Forcing, réalisabilité classique, propriétés de préservation

Hadrien Batmalle

IRIF, Paris 7

18 septembre 2019

1. Introduction
2. Modèles de réalisabilité classique
3. Négation de CH

Motivation

La **réalisabilité classique** permet de produire de nouveaux **modèles de** ZF à partir de structures décrivant un modèle de **calcul**.

Motivation

La **réalisabilité classique** permet de produire de nouveaux **modèles de ZF** à partir de structures décrivant un modèle de **calcul**.
Avant son apparition, on avait essentiellement deux méthodes pour construire un nouveau modèle de ZF à partir d'un modèle de départ $(\mathcal{M}, \in)$:

1. Les **modèles intérieurs** : restrictions $(\mathcal{M}', \in\restriction_{\mathcal{M}'})$ du modèle de départ.
   - Le «plus petit» de ces modèles, l'univers constructible L, valide CH.
2. Le **forcing** : on cherche à ajouter à $\mathcal{M}$ un nouvel ensemble, approché par un ensemble de **conditions** $(P, \leqslant)$ dans $\mathcal{M}$. On définit hors de $\mathcal{M}$ un **filtre** (générique) sur P, ce qui génère un modèle étendu $\mathcal{M}[G]$.

Motivation

La **réalisabilité classique** permet de produire de nouveaux **modèles de ZF** à partir de structures décrivant un modèle de **calcul**.

Avant son apparition, on avait essentiellement deux méthodes pour construire un nouveau modèle de ZF à partir d'un modèle de départ $(\mathcal{M}, \in)$:

1. Les **modèles intérieurs** : restrictions $(\mathcal{M}', \in\restriction_{\mathcal{M}'})$ du modèle de départ.
   - Le «plus petit» de ces modèles, l'univers constructible L, valide CH.
2. Le **forcing** : on cherche à ajouter à $\mathcal{M}$ un nouvel ensemble, approché par un ensemble de **conditions** $(P, \leqslant)$ dans $\mathcal{M}$. On définit hors de $\mathcal{M}$ un **filtre** (générique) sur P, ce qui génère un modèle étendu $\mathcal{M}[G]$.

La réalisabilité classique **généralise** cette dernière méthode.

Motivation

- La construction de forcing dépend d'une structure algébrique : l'ensemble ordonné des **conditions**.

Motivation

- La construction de forcing dépend d'une structure algébrique : l'ensemble ordonné des **conditions**.
- De façon analogue, la construction de réalisabilité dépend d'une **algèbre de réalisabilité**.
  - Structure considérablement plus riche.
  - **Interpréte un calcul.**

Motivation

- La construction de forcing dépend d'une structure algébrique : l'ensemble ordonné des **conditions**.
- De façon analogue, la construction de réalisabilité dépend d'une **algèbre de réalisabilité**.
  - Structure considérablement plus riche.
  - **Interpréte un calcul.**
- En forcing comme en réalisabilité, on peut établir des critères sur la structure algébrique qui induisent des **propriétés de préservation.**

Motivation

- La construction de forcing dépend d'une structure algébrique : l'ensemble ordonné des **conditions**.
- De façon analogue, la construction de réalisabilité dépend d'une **algèbre de réalisabilité**.
    - Structure considérablement plus riche.
    - **Interpréte un calcul.**
- En forcing comme en réalisabilité, on peut établir des critères sur la structure algébrique qui induisent des **propriétés de préservation.**
- De plus en réalisabilité classique, ces critères ont une interprétation informatique.

Propriétés de préservation (exemple)

- Un ensemble de conditions a la **condition de chaîne descendante** lorsque toute (ω-)suite décroissante de conditions admet un infimum.
- Un modèle de forcing issu d'un tel ensemble de conditions n'ajoute pas de nouvelle suite d'éléments du modèle de départ (et donc **les réels sont préservés**)

Propriétés de préservation (exemple)

- Un ensemble de conditions a la **condition de chaîne descendante** lorsque toute (ω-)suite décroissante de conditions admet un infimum.
- Un modèle de forcing issu d'un tel ensemble de conditions n'ajoute pas de nouvelle suite d'éléments du modèle de départ (et donc **les réels sont préservés**)
- Il existe un analogue de cette condition en réalisabilité classique, qui correspond à une **propriété de continuité** du modèle de calcul permettant d'utiliser la **bar-récursion**.

Propriétés de préservation (utilité)

- En réalisabilité classique, les propriétés de préservation acquièrent une utilité supplémentaire par rapport au forcing : elles donnent une **interprétation calculatoire** aux énoncés préservés du modèle de départ.

Propriétés de préservation (utilité)

- En réalisabilité classique, les propriétés de préservation acquièrent une utilité supplémentaire par rapport au forcing : elles donnent une **interprétation calculatoire** aux énoncés préservés du modèle de départ.
- Exemple avec la bar-récursion : pour toute formule de l'analyse vraie dans le modèle de départ, on obtient un programme qui l'interprète

Propriétés de préservation (utilité)

- En réalisabilité classique, les propriétés de préservation acquièrent une utilité supplémentaire par rapport au forcing : elles donnent une **interprétation calculatoire** aux énoncés préservés du modèle de départ.
- Exemple avec la bar-récursion : pour toute formule de l'analyse vraie dans le modèle de départ, on obtient un programme qui l'interprète mais qui en réalité n'est pas satisfaisant

Cet exposé

Jusqu'ici, la réalisabilité classique a toujours été étudiée à partir d'un **modèle de départ** «raisonnable» :

1. à partir d'un modèle supposé valider AC,
2. voire même à partir de L.

Ici, on s'intéresse de plus près au **choix du modèle de départ** et on exploite une technique permettant d'exporter des propriétés particulières de ce modèle dans le modèle de réalisabilité.
Quelques exemples d'applications :

1. réaliser $\neg$DC (à partir de certains modèles ambiants vérifiant $\neg$DC)
2. à partir d'un modèle ambiant vérifiant $\neg$CH, réaliser $\neg$CH
3. une mème algèbre de réalisabilité peut réaliser des énoncés différents (et même incompatibles) selon le modèle de départ dans lequel on l'étudie. D'où des interprétations calculatoires différentes.

Propriétés des modèles de réalisabilité classique (rappels)

À partir d'un modèle de départ $\mathcal{M}$, on obtient $\mathcal{N}$ un modèle de ZF_ε, **modèle booléen** sur $\daleth 2$.

- $\mathcal{N}$ est une **extension élémentaire** de $\mathcal{M}$ ($\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$)
- Mais, dans les cas intéressants, $\mathcal{N}$ n'est pas bien fondé.
- Tout ultrafiltre $\mathcal{F}$ sur $\daleth 2$ engendre un modèle de Tarski $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \succ \mathcal{M}$.
- **De plus, il existe un ultrafiltre** $\mathcal{D}$ tel que $\mathcal{M}_D$ est **bien fondé**.
- En particulier, $\mathcal{M}_D$ est un **modèle intérieur** de $\mathcal{N}_\in$ (le modèle de ZF associé à $\mathcal{N}$)

Exemple : modèles continus de réalisabilité classique

- On considère une algèbre de réalisabilité vérifiant la **propriété de continuité** suivante :
  Si $(\xi_i)_{i\in\mathbf{N}} \in \Lambda^{\mathbf{N}}$, *il existe* $\phi \in \Lambda$ *tel que :*
  1. $\phi \underline{i} \succ \xi_i$ *pour tout* $i \in \mathbf{N}$
  2. *pour tout* $U \in \Lambda$ *tel que* $U\phi \Vdash \perp$, *il existe* $k \in \mathbf{N}$ *tel que, si* $\psi \in \Lambda$ *est tel que* $\psi \underline{i} \succ \xi_i$ *pour tout* $i < k$, *alors* $U\psi \Vdash \perp$.
- **Exemple :** toute algèbre de réalisabilité issue de la sémantique dénotationnelle.
- **Autre exemple :** l'algèbre BBC.
  - Λ contient les termes de BBC_0 ainsi qu'une constante $L(\tau)$ pour chaque suite $\tau = (t_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de termes.
  - Nouvelle règle d'évaluation : $L(t_i)_{i\in\mathbf{N}} \star \underline{n} \cdot \pi \succ t_n \star \pi$.

Exemple : modèles continus de réalisabilité classique

Un tel modèle de réalisabilité est tel qu'il existe un terme BR (terme de **bar-récursion**) qui réalise l'axiome du **choix dénombrable**, et même celui du **choix dépendant**. (Krivine 2016 d'après Spector, Berardi-Bezem-Coquand, Berger-Oliva, Streicher, etc. . .)

Exemple : modèles continus de réalisabilité classique

Dans le λ-calcul, la bar-récursion est définie comme
$\mathrm{BR} = \lambda g.\lambda u.\Psi g u \underline{0}$ avec :

$$\chi = \lambda k.\lambda f.\lambda z.\lambda i.\texttt{if } i < k \texttt{ then } fi \texttt{ else } z$$
$$\Psi GUkf = (U)(\chi kf)(G)\lambda z.(\Psi GUk^{+})(\chi)kfz$$
$$(k^{+} \text{ est le successeur de l'entier } k)$$

(ΨGU calcule sa valeur sur une suite χkf de longueur k à partir de ses valeurs sur les prolongements de longueur $k+1$ de cette suite.)

Exemple : modèles continus de réalisabilité classique

- **Mieux** (Krivine 2016), le choix dénombrable est réalisé sous cette forme :

$$\forall n^{\daleth \mathbf{N}}.\exists x^{\daleth X}.F[n,x] \to \exists f^{\daleth (X^{\mathbf{N}})}.\forall n^{\mathrm{int}}.F[n,f(n)]$$

- Or (Krivine 2016) on a dans tout modèle $\daleth(X^{\mathbf{N}}) \sqsubseteq \daleth X^{\daleth \mathbf{N}}$ (Krivine 2016a), et donc si $f \varepsilon \daleth(X^{\mathbf{N}})$, alors f définit une fonction $\mathbf{N} \to \daleth X$.
- Avec la bar-récursion, on a la réciprique : les restrictions à $\mathbf{N}$ des $f \varepsilon \daleth(X^{\mathbf{N}})$ sont exactement les fonctions $\mathbf{N} \to \daleth X$.

Exemple : modèles continus de réalisabilité classique

- **Corollaire** (avec $X = 2$) : les réels de $\mathcal{N}$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$.
- D'où : **toute formule de l'analyse vraie dans le modèle de départ est réalisable**.
- D'où aussi : si $\mathcal{M} \models V = L$ alors les réels de $\mathcal{N}$ sont dans $\mathcal{L}^{\mathcal{N}}$ et en particulier $\mathcal{N} \Vdash \mathrm{CH}$.

Exemple : modèles continus de réalisabilité classique

- **Remarque :** le raisonnement précédent limité au cas du forcing donne :
  La bar-récursion n'ajoute pas de nouvelle suite d'éléments du modèle de départ, et donc les réels sont préservés.
- On reconnaît la conséquence de la condition de chaîne descendante, **qui correspond justement à** une version faible (mais suffisante pour la bar-récursion) de **la propriété de continuité**.
  - Réalisabilité classique
    Si on a $(\xi_i)_{i\in\mathbf{N}} \in \Lambda^{\mathbf{N}}$ *et* $U \in \Lambda$ *tels que*
    $\forall k \in \mathbf{N}.\exists\psi \in \Lambda.U\psi \not\Vdash \bot \wedge \forall i < k.\psi\underline{i} \succ \xi_i$,
    alors il existe $\phi \in \Lambda$ *tel que* $U\phi \not\Vdash \bot$ *et* $\forall i \in \mathbf{N}.\phi\underline{i} \succ \xi_i$.
  - Forcing
    Si on a $(\xi_i)_{i\in\mathbf{N}} \in P^{\mathbf{N}}$ *et* $U \in P$ *tels que*
    $\forall k \in \mathbf{N}.\exists\psi \in P.\forall i < k.\psi < \xi_i$,
    alors il existe $\phi \in P$ *tel que* $\forall i \in \mathbf{N}.\phi < \xi_i$.

Négation de CH

- À partir d'un modèle ambiant validant $\neg$CH, on va construire un modèle **de réalisabilité** réalisant $\neg$CH.

Négation de CH

- À partir d'un modèle ambiant validant $\neg$CH, on va construire un modèle **de réalisabilité** réalisant $\neg$CH.
- On obtient alors un programme pour $\neg$CH.

Négation de CH

- À partir d'un modèle ambiant validant $\neg$CH, on va construire un modèle **de réalisabilité** réalisant $\neg$CH.
- On obtient alors un programme pour $\neg$CH.
- Analogie avec des propriétés de préservation de cardinaux en forcing (slide suivant).

Négation de CH

- À partir d'un modèle ambiant validant $\neg$CH, on va construire un modèle **de réalisabilité** réalisant $\neg$CH.
- On obtient alors un programme pour $\neg$CH.
- Analogie avec des propriétés de préservation de cardinaux en forcing (slide suivant).
- On peut utiliser la même technique pour réaliser $\neg$DC.

Négation de CH par forcing (rappel)

- On souhaite valider $\neg\mathrm{CH}$, par exemple en ajoutant une injection $\aleph_2 \hookrightarrow 2^{\mathbf{N}}$.

Négation de CH par forcing (rappel)

- On souhaite valider $\neg$CH, par exemple en ajoutant une injection $\aleph_2 \hookrightarrow 2^{\mathbf{N}}$.
- L'espace des fonctions $\aleph_2 \to 2^{\mathbf{N}}$ étant isomorphe à $\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2$, on définit l'ensemble de conditions $(P, \leqslant) = (\mathrm{Fin}(\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2), \supseteq)$.

Négation de CH par forcing (rappel)

- On souhaite valider $\neg$CH, par exemple en ajoutant une injection $\aleph_2 \hookrightarrow 2^{\mathbf{N}}$.
- L'espace des fonctions $\aleph_2 \to 2^{\mathbf{N}}$ étant isomorphe à $\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2$, on définit l'ensemble de conditions $(P, \leqslant) = (\mathrm{Fin}(\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2), \supseteq)$.
- Soit G un **filtre générique** sur $(P, \leqslant)$

Négation de CH par forcing (rappel)

- On souhaite valider $\neg$CH, par exemple en ajoutant une injection $\aleph_2 \hookrightarrow 2^{\mathbf{N}}$.
- L'espace des fonctions $\aleph_2 \to 2^{\mathbf{N}}$ étant isomorphe à $\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2$, on définit l'ensemble de conditions $(P, \leqslant) = (\mathrm{Fin}(\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2), \supseteq)$.
- Soit G un **filtre générique** sur $(P, \leqslant)$
- Par généricité, la limite $\bigcup G : \aleph_2 \times \mathbf{N} \rightharpoonup 2$ est une fonction totale $\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2$, qui de plus correspond à une injection $\aleph_2 \hookrightarrow 2^{\mathbf{N}}$.

Négation de CH par forcing (rappel)

- On souhaite valider $\neg\mathrm{CH}$, par exemple en ajoutant une injection $\aleph_2 \hookrightarrow 2^{\mathbf{N}}$.
- L'espace des fonctions $\aleph_2 \to 2^{\mathbf{N}}$ étant isomorphe à $\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2$, on définit l'ensemble de conditions $(P, \leqslant) = (\mathrm{Fin}(\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2), \supseteq)$.
- Soit G un **filtre générique** sur $(P, \leqslant)$
- Par généricité, la limite $\bigcup G : \aleph_2 \times \mathbf{N} \rightharpoonup 2$ est une fonction totale $\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2$, qui de plus correspond à une injection $\aleph_2 \hookrightarrow 2^{\mathbf{N}}$.
- **Étape cruciale :** on doit s'assurer que le modèle de forcing n'a pas introduit de nouvelles bijections $\aleph_0 \cong \aleph_1$, $\aleph_1 \cong \aleph_2$ (**collapse de cardinaux**).

Négation de CH par forcing (rappel)

- On souhaite valider $\neg$CH, par exemple en ajoutant une injection $\aleph_2 \hookrightarrow 2^{\mathbf{N}}$.
- L'espace des fonctions $\aleph_2 \to 2^{\mathbf{N}}$ étant isomorphe à $\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2$, on définit l'ensemble de conditions $(P, \leqslant) = (\mathrm{Fin}(\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2), \supseteq)$.
- Soit G un **filtre générique** sur $(P, \leqslant)$
- Par généricité, la limite $\bigcup G : \aleph_2 \times \mathbf{N} \rightharpoonup 2$ est une fonction totale $\aleph_2 \times \mathbf{N} \to 2$, qui de plus correspond à une injection $\aleph_2 \hookrightarrow 2^{\mathbf{N}}$.
- **Étape cruciale :** on doit s'assurer que le modèle de forcing n'a pas introduit de nouvelles bijections $\aleph_0 \cong \aleph_1$, $\aleph_1 \cong \aleph_2$ (**collapse de cardinaux**).
- Pour cela on utilise une propriété de cette structure particulière de forcing : la **condition de chaîne dénombrable** (toute antichaîne est dénombrable) qui implique qu'il n'y a pas de collapse de cardinaux.

Négation de CH

À partir d'un modèle ambiant vérifiant $\neg$CH, on veut construire un modèle de réalisabilité vérifiant $\neg$CH

Problème

Trouver un critère pour qu'il n'y ait pas de collapse de cardinaux dans le modèle de réalisabilité.

Négation de CH

Théorème

On suppose que, dans $\mathcal{M}$, il n'y a pas de surjection de $X \times \Lambda^2$ dans Y. Alors, dans $\mathcal{N}$, il n'y a pas de surjection de $\beth X$ dans Y.

Négation de CH

Lemme

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de ZF, et, dans $\mathcal{M}$, une algèbre de réalisabilité $\mathcal{A}$. Soit Λ l'ensemble des termes de $\mathcal{A}$, Π l'ensemble des piles, $\mathcal{N}$ le modèle de réalisabilité issu de A et $\mathcal{D}$ l'ultrafiltre canonique de $\daleth 2$ sur $\mathcal{N}$. Soient (dans $\mathcal{M}$) X, Y des ensembles.

1. *Soit $R \subseteq X \times Y \times \Pi$ dans $\mathcal{M}$. Si $\theta \in \Lambda$ est tel que*

$$\theta \Vdash \forall x^{\daleth X}.\forall {y_1}^{\daleth Y}.\forall {y_2}^{\daleth Y}.[Rxy_1, Rxy_2 \to \mathcal{D}(\langle y_1 = y_2 \rangle)] \qquad (1)$$

alors la relation (dans $\mathcal{M}$) $\phi_{R,\theta} \subseteq X \times \Lambda \times Y$, définie par

$$\phi_{R,\theta}(x, \xi, y) \iff \xi \Vdash Rxy \wedge \theta\xi\xi \not\Vdash \mathcal{D}(0),$$

est fonctionnelle.

Lemme (suite)

2. *Soit $F(x, y, R)$ une formule de* ZF *telle que (dans $\mathcal{M}$) : pour tout $\theta \in \Lambda$ tel que* (1) *et $\xi \in \Lambda$, si $y = \phi_{R,\theta}(x, \xi)$, alors $F(x, y, R)$. On a alors :*

$$\mathsf{W}\theta \Vdash \forall x^{\daleth X}.\forall y^{\daleth Y}.[Rxy \to \mathcal{D}(\langle F(x, y, R)\rangle)].$$

Remarque. La propriété réalisée par θ exprime que la relation R (dans $\mathcal{N}$) est fonctionnelle $\daleth X \to Y$, où Y est considéré dans $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$.

Démonstration du lemme.

1. Si $\xi \Vdash Rxy_1$, $\xi \Vdash Rxy_2$ et $y_1 \neq y_2$, alors $\theta\xi\xi \Vdash \mathcal{D}(0)$. On ne peut alors avoir $\phi_{R,\theta}(x,\xi,y)$.
2. On a d'abord, pour tout $\theta \in \Lambda$ tel que (1), si $\xi \Vdash Rxy$, alors $\theta\xi\xi \Vdash D(1)$; d'où $\mathrm{W}\theta \Vdash \forall x^{\daleth X}.\forall y^{\daleth Y}.[Rxy \to \mathcal{D}(1)]$. Soit maintenant $(x,y) \in X \times Y$.
   Si $\mathcal{M} \models F(x,y,R)$ alors $\langle F(x,y,R)\rangle = 1$ et pour tout $\theta \in \Lambda$ tel que (1), $\mathrm{W}\theta \Vdash Rxy \to \mathcal{D}(\langle F(x,y,R)\rangle)$.
   Sinon, pour tout $\theta \in \Lambda$ tel que (1) et $\xi \in \Lambda$, on a $y \neq \phi_{R,\theta}(x,\xi)$, donc, si $\xi \Vdash Rxy$, alors $\theta\xi\xi \Vdash D(0)$. On a donc $\mathrm{W}\theta \Vdash Rxy \to \mathcal{D}(0)$ avec $\langle F(x,y,R)\rangle = 0$.

$\square$

Négation de CH

Démonstration du théorème.

- Si $R \subseteq X \times Y \times \Pi$ (dans $\mathcal{M}$), on définit une relation $\phi_R \subseteq X \times \Lambda^2 \times Y$ par : $\phi_R(x, \theta, \xi, y)$ si et seulement si

  $$\phi_{R,\theta}(x, \xi, y) \wedge \theta \Vdash \forall x^{\gimel X}.\forall y_1^{\gimel Y}.\forall y_2^{\gimel Y}.[Rxy_1, Rxy_2 \to \mathcal{D}(\langle y_1 = y_2 \rangle)]$$

  où $\phi_{R,\theta}$ est défini comme dans le lemme.
- ϕ_R est fonctionnelle de $X \times \Lambda^2$ dans Y, donc n'est pas surjective par hypothèse sur le modèle. On a donc, pour $x \in X$ et $\xi \in \Lambda$:

  $$y = \phi_{R,\theta}(x, \xi) \implies y \in \Phi(R) \text{ et } Y \setminus \Phi(R) \neq \emptyset.$$

  où $\Phi(R) = \{y \in Y \mid \exists (x, \xi, \theta) \in X \times \Lambda^2 . y = \phi_R(x, \theta, \xi)\}$ (image de R)

Négation de CH

Démonstration du théorème (suite).

- On applique le lemme avec
  $F(x, y, R) \equiv$ "$y \in \Phi(R)$ et $Y \setminus \Phi(R) \neq \emptyset$".

$$\mathsf{W} \Vdash \forall R.(\forall x^{\daleth X}.\forall {y_1}^{\daleth Y}.\forall {y_2}^{\daleth Y}.[Rxy_1, Rxy_2 \to \mathcal{D}(\langle y_1 = y_2 \rangle)] \to \forall x^{\daleth X}.\forall y^{\daleth Y}.[Rxy \to \mathcal{D}(\langle y \in \Phi(R) \text{ et } Y \setminus \Phi(R) \neq \emptyset \rangle)]).$$

  Cela signifie que dans $\mathcal{N}$, il n'y a pas de surjection de $\daleth X$ dans Y.

$\square$