Analyse/Mesure/Probabilités dans le M1

April 7, 2017

Certains points annexes, applications, approfondissements et certaines démonstrations longues ou techniques seraient laissées aux étudiants en travail personnel sous forme d'un séminaire étudiants (dans lequel un groupe d'étudiant présenterait devant la classe un travail encadré par l'enseignant) ou éventuellement de devoir maison. Ces points sont mis en italique dans le programme qui suit.

1 Semestre 1

Au minimum 96 HETD par UE

1.1 Analyse fonctionnelle et analyse de Fourier

Ce cours a deux objectifs principaux. Le premier objectif est que les étudiants maîtrisent les notions fondamentales (complétude, compacité, densité, dualité) et les théorèmes basiques d'analyse fonctionnelle avec comme fil conducteur l'étude de deux espaces importants (et au coeur du programme de l'agrégation) : les espaces L^p/l^p et l'espace des fonctions continues bornées. Le deuxième objectif est d'introduire l'analyse de Fourier ainsi que les résultats principaux associés à la transformée de Fourier et aux séries de Fourier (au passage on fera de la théorie hilbertienne basique pour pouvoir insister sur l'aspect hilbertien de l'analyse de Fourier).

Proposition de programme détaillé :

- Topologie des espaces métriques (compacité, complétude). Théorème de Riesz (compacité de la boule et dimension finie).
  Espaces de Banach : résultats généraux (une série absolument convergente est convergente, théorème du point fixe contractant : applications au théorème d'inversion locale...).
  Théorèmes de Baire, de Banach-Steinhaus.

- Fonctions continues bornées sur un espace métrique (insister sur le cas d'un compact de $\mathbb{R}^d$), applications du théorème du point fixe contractant : Cauchy-Lipschitz.... *Compacité dans $\mathcal{C}([0,1])$, familles équicontinues, théorème d'Ascoli (applications : théorème de Cauchy-Peano)*. Densité : théorème de Weierstrass.

- Espaces de Hilbert. Projection sur un convexe fermé. Théorème de représentation de Riesz. Dual, exemples : L^2 et l^2. Bases hilbertiennes, exemples (*polynômes orthogonaux*).

- Séries de Fourier : L^2, Plancherel et Parseval, théorèmes de Dirichlet et Féjer (*preuve du théorème de Dirichlet*), lemme de Riemann-Lebesgue, *exemples de calculs et d'applications.* Régularité et décroissance des coefficients de Fourier.

- Espaces L^p et l^p : complétude (théorème de Riesz). Dual des l^p. Suites régularisantes, densité des fonctions C^∞ à support compact.
- Transformée de Fourier L^1, lemme de Riemann-Lebesgue, théorème d'inversion. Transformée de Fourier L^2.
- *Parties convexes, fonctions convexes.*
- *Théorème de Hahn-Banach, applications.*

1.2 Mesure-Integration-Probabilités

L'objectif est d'introduire les concepts fondamentaux de la théorie moderne des probabilités. Cette théorie est basée sur la théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue, qui seront développées durant la première moitié du cours. Une fois ces bases posées, nous introduirons les notions de variable aléatoire, de loi en probabilité, d'indépendance. L'un des buts, qui servira de fil rouge pour le déroulement du cours de probabilités, est de parvenir aux deux résulats fondamentaux relatifs aux sommes de variables indépendantes, qui sont la loi forte des grands nombres et le théorème central limite. Dans cette optique, nous introduirons des notions et des techniques spécifiques aux probabilités (lemme de Borel-Cantelli, inégalité de Markov,...) ou de nature plus analytique (convergence étroite, fonctions caractéristique,...). Les étudiants devront être capables de s'attaquer à certains problèmes guidés par une intuition probabiliste et avec des méthodes présentées tout au long du semestre.
Ce cours sera aussi l'occasion de revenir sur des résultats fondamentaux de théorie de l'intégration, qui auraient déjà été abordés en L3 dans le cadre de l'intégrale de Riemann, et qui constituent une part importante du programme de l'agrégation externe.

Proposition de programme détaillé :

- **Théorie de la mesure.**
  - Tribus, mesures.
  - Tribus engendrées, *théorème de Carathéodory.*
  - Construction de la mesure de Lebesgue.
- **Intégration de Lebesgue.**
  - Construction de l'intégrale de Lebesgue (approximation des fonctions continues par des fonctions intégrables)
  - Mesure produit, théorème de Fubini.
  - Convergence monotone, lemme de Fatou, convergence dominée.
  - *Théorème de Radon-Nikodym.*
  - *Théorème de différentiation de Lebesgue.*
  - Espaces L^p, inégalités de Hölder et de Minkowski.
- **Intégration sur** $\mathbb{R}^n$
  - Liens entre intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann.
  - Intégrales généralisées.
  - Techniques de calcul d'intégrales.
  - Interversion limite-intégrales.

  - Intégrales à paramètre, problèmes de régularité.
  - Convolution : définition, régularité d'une convolée.
  - Intégrales de fonctions à plusieurs variables, théorème de Fubini, changement de variables, coordonnées polaires,...

- **Variables aléatoires.**
  - Espaces probabilisés, variables aléatoires.
  - Lois de probabilité, moments, variance.
  - Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebytchev.
  - Exemples de lois discrètes et de lois à densité.
  - Indépendance d'événements, de variables aléatoires.
  - Somme de variables indépendantes, produit de convolution.
  - Probabilité conditionnelle.

- **Fonction génératrice, fonction caractéristique.**
  - Définitions, premières propriétés.
  - Injectivité, régularité.
  - Problème des moments.
  - Liens avec l'indépendance.
  - Vecteurs gaussiens.

- **Lois des grands nombres.**
  - Convergence p.s. en probabilité, dans L^p, liens entre ces convergences.
  - Lemmes de Borel-Cantelli.
  - Tribu asymptotique, loi du $0-1$ de Kolmogorov.
  - Lois faibles et loi forte des grands nombres.
  - *Démonstration de la loi forte des grands nombres.*

- **Théorème central limite.**
  - Convergence étroite, suites tendues.
  - Convergence en loi, critères de convergence.
  - Théorème de convergence de Levy (version simple).
  - *Version générale du théorème de Levy.*
  - Théorème central limite.
  - *Théorème de Lindeberg, théorème de Berry-Esseen.*

2 Les cours d'analyse/proba au S2

Au minimum 72 HETD par UE

2.1 Analyse complexe

L'objectif de ce cours est que les étudiants maîtrisent les notions principales sur les fonctions holomorphes, ainsi que quelques unes des nombreuses applications de cette théorie à divers domaines mathématiques. Au sortir de la licence, les étudiants devront maîtriser tout le vocabulaire des séries de fonctions, notamment les diverses notions de convergence (simple, uniforme, uniforme sur tous compacts, normale, normale sur tous compacts) et en particulier maîtriser les séries entières (calcul du rayon de convergence, lemme d'Abel, l'exponentielle complexe et les exemples usuels de fonctions développables en série entière dans le cadre complexe). Le cadre des fonctions holomorphes devient alors le cadre naturel dans lequel les séries entières sont vues comme des cas particuliers des fonctions analytiques, c'est-à-dire des fonctions développables en série entière au voisinage de tout point du domaine d'analyticité de ces fonctions.

Proposition de programme détaillé :

- **Fonctions holomorphes**

  - Conditions de Cauchy-Riemann

  - Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C^1 par morceaux

  - Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé

  - Déterminations du logarithme, des racines carrées.

  - Théorème d'holomorphie sous le signe intégral.

- **Propriétés des fonctions holomorphes**

  - Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point

  - Formules et Inégalités de Cauchy, Théorème de Liouville, application au théorème fondamental de l'algèbre

  - Analyticité d'une fonction holomorphe

  - Principe du prolongement analytique, zéros des fonctions holomorphes

  - Principe du maximum, de l'application ouverte, Lemme de Schwarz et automorphismes du disque unité.

- **Fonctions méromorphes et applications**

  - Singularités isolées, Séries de Laurent, Fonctions méromorphes

  - Théorème des résidus,

  - Suites, séries et produits de fonctions holomorphes,

  - fonction Gamma.

  - *Théorème de Riemann, théorème de Picard.*

2.2 EDP et analyse numérique

L'objectif est de familiariser les étudiants avec les équations aux dérivées partielles et à leur approximation numérique en utilisant uniquement des techniques élémentaires (séries de Fourier, équations différentielles, intégration). On prendra comme point de départ des EDP classiques, dont on motivera l'étude en faisant un peu de modélisation, et on s'intéressera aux propriétés qualitatives de ces équations. On développera également la question de l'approximation numérique par des schémas différences finies autour des notions de convergence, d'ordre, de stabilité et de consistance en incluant des TP pour à la fois illustrer les propriétés qualitatives des équations et les notions liées à l'approximation numérique. A noter que le programme de cet UE constitue une partie importante du programme de l'option B à l'agrégation.

Proposition de programme détaillé :

- EDP elliptique 1D
  - Modélisation de la diffusion de la chaleur, d'une corde élastique en stationnaire
  - Existence et unicité par primitive et méthode de tir : différence entre un problème de Cauchy et un problème aux limites (rappels théoriques sur les EDO)
  - Propriétés qualitatives (positivité...)
  - Discrétisation par différences finies (stabilité, convergence, ordre) et méthode de tir (rappels sur l'approximations numérique des EDO)
- EDP parabolique 1D : l'équation de la chaleur
  - Modélisation de la diffusion de la chaleur
  - Existence et unicité : sur le tore par séries de Fourier et sur $\mathbb{R}$ par transformée de Fourier
  - Propriétés qualitatives (régularisation, principe du maximum, propagation à vitesse infinie...)
  - Différences finies : stabilité, convergence, ordre
- Transport à vitesse constante 1D
  - Modélisation (par exemple trafic routier très fluide)
  - Existence et unicité, caractéristiques
  - Propriétés qualitatives (pas de régularisation, propagation à vitesse finie, principe du maximum...)
  - Différences finies : stabilité, convergence, ordre
- *Equation des ondes 1D*
  - *Modélisation de la corde vibrante*
  - *Existence et unicité par Fourier et formule de d'Alembert*
  - *Propriétés qualitatives (pas de régularisation, propagation à vitesse finie...)base*
  - *Différences finies : stabilité, convergence, ordre*

Et des TP en python !

2.3 Processus stochastiques

L'objectif principal de ce cours est l'étude de deux classes de processus aléatoires, qui sont les martingales et les chaînes de Markov. Ces processus sont omniprésents, tant dans la théorie que dans les applications. L'outil de base utilisé pour construire ces objets est l'espérance conditionnelle, dont l'étude occupe les premiers cours. Pour les martingales comme pour les chaînes de Markov, les principaux résultats étudiés et démontrés dans le cours tournent autour de l'étude du comportement en temps long de ces processus. Cette UE est aussi l'occasion d'introduire d'importants objets et résultats de la théorie des probabilités (temps d'arrêts, inégalités maximales,...) qui apparaissent naturellement dans le cadre de l'étude de processus.

À noter que cette UE doit être vue comme la suite logique de l'UE Mesure-Intégration-Probabilités du premier semestre, et que toutes les notions vues dans ce cours se retrouvent au programme de l'option A de l'agrégation.

Proposition de programme détaillé :

- Espérance conditionnelle.
  - Définition dans L^1.
  - Interprétation géométrique dans le cas L^2.
  - Densités conditionnelles, probabilités conditionnelles, calculs explicites.
- Généralités sur les processus stochastiques.
  - Filtrations.
  - Processus adaptés, processus prévisibles.
  - Temps d'arrêt.
- Martingales.
  - Définition de (sur,sous)-martingale, exemples.
  - Liens avec les temps d'arrêt.
  - Inégalités de Doob, convergence presque-sûre.
  - Convergence dans les espaces L^p.
- Chaînes de Markov
  - Définitions générales, matrice de transition, etc.
  - Classes d'équivalence, irréductibilité, états récurrents et transients.
  - Mesure stationnaire, mesure réversible, théorème de Perron-Frobenius.
  - Cas fini : théorème de convergence, ergodicité.
  - Cas dénombrable : notion de récurrence positive, nouveaux théorèmes de convergence.
  - Application aux marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$, théorème de Polyá.

3 Prérequis

Cette partie sera remplie ultérieurement lorsque cette question aura été débattue lors de la prochaine réunion sur le M1.