).$$

Ainsi $w'_{\nu,x,0}(t) < 0$ pour t assez grand. Puisque nous avons de plus, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log \mathfrak{s}_{\nu;m}(\beta_t) \ll \frac{1}{t \log t},$$

nous déduisons que $w'_{\nu,x,m}(t) < 0$ pour t assez grand et donc que $w_{\nu,x}$ est décroissante sur $\mathfrak{J}_x$. Une nouvelle intégration par parties permet alors de vérifier que l'intégrale de (5.2) est

$$\ll \int_{\mathfrak{J}_x} w_{\nu,x}(t)\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\log t}}\, \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-(\log x)^{3/10}} \ll e^{-(\log x)^{3/10}}. \tag{5.4}$$

De (5.3) et (5.4), nous concluons que

$$J_{\nu,2}(x) \ll \mathrm{e}^{-(\log x)^{3/10}}.$$

Enfin, nous avons

$$J_{\nu,1}(x) = \int_{\mathfrak{J}_x} \frac{w_{\nu,x}(t)}{\log t}\, \mathrm{d}t,$$

d'où nous déduisons, après changement de variables $t = \mathrm{e}^{(\log x)^\beta}$,

$$S_{\nu,\iota}(x) = \Big\{1 + O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\Big\} x\sqrt{\log_2 x} \int_{3/5}^{16/17} \varrho_\nu(\beta)(\log x)^{\kappa(\beta)} \Big\{ \sum_{0\leqslant m\leqslant M} \mathfrak{s}_{\nu;m}(\beta)\varepsilon_x^m \Big\}\, \mathrm{d}\beta. \tag{5.5}$$

Afin de simplifier les écritures, définissons, pour $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\eta_{\nu,x,\ell}(v) := \mathfrak{s}_{\nu;\ell}(v)\varrho_\nu(v)(\log x)^{\kappa(v)} \ \big(\tfrac{1}{5} < v < 1\big), \quad \eta_{\nu,x}(v) := \sum_{0\leqslant \ell\leqslant M} \eta_{\nu,x,\ell}(v)\varepsilon_x^\ell \ \big(\tfrac{1}{5} < v < 1\big). \tag{5.6}$$

La fonction $\kappa(v)$ définie en (4.27) atteignant son maximum en $\varphi* := \frac{\varphi\sqrt{5}}{5}$, nous estimons le rapport $\eta_{\nu,x}(\varphi* + v)/\eta_{\nu,x}(\varphi*)$ lorsque v parcourt un intervalle convenable centré à l'origine. Posons, pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\tau_j = \tau_{\nu,j} := \frac{R_\nu^{(j)}(\varphi*)}{j!}, \qquad K_j := \frac{\kappa^{(j)}(\varphi*)}{j!}, \qquad \Lambda_{\ell,j} := \frac{1}{j!}\left[\frac{\mathrm{d}^j \log \mathfrak{s}_{\nu;\ell}(v)}{\mathrm{d}v^j}\right]_{v=\varphi*}, \tag{5.7}$$

de sorte que trois développements de Taylor successifs à l'ordre $2M + 3$ fournissent, pour v borné,

$$\frac{\varrho_\nu(\varphi* + v)}{\varrho_\nu(\varphi*)} = \Big\{1 + O\Big(v^{2M+3}\Big)\Big\} \exp\Big\{ \sum_{1\leqslant j\leqslant 2M+2} \tau_j v^j \Big\}, \tag{5.8}$$

$$\kappa(\varphi* + v) - \kappa(\varphi*) = \sum_{1\leqslant j\leqslant 2M+2} K_j v^j + O\Big(v^{2M+3}\Big), \tag{5.9}$$

$$\frac{\mathfrak{s}_{\nu;\ell}(\varphi* + v)}{\mathfrak{s}_{\nu;\ell}(\varphi*)} = \Big\{1 + O\Big(v^{2M+3}\Big)\Big\} \exp\Big\{ \sum_{1\leqslant j\leqslant 2M+2} \Lambda_{\ell,j} v^j \Big\}. \tag{5.10}$$

Remarquons que $K_2 = -\frac{5\sqrt{5}}{4}$ et définissons

$$v_x := \sqrt{\frac{(M+1)\log_3 x}{|K_2|\log_2 x}} \qquad (x \geqslant 16).$$

Les estimations (5.8), (5.9) et (5.10) impliquent, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $|v| \leqslant v_x$,

$$\frac{\eta_{\nu,x,\ell}(\varphi * + v)}{\eta_{\nu,x,\ell}(\varphi *)} = \Big\{1 + O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\Big\} \exp\bigg(\sum_{1\leqslant j\leqslant 2M+2} \{\tau_j + \Lambda_{\ell,j} + K_j \log_2 x\} v^j\bigg)\cdot \tag{5.11}$$

Considérons les intervalles

$$V := [\tfrac{3}{5} - \varphi *, \tfrac{16}{17} - \varphi *], \qquad V_{1,x} := [-v_x, v_x] \quad (x \geqslant 3), \qquad V_{2,x} := V \smallsetminus V_{1,x} \quad (x \geqslant 3).$$

En développant en série le membre de droite de (5.11), nous obtenons l'existence, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, d'une suite réelle $\{y_{\nu,x,\ell;j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\int_{V_{1,x}} \frac{\eta_{\nu,x,\ell}(\varphi * + v)}{\eta_{\nu,x,\ell}(\varphi *)} \,\mathrm{d}v = \Big\{1 + O\Big(\varepsilon_x^{M+1}\Big)\Big\} \int_{V_{1,x}} \mathrm{e}^{-|K_2| v^2 \log_2 x} \bigg\{\sum_{0\leqslant j\leqslant M} y_{\nu,x,\ell;j} v^{2j}\bigg\} \,\mathrm{d}v, \tag{5.12}$$

où nous avons une nouvelle fois utilisé le fait que, par symétrie du domaine d'intégration, la contribution des termes impairs est nulle. Posons, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{I}_j(x) := \int_{V_{1,x}} v^{2j}\, \mathrm{e}^{-|K_2| v^2 \log_2 x} \,\mathrm{d}v = \frac{\Gamma(j+\frac12)\varepsilon_x^{j+\frac12}}{|K_2|^{j+\frac12}} \Big\{1 + O\Big(\varepsilon_x^{M+\frac32}\Big)\Big\} \quad (x \geqslant 3). \tag{5.13}$$

En intervertissant somme et intégrale dans le membre de droite de (5.12), nous obtenons, pour $\ell \in \mathbb{N}$, d'une part

$$\int_{V_{1,x}} \frac{\eta_{\nu,x,\ell}(\varphi * + v)}{\eta_{\nu,x,\ell}(\varphi *)} \,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{\pi}{|K_2| \log_2 x}} + \sum_{1\leqslant j\leqslant M} y_{\nu,x,\ell;j} \mathfrak{I}_j(x) + O\Big(\varepsilon_x^{M+\frac32}\Big), \tag{5.14}$$

et d'autre part,

$$\int_{V_{2,x}} \frac{\eta_{\nu,x,\ell}(\varphi * + v)}{\eta_{\nu,x,\ell}(\varphi *)} \,\mathrm{d}v \ll \varepsilon_x^{M+\frac32}. \tag{5.15}$$

De plus, au vu des définitions (5.6), nous pouvons écrire

$$\int_V \eta_{\nu,x}(\varphi * + v) \,\mathrm{d}v = \sum_{0\leqslant \ell\leqslant M} \eta_{\nu,x,\ell}(\varphi *) \varepsilon_x^\ell \int_V \frac{\eta_{\nu,x,\ell}(\varphi * + v)}{\eta_{\nu,x,\ell}(\varphi *)} \,\mathrm{d}v,$$

de sorte qu'en réarrangeant les termes selon les puissances croissantes de ε_x, et en remarquant que

$$\varrho_\nu(\varphi *) \sqrt{\frac{\pi}{|K_2|}} = \frac{\varphi\, \mathrm{e}^{-\gamma}\, \mathcal{H}_\nu(\varphi - 1)}{\sqrt{5}\, \Gamma(1+\varphi)} =: A_{\nu,\iota}, \tag{5.16}$$

nous obtenons, au vu de (5.14) et (5.15), l'existence d'une suite réelle $\{\mathfrak{a}_{\nu,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$S_{\nu,\iota}(x) = A_{\nu,\iota} x (\log x)^{1/\varphi} \bigg\{1 + \sum_{1\leqslant m\leqslant M} \frac{\mathfrak{a}_{\nu,m}}{(\log_2 x)^m} + O\bigg(\frac{1}{(\log_2 x)^{M+1}}\bigg)\bigg\} \qquad (x \geqslant 3). \tag{5.17}$$

En particulier, pour $M = 1$, posons

$$E(x) := \{\tfrac12 \tau_1^2 + \tau_2\}\, \mathfrak{I}_1(x) + \{\tau_1 K_3 + K_4\}\, \mathfrak{I}_2(x) \log_2 x + \tfrac12 K_3^2\, \mathfrak{I}_3(x) (\log_2 x)^2 \qquad (x \geqslant 3),$$

de sorte que

$$(5.18)\quad \begin{aligned}\int_{V_{1,x}} \frac{\eta_{\nu,x,0}(\varphi*+v)}{\eta_{\nu,x,0}(\varphi*)}\,\mathrm{d}v &= \big\{1+O\big(\varepsilon_x^2\big)\big\}\bigg(\int_{V_{1,x}} \mathrm{e}^{-|K_2|v^2\log_2 x}\,\mathrm{d}v + E(x) + O\big(\varepsilon_x^{5/2}\big)\bigg)\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{|K_2|\log_2 x}}\Big\{1+\Big(\tfrac{\tau_1^2/2+\tau_2}{2|K_2|}+\tfrac{3\{\tau_1K_3+K_4\}}{4|K_2|^2}+\tfrac{15K_3^2}{16|K_2|^3}\Big)\varepsilon_x + O\big(\varepsilon_x^2\big)\Big\}.\end{aligned}$$

De manière analogue,

$$(5.19)\quad \int_{V_{1,x}} \frac{\eta_{\nu,x,1}(\varphi*+v)}{\eta_{\nu,x,1}(\varphi*)}\,\mathrm{d}v = \{1+O(\varepsilon_x)\}\sqrt{\frac{\pi}{|K_2|\log_2 x}}.$$

Un rapide calcul fournit $K_3 := -\frac{25}{8}$ et $K_4 := -\frac{225\sqrt5}{64}$. Il résulte donc de (5.5), (5.11), (5.15), (5.18) et (5.19) que

$$(5.20)\quad \begin{aligned}\int_V \eta_{\nu,x}(\varphi*+v)\,\mathrm{d}v = \eta_{\nu,x,0}(\varphi*)\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_x}{|K_2|}}\Big\{1+\big(\tfrac{\tau_1^2/2+\tau_2}{2|K_2|}+\tfrac{3\{\tau_1K_3+K_4\}}{4|K_2|^2}+\tfrac{15K_3^2}{16|K_2|^3}\big)\varepsilon_x+O\big(\varepsilon_x^2\big)\Big\}&\\ + \eta_{\nu,x,1}(\varphi*)\varepsilon_x\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_x}{|K_2|}}\{1+O(\varepsilon_x)\}+O(\varepsilon_x^{5/2}),&\end{aligned}$$

puis que

$$\mathfrak{a}_{\nu,1} = \mathfrak{s}_{\nu;1}(\varphi*) - \tfrac{3\sqrt5}{20} - \tfrac{3}{10}R_\nu'(\varphi*) + \tfrac{\sqrt5}{25}\{R_\nu'(\varphi*)^2 + R_\nu''(\varphi*)\}.$$

Concernant la somme complémentaire $S_{\nu,\pi}(x)$, l'ensemble des estimations obtenues reste valable et, en remplaçant $\varrho_\nu(\varphi*)$ par $\varrho_\nu^+(\varphi*)$ dans (5.16), nous obtenons, à partir de (4.38), un développement de $S_{\nu,\pi}(x)$ sous la forme

$$(5.21)\quad S_{\nu,\pi}(x) = \tfrac{1}{\varphi}A_{\nu,\iota}x(\log x)^{1/\varphi}\bigg\{1+\sum_{1\leqslant m\leqslant M}\frac{\mathfrak{a}_{\nu,m}^+}{(\log_2 x)^m} + O\bigg(\frac{1}{(\log_2 x)^{M+1}}\bigg)\bigg\}\qquad(x\geqslant 3),$$

de sorte qu'en sommant (5.17) et (5.21), l'estimation (1.3) s'ensuit en posant, pour $m\in\mathbb{N}$,

$$\mathfrak{c}_{\nu,m} := \tfrac{1}{\varphi+1}\{\varphi\,\mathfrak{a}_{\nu,m}+\mathfrak{a}_{\nu,m}^+\}.$$

Enfin, dans le cas $M=1$, au vu de la définition de ϱ_ν^+ en (4.37), nous avons

$$R_\nu'^+(\varphi*) = R_\nu'(\varphi*) - \tfrac52,\qquad R_\nu''^+(\varphi*) = R_\nu''(\varphi*) - \tfrac{5\sqrt5}{2},$$

de sorte que

$$\mathfrak{a}_{\nu,1}^+ = \mathfrak{a}_{\nu,1} + \tfrac{\varphi}{2} - \tfrac{\sqrt5}{5}R_\nu'(\varphi*) + \tfrac{\sqrt5}{4}\{2j_{\nu,1}(\varphi-1)+1\}.$$

Nous obtenons ainsi l'estimation analogue

$$(5.22)\quad S_{\nu,\pi}(x) = \tfrac{1}{\varphi}A_{\nu,\iota}x(\log x)^{1/\varphi}\big\{1+\mathfrak{a}_{\nu;1}^+\,\varepsilon_x + O\big(\varepsilon_x^2\big)\big\}\quad(x\geqslant 3).$$

Il vient alors

$$(5.23)\quad \begin{aligned}\mathfrak{c}_{\nu,1} &= \tfrac{1}{\varphi+1}\{\varphi\,\mathfrak{a}_{\nu,1}+\mathfrak{a}_{\nu,1}^+\}\\ &= \mathfrak{s}_{\nu;1}(\varphi*) + \tfrac{19\sqrt5-35}{40} - \tfrac{2-3\sqrt5}{10}R_\nu'(\varphi*) + \tfrac{\sqrt5}{25}\{R_\nu'(\varphi*)^2+R_\nu''(\varphi*)\} + \tfrac{3\sqrt5-5}{4}j_{\nu,1}(\varphi-1).\end{aligned}$$

Cela termine la démonstration. □

Remerciements. L'auteur tient à remercier chaleureusement le professeur Gérald Tenenbaum pour l'ensemble de ses conseils et remarques avisés ainsi que pour ses relectures attentives durant la réalisation de ce travail.

Bibliographie

[1] K. Alladi, The distribution of $\nu(n)$ in the sieve of Eratosthenes, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **33** (1982), no. 130, 129-148. MR657120.

[2] N. McNew, P. Pollack & A. Singha Roy, The distribution of intermediate prime factors, *Illinois J. Math.* 68 (3) 537-576, September 2024.

[3] P. Erdős & G. Tenenbaum, Sur les densités de certaines suites d'entiers, *Proc. London Math. Soc.* (3) 59 (1989) 417-438.

[4] R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors,* Cambridge Tracts in Mathematics 90, Cambridge University Press, Cambridge (1988)

[5] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On a class of differential-difference equations arising in number theory, *J. Anal. Math.* **61** (1993), 145–179.

[6] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres,* 5ème édition, Dunod, 2022.

[7] G. Tenenbaum, A. Weingartner, An Erdős-Kac theorem for integers with dense divisors, *Quart. J. Math. Oxford* **75**, n°1 (2024), 161-195.

[8] G. Tenenbaum & J. Wu (coll.), *Théorie analytique et probabiliste des nombres : 313 exercices corrigés,* Le Voile des mots, 2024.

[9] G. Tenenbaum, communication personnelle, juillet 2024.