Une équivalence sur les lambda-termes

Laurent Regnier
Laboratoire de Mathématiques Discrètes
UPR 9016 du CNRS
163 avenue de Luminy – case 930
13288 Marseille CEDEX 9
e-mail : regnier@lmd.univ-mrs.fr

Résumé

Dans ce papier on définit une relation d'équivalence sur les lambda-termes, identifiant les termes qui ne diffèrent que par des permutations de radicaux : la σ-équivalence. On démontre qu'aucun des critères opérationnels standards de classification du lambda-calcul (e.g. la longueur de plus longue normalisation) ne permet de distinguer deux termes σ-équivalents. Enfin, la σ-équivalence est utilisée pour démontrer une généralisation du théorème de la stratégie perpétuelle.

In this paper an equivalence relation between lambda-terms is defined which identifies terms only differing by permutation of redexes: the σ-equivalence. It is shown that none of the standard operational classification criterions on lambda-calculus (e.g. the length of the longest reduction) may separate two σ-equivalent terms. Finally, the σ-equivalence is used for proving a generalisation of the perpetual strategy theorem.

Remerciements

L'auteur tient à remercier V. Danos avec lequel il élabora la plupart des résultats exposés ci-dessus. La définition de la fonction $H(T)$ et donc la preuve de la proposition 3.3 est due à P. Rozière.

1 Introduction

La σ-équivalence, ainsi nommée du fait qu'elle égalise les termes ne diffèrant que par des permutations de radicaux, est un produit de l'étude comparée du lambda-calcul et des réseaux ([Gir86], [Dan90], [Reg92]). Rappelons que les réseaux sont une syntaxe graphique codant les preuves de la logique linéaire, de même que le lambda-calcul typé code les preuves en logique intuitionniste. Or la logique linéaire introduit une décomposition de la flèche intuitionniste en deux connecteurs linéaires, que l'on peut résumer par la formule

$$A \to B \equiv\, !A \multimap B.$$

Cette décomposition se traduit en une décomposition de la β-réduction : duplication et substitution linéaire. De plus, les résaux sont munis de bonnes propriétés structurelles, si bien qu'ils fournissent un outil efficace d'étude du processus de normalisation du lambda-calcul. La question se pose alors de trouver une traduction des lambda-termes dans les réseaux respectant les propriétés opérationnelles des termes ; en particulier on veut qu'un terme possèdant n radicaux soit traduit en un réseau possèdant n coupures. Cette exigence impose une généralisation de la notion de radical par l'introduction de la σ-équivalence ; finalement, la traduction choisie (dite traduction *opérationnelle*) vérifie qu'il y a isomorphisme entre le réseau associé à un terme et la σ-classe de ce terme.

Le but de cette note est de montrer que les propriétés opérationnelles des termes sont conservées par la σ-équivalence, justifiant ainsi la traduction opérationnelle. On démontre que deux termes σ-équivalents ont la même (éventuelle) forme normale, même longueur de réduction de tête, même longueur de normalisation par réduction gauche et même longueur de plus longue réduction. On utilise une stratégie de réduction définie par Barendregt ([Bar78]) dont on démontre qu'elle atteint la plus longue normalisation d'un terme. Ce résultat existe déjà dans le cas typé dans [deV87].

Du point de vue du lambda-calcul, l'interêt de la σ-équivalence est de définir une notion de *forme canonique* pour les termes. Celle-ci permet de simplifier l'analyse des cas dans les démonstrations de propriétés syntaxiques. On trouvera un exemple d'application de cette méthode avec la proposition 6.1.

Enfin, dans le cadre de l'étude des machines à environnement, une relation similaire à la σ-équivalence est introduite dans [Vid89].

2 Notations et terminologie

On suppose connus les définitions et résultats de base sur le lambda-calcul. Dans le cas contraire le lecteur est invité à se référer au cours de lambda-calcul de Krivine [Kri90].

L'application d'un terme V à un terme U est notée : $(U)V$. On écrit $(U)V_1 \ldots V_n$ pour $(\ldots(U)V_1\ldots)V_n$. On notera :

$T \to_\beta U$	pour	"T se réduit en U par contraction d'un radical"
$T \overset{n}{\twoheadrightarrow}_\beta U$	pour	"T se réduit en U en n étapes"
$T \to_G U$	pour	"T se réduit en U par contraction du radical de gauche"
$T \overset{n}{\twoheadrightarrow}_G U$	pour	"T se réduit en U par n réductions gauches"
$T =_\beta U$	pour	"T est β-équivalent à U"
$T \in N$	pour	"T est en forme normale"
$T \in SN$	pour	"T est fortement normalisable"
$x \in T$	pour	"x est variable libre de T"
$T \subset U$	pour	"T est un sous-terme de U"
$T[x := V]$	pour	"T dans lequel la variable libre x est substituée par V"
$T \equiv U$	pour	"T et U sont égaux à α-conversion près"

On appelle *norme* d'un terme la longueur (éventuellement infinie) de sa plus grande réduction que l'on note $\|T\|$. On note $\|T\|_G$ la longueur (éventuellement infinie) de la réduction gauche de T et $\|T\|_H$ la longueur de la normalisation de tête de T.

Une *stratégie* est une fonction associant à un terme T un radical de T. Si T est normal on convient que la fonction n'est pas définie.

DÉFINITION 2.1. *On note B la stratégie suivante que l'on nomme* stratégie perpétuelle *:*

$$\begin{array}{lcll}
B(\lambda xT) & = & B(T) & \\
B\big((U)V\big) & = & B(U) & \textit{si } U \textit{ ne commence pas par } \lambda \textit{ et n'est pas normal} \\
B\big((U)V\big) & = & B(V) & \textit{si } U \textit{ ne commence pas par } \lambda \textit{ et est normal} \\
B\big((\lambda xU)V\big) & = & (\lambda xU)V & \textit{si } x \in U, \textit{ ou si } V \textit{ est normal} \\
B\big((\lambda xU)V\big) & = & B(V) & \textit{si } x \notin U \textit{ et } V \textit{ n'est pas normal.}
\end{array}$$

REMARQUE. la stratégie perpétuelle coïncide avec la stratégie gauche tant que le redex de gauche n'est pas un K-redex. En particulier, pour le lambda-I-calcul, la stratégie perpétuelle et la stratégie gauche sont identiques.

On appelle réduction perpétuelle la β-réduction associée à cette stratégie. On note $\|T\|_B$ la longueur (éventuellement infinie) de la réduction perpétuelle du terme T. On écrit $T \to_B U$ quand T se réduit en U par contraction du radical $B(T)$ et $T \overset{n}{\twoheadrightarrow}_B U$ quand T se réduit en U par réduction perpétuelle en n étapes.

Le théorème suivant est du à Barendregt :

THÉORÈME 2.1. *Un terme T est fortement normalisable ssi sa réduction perpétuelle termine.*

Autrement dit, dès que T n'est pas fortement normalisable, sa réduction perpétuelle est infinie. Ceci justifie l'emploi du mot "perpétuel".

3 La σ-équivalence

On dit qu'une relation ρ sur les lambda-termes est *compatible* si pour tous termes U et V tels que $U \ \rho \ V$ on a : pour toute variable x, $\lambda x U \ \rho \ \lambda x V$ et pour tout terme W, $(U)W \ \rho \ (V)W$ et $(W)U \ \rho \ (W)V$.

DÉFINITION 3.1. *On appelle* σ-réduction *la plus petite relation compatible contenant :*

$$((\lambda x U)V)W \rightarrow_\sigma (\lambda x(U)W)V \qquad (x \notin W) \tag{1}$$
$$(\lambda x \lambda y U)V \rightarrow_\sigma \lambda y(\lambda x U)V \qquad (y \notin V) \tag{2}$$

On notera $T \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_\sigma U$ *quand* T *se réduit en* U *par* n *σ-réductions,* $=_\sigma$ *la relation d'équivalence associée à* $\rightarrow_\sigma$ *et on appellera* radicaux pivots *les radicaux de* $\rightarrow_\sigma$.

PROPOSITION 3.1. *i) Si* $T_1 =_\sigma T_2$ *alors* $T_1 =_\beta T_2$.
ii) Si T_1 *est normal et* $T_2 =_\sigma T_1$ *alors* $T_1 \equiv T_2$

Preuve. i) Il suffit de voir que si $T_1 \rightarrow_\sigma T_2$ alors il y a un terme T' tel que $T_1 \rightarrow_\beta T'$ et $T_2 \rightarrow_\beta T'$. Par exemple si T_1 et T_2 sont comme dans le premier cas de la définition alors $T' \equiv (U[x := V])W$.
ii) Par définition il n'y a un radical pivot dans T que s'il y a un radical. ◇

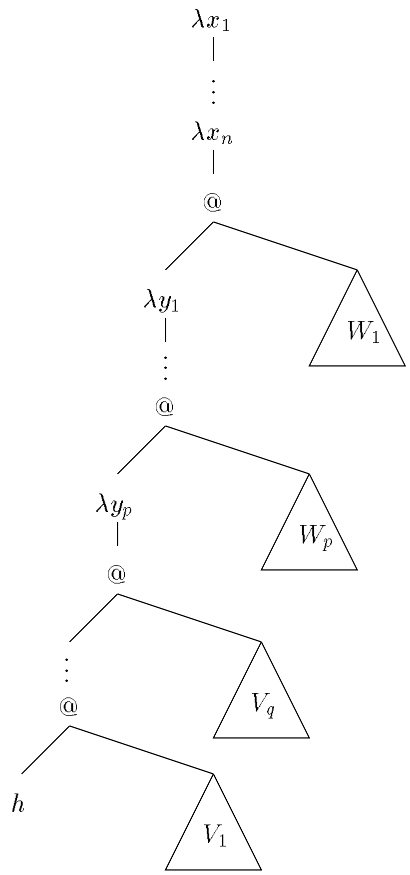
PROPOSITION 3.2. *Si* $T_1 \twoheadrightarrow_\sigma T_2$ *et* $U_1 \twoheadrightarrow_\sigma U_2$ *alors* $T_1[x := U_1] \twoheadrightarrow_\sigma T_2[x := U_2]$.

Preuve. La relation $\rightarrow_\sigma$ est compatible. ◇

DÉFINITION 3.2. *On définit les* formes canoniques *par récurrence :*

- *Une variable est une forme canonique.*
- *Si les* V_i *et les* W_j *sont en forme canonique et* h *est une variable éventuellement égale à l'un des* x_i *ou* y_j, *alors*
$$\lambda x_1 \ldots \lambda x_n (\lambda y_1 \ldots (\lambda y_p (h) V_1 \ldots V_q) W_p \ldots) W_1$$
est une forme canonique

Sous forme graphique, l'épine dorsale d'un terme en forme canonique se présente comme suit :



Remarque. Les formes canoniques sont les formes normales de la σ-réduction. Elles maximisent le nombre de radicaux d'un terme.
Exemple. Les termes :

$$\begin{array}{lcl}
T_1 & \equiv & ((\lambda x \lambda y \lambda z U)V)W \\
T_2 & \equiv & (\lambda x(\lambda y \lambda z U)W)V \\
T_3 & \equiv & (\lambda x \lambda z(\lambda y U)W)V \\
T_4 & \equiv & \lambda z(\lambda x(\lambda y U)W)V \\
T_5 & \equiv & (\lambda y(\lambda x \lambda z U)V)W \\
T_6 & \equiv & (\lambda y \lambda z(\lambda x U)V)W \\
T_7 & \equiv & \lambda z(\lambda y(\lambda x U)V)W
\end{array}$$

sont tous σ-équivalents pourvu que ni x, ni y, ni z ne figurent dans V et W. En effet on a : $T_1 \to_\sigma T_2 \to_\sigma T_3 \to_\sigma T_4$ et $T_1 \to_\sigma T_5 \to_\sigma T_6 \to_\sigma T_7$. Seuls T_4 et T_7 sont en forme canonique, et ce seulement si U, V et W le sont.

Proposition 3.3. *Soit T un terme. Il existe un terme T_c en forme canonique tel que $T \twoheadrightarrow_\sigma T_c$.*

Preuve. Il suffit de voir que la σ-réduction termine. Pour cela on associe à chaque lieur dans un terme sa *hauteur* : $H(\lambda x) =$ "le nombre de parenthèses ouvrantes à gauche de λx". Alors la somme sur tous les lieurs d'un terme des $H(\lambda x)$ diminue strictement au cours d'une σ-réduction. $\diamond$
Remarque. Comme le montre l'exemple précédent, T n'a en général pas une unique forme canonique. Les formes canoniques de T diffèrent alors par des permutations de radicaux.

Lemme 3.4. *Si $T_1 \to_\sigma T_2$ et $T_1 \to_\beta T'_1$ alors il existe T'_2 tel que : $T_2 \to_\beta T'_2$ et $T'_1 \twoheadrightarrow_\sigma T'_2$.*

Preuve. Appellons R_1 le β-radical de T_1 et S le radical pivot. Remarquons qu'il y a dans T_2 un radical R_2 correspondant à R_1, i.e., caractérisé par le même lieur. Si $R_1 \equiv S$ alors on réduit R_2 dans T_2, soit $T'_2 \equiv T'_1$. Si $R_1 \not\equiv S$, et la réduction de R_1 ne duplique pas S alors on réduit R_2 dans T_2 obtenant T'_2. Comme S est toujours présent une fois dans T'_1 on a $T'_1 \to_\sigma T'_2$. Finalement si R_1 duplique S n fois ($n \geq 0$), on réduit encore R_2 dans T_2 et l'on a : $T'_1 \xrightarrow{n}\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow_\sigma T'_2$. ◇

Corollaire 3.5. *Si $T_1 \twoheadrightarrow_\sigma T_2$ et $T_1 \to_\beta T'_1$ alors il existe T'_2 tel que : $T_2 \to_\beta T'_2$ et $T'_1 \twoheadrightarrow_\sigma T'_2$.*

Preuve. Par récurrence sur la longueur de la σ-réduction de T_1 à T_2. ◇

Proposition 3.6. *Si $T_1 \twoheadrightarrow_\sigma T_2$ alors $\|T_1\| \leq \|T_2\|$.*

Preuve. C'est une conséquence du lemme ci-dessus. Par récurrence sur la longueur de la σ-réduction on a : $T_1 \twoheadrightarrow_\sigma T_2$ et $T_1 \to_\beta T'_1$ entraîne $T_2 \to_\beta T'_2$ et $T'_1 \twoheadrightarrow_\sigma T'_2$. Donc à toute suite de β-réductions de T_1 on sait associer une suite de β-réductions de T_2, de même longueur, et ne passant que par des σ-réduits des β-réduits de T_1. ◇
Remarque. L'inégalité inverse est plus délicate : si $T_1 \equiv ((\lambda x \lambda y U)V)W$ et $T_2 \equiv (\lambda x(\lambda y U)W)V$, on a $T_2 \to_\beta T'_2 \equiv (\lambda x U[y := W])V$ mais on ne peut pas en général réduire T_1 en un terme σ-équivalent à T'_2. On la démontre dans la section 6.

4 Réduction gauche et σ-équivalence

Proposition 4.1. *Si $T_1 \twoheadrightarrow_\sigma T_2$ alors $\|T_1\|_G = \|T_2\|_G$*

Preuve. Si $\|T_1\|_G = \infty$, comme T_1 n'a pas de forme normale et $T_2 =_\beta T_1$, on déduit que T_2 n'a pas de forme normale ; donc $\|T_2\|_G = \infty$.

Sinon $\|T_1\|_G$ et $\|T_2\|_G$ sont finies. On suppose que $T_1 \to_\sigma T_2$, le cas général se résolvant par récurrence sur la longueur de la σ-réduction de T_1 à T_2, et on raisonne par récurrence sur $\|T_1\|_G$.

Lemme 4.2. *Si $T_1 \to_\sigma T_2$ alors il existe T'_1 et T'_2 et $n \geq 1$ tels que : $T_1 \xrightarrow{n}\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow_G T'_1$, $T_2 \xrightarrow{n}\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow_G T'_2$ et $T'_1 \twoheadrightarrow_\sigma T'_2$.*

On a donc $\|T_1\|_G = \|T'_1\|_G + n$. Par récurrence sur $\|T'_1\|_G$ on a $\|T'_1\|_G = \|T'_2\|_G$, donc $\|T_1\|_G = \|T'_2\|_G + n = \|T_2\|_G$.

Passons à la preuve du lemme : soit R_1 le radical de gauche de T_1 et R_2 celui de T_2. Si R_1 est le même radical que R_2, i.e., R_1 et R_2 sont caractérisés par le même lieur, alors on réduit R_1 et R_2 dans respectivement T_1 et T_2 et, comme pour le lemme 3.4 on obtient T'_1 et T'_2 tels que $T'_1 \twoheadrightarrow_\sigma T'_2$. Sinon c'est que R_1 est en même temps le radical pivot de T_1 et que la σ-réduction a rajouté un radical à gauche de R_1 dans T_2 : donc R_1 est un sous-terme de $S_1 \equiv ((\lambda x \lambda y U)V)W$ et $R_2 \equiv (\lambda y(\lambda x U)V)W$. En deux réductions gauches de T_1 et T_2 on aboutit au même terme. ◇
Remarque. La preuve est toujours valide si on remplace partout "radical de gauche" par "radical de tête" et "forme normale" par "forme normale de tête". On en déduit donc le corollaire suivant :

Corollaire 4.3. *Soient T_1, T_2 tels que $T_1 =_\sigma T_2$: on a alors*

- $\|T_1\|_G = \|T_2\|_G$;
- $\|T_1\|_H = \|T_2\|_H$;
- *si T_1^h (resp. T_2^h) est la forme normale de tête obtenue par réduction de tête de T_1 (resp. T_2), alors $T_1^h =_\sigma T_2^h$.*

Preuve. Par définition, $=_\sigma$ est la relation d'équivalence associée à $\to_\sigma$. Pour la solvabilité, c'est la même démonstration en vertu de la dernière remarque. La dernière proposition se prouve par récurrence sur la réduction de tête de T_1 en utilisant le lemme. ◇

5 Invariance de la norme perpétuelle par σ-classe

Proposition 5.1. *Si $T_1 \twoheadrightarrow_\sigma T_2$ alors $\|T_1\|_B = \|T_2\|_B$.*

Preuve. On ne s'intéresse qu'au cas où $T_1 \rightarrow_\sigma T_2$, le cas général s'en déduisant par récurrence sur la longueur de la σ-réduction.

Lemme 5.2. *Si $T_1 \rightarrow_\sigma T_2$ alors l'une des deux propriétés suivantes est réalisée :*
i) il existe T'_1, T'_2 et $n \geq 1$ tels que : $T_1 \xrightarrow{n}_B T'_1$, $T_2 \xrightarrow{n}_B T'_2$ et $T'_1 \twoheadrightarrow_\sigma T'_2$;
ii) $\|T_1\|_B = \|T_2\|_B = \infty$

Notons que les deux cas ne sont pas exclusifs. Prouvons d'abord la proposition : on raisonne par cas sur $\inf(\|T_1\|_B, \|T_2\|_B)$. Si c'est infini, alors on a bien $\|T_1\|_B = \|T_2\|_B$. Si $\|T_1\|_B < \infty$ et $\|T_2\|_B \leq \infty$ (resp. $\|T_1\|_B \leq \infty$ et $\|T_2\|_B < \infty$), on raisonne par récurrence sur $\|T_1\|_B$ (resp. $\|T_2\|_B$) : on est forcément dans le cas i) du lemme; donc il existe une suite $R_0, R_1, \ldots, R_p$ telle que : $R_0 \equiv T'_1$, $R_p \equiv T'_2$, et $R_i \rightarrow_\sigma R_{i+1}$. On a : $\|T'_1\|_B = \|T_1\|_B - n$, $\|T'_2\|_B = \|T_2\|_B - n$, et par récurrence sur $\|T'_1\|_B$ (resp. $\|T_2\|_B$) : $\|T'_1\|_B = \|R_1\|_B = \|R_2\|_B \ldots = \|T'_2\|_B$.

Puis le lemme : on raisonne par récurrence sur T_1 en prenant une hypothèse de récurrence légèrement plus forte : on suppose en plus que si T_1 (resp. T_2) ne commence pas par λ alors, dans le cas i), aucun terme de la réduction de T_1 à T'_1 (resp. de T_2 à T'_2), sauf éventuellement le dernier, ne commence par λ, et dans le cas ii), aucun terme de la réduction perpetuelle de T_1 (resp. de T_2) ne commence par λ.

Si T_1 est une variable, il n'y a rien à dire.

Si $T_1 \equiv \lambda x U_1$; alors, par définition de $\rightarrow_\sigma$, on a $T_2 \equiv \lambda x U_2$ et $U_1 \rightarrow_\sigma U_2$; on obtient le résultat par récurrence sur U_1.

Si $T_1 \equiv (U_1)V_1$ alors T_2 a l'une des formes suivantes :

1. $T_2 \equiv \lambda y R$. Ce cas n'est possible que si T_1 est un radical pivot de la forme $T_1 \equiv (\lambda x \lambda y U)V$ et si $T_2 \equiv \lambda y(\lambda x U)V$. Si $B(T_1) = T_1$, c'est à dire, si $x \in U$ ou si V est normal, alors $B(T_2) = (\lambda x U)V$, donc T_1 et T_2 se réduisent tous deux en une étape de réduction perpetuelle en le même terme $T' \equiv \lambda y U[x := V]$. Donc le lemme est démontré avec $n = 1$. Sinon, i.e., si $x \notin U$ et V n'est pas normal, alors $B(T_1) = B(T_2) = V$; comme V n'est pas normal, il existe V' tel que $V \rightarrow_B V'$, donc tel que $T_1 \rightarrow_B T'_1 \equiv (\lambda x \lambda y U)V'$ et $T_2 \rightarrow_B T'_2 \equiv \lambda y(\lambda x U)V'$; soit le cas i) du lemme avec $n = 1$.

2. $T_2 \equiv (R)S$ où ni R, ni S ne sont σ-équivalents à respectivement U_1 et V_1. Ce cas n'est possible que si $U_1 \equiv (\lambda x T)S$, soit $T_1 \equiv ((\lambda x T)S)V_1$ et $T_2 \equiv (\lambda x(T)V_1)S$. Ce cas se traite comme le précédent.

3. $T_2 \equiv (U_1)V_2$ avec $V_1 \rightarrow_\sigma V_2$. Si $B(T_1) = B(U_1)$ alors c'est que U_1 ne commence pas par λ et n'est pas normal, donc $B(T_2) = B(U_1)$. Donc $T_1 \rightarrow_B (U'_1)V_1$ et $T_2 \rightarrow_B (U'_1)V_2$ où U'_1 est le réduit à une étape de U_1 par le radical $B(U_1)$; soit le cas i) du lemme avec $n = 1$. Si $B(T_1) = V_1$, alors c'est que $U_1 \equiv \lambda x R$ et que x n'apparait pas dans R. Donc $B(T_2) = V_2$ et le résultat vient par le meême raisonnement que dans le premier cas. Sinon $B(T_1) = T_1$. Mais alors $U_1 \equiv \lambda x U$, soit $T_1 \equiv (\lambda x U)V_1$ et $T_2 \equiv (\lambda x U)V_2$. Donc $T_1 \rightarrow_B T'_1 \equiv U[x := V_1]$ et $T_2 \rightarrow_B T'_2 \equiv U[x := V_2]$. Comme $T'_1 \twoheadrightarrow_\sigma T'_2$ on obtient une fois de plus le lemme avec $n = 1$.

4. $T_2 \equiv (U_2)V_1$ avec $U_1 \rightarrow_\sigma U_2$. Si $B(T_1) = B(U_1)$ et $B(T_2) = B(U_2)$ alors c'est que ni U_1, ni U_2 ne commence par λ. Par récurrence sur U_1, on a un n (éventuellement infini) tel que $U_1 \xrightarrow{n}_B U'_1$, $U_2 \xrightarrow{n}_B U'_2$ et $U'_1 \twoheadrightarrow_\sigma U'_2$. Comme l'hypothèse de récurrence spécifie qu'aucun des termes apparaissant dans ces réductions ne commence par λ, on en déduit que $T_1 \xrightarrow{n}_B (U'_1)V_1$ et $T_2 \xrightarrow{n}_B (U'_2)V_1$, ce qui est le résultat attendu.

   Si $B(T_1) = B(V_1)$ alors $U_1 \equiv \lambda x R_1$ où x n'apparait pas dans R_1. Mais alors $U_2 \equiv \lambda x R_2$ avec $R_1 \rightarrow_\sigma R_2$, donc x n'apparait pas dans R_2 non plus et $B(T_2) = V_1$. Le résultat vient par le même raisonnement que dans le premier cas.

Enfin si $B(T_1) = B(U_1)$ et $B(T_2) \neq B(U_2)$. Alors, U_1 ne peut commencer par λ et U_2 doit commencer par λ. La seule possibilité est que $U_1 \equiv (\lambda x \lambda y P)Q$ et que $U_2 \equiv \lambda y(\lambda x P)Q$ où y n'apparait pas dans Q. Il y a alors quatre cas :

(a) x et y apparaissent dans P ; dans ce cas, en deux étapes de réduction perpétuelle, T_1 et T_2 se réduisent en un même terme sans faire apparaître de λ en tête lors de la première étape.

(b) x apparait dans P mais pas y; soit $B(T_1) = (\lambda x \lambda y P)Q$ et $B(T_2) = B(V_1)$. Si la réduction perpétuelle de V_1 termine en n étapes sur une forme normale V' on a alors: $T_1 \rightarrow_B (\lambda y P[x := Q])V_1 \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_B (\lambda y P[x := Q])V' \rightarrow_B P[x := Q]$ et $T_2 \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_B (\lambda y(\lambda x P)Q)V' \rightarrow_B (\lambda x P)Q \rightarrow_B P[x := Q]$, soit le cas i) du lemme avec $n+2$.

Si la réduction perpétuelle de V_1 est infinie, le même raisonnement montre que T_1 et T_2 ont tous deux une réduction perpétuelle infinie ne faisant jamais apparaître de λ en tête.

(c) y apparait dans P mais pas x. Le raisonnement est symétrique du cas précédent.

(d) Ni x, ni y n'apparaissent dans P. Si les réductions perpétuelles de Q et de V_1 terminent en respectivement n et p étapes, sur des formes normales Q' et V', on a alors : $T_1 \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_B ((\lambda x \lambda y P)Q')V_1 \rightarrow_B (\lambda y P)V_1 \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_B (\lambda y P)V' \rightarrow_B P$ et $T_2 \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_B (\lambda y(\lambda x P)Q)V' \rightarrow_B (\lambda x P)Q \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_B (\lambda x P)Q' \rightarrow_B P$; donc le lemme est démontré avec $n+p+2$. Sinon, le même calcul montre que les deux réductions sont infinies sans jamais faire apparaître de λ en tête. Remarquons que dans le cas où les réductions de Q et de V_1 sont infinies, celles de T_1 et T_2 bouclent aussi, mais pas pour la même raison : la première boucle sur la réduction de Q et la seconde sur celle de V_1

$\diamond$

Corollaire 5.3. *Si $T_1 =_\sigma T_2$ alors $\|T_1\|_B = \|T_2\|_B$.*

Preuve. $=_\sigma$ est la relation d'équivalence associée à $\twoheadrightarrow_\sigma$. $\diamond$

6 Norme et norme Barendregt

La proposition suivante est une généralisation du théorème de Barendregt :

Proposition 6.1. *Soient T et T' tels que : $\|T\|_B < \infty$ et $T \rightarrow_\beta T'$. Alors $\|T\|_B > \|T'\|_B$.*

Remarque. Autrement dit, toute réduction fait strictement diminuer la norme Barendregt.
Preuve. Par récurrence sur $\|T\|_B$. On utilise le lemme suivant :

Lemme 6.2. *Soient T en forme canonique, T' et T_B tels que : $T \rightarrow_\beta T'$ et $T \rightarrow_B T_B$. L'une des deux propriétés suivantes est réalisée :*
i) Il existe deux entiers n et p, et un terme S tels que $n \geq p$, $T_B \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_\beta S$ et $T' \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_B S$;
ii) $\|T'\|_B = \infty$ et $\|T_B\| = \infty$

Commençons par la preuve de la proposition : par récurrence sur $\|T_B\|_B$ et sur n on a: pour tout S tel que $T_B \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_\beta S$, $\|T_B\|_B \geq \|S\|_B + n$. Supposons que T est en forme canonique de façon à pouvoir appliquer le lemme. Si on est dans le cas ii) on contredit $\|T\|_B < \infty$. Par conséquent il existe S comme dans le cas i). Mais alors on a: $\|T\|_B = \|T_B\|_B + 1 \geq \|S\|_B + n + 1 = \|T'\|_B - p + n + 1 \geq \|T'\|_B + 1$ car la réduction de T' à S est perpétuelle.

Si maintenant T n'est pas en forme canonique, soit T_c une forme canonique pour T, i.e., $T \twoheadrightarrow_\sigma T_c$. On applique le corollaire 3.5 à T, T' et T_c, et on obtient T'_c tel que $T' \twoheadrightarrow_\sigma T'_c$. Par le raisonnement ci-dessus on a $\|T_c\|_B \geq \|T'_c\|_B + 1$ et l'on obtient le résultat pour T et T' par la proposition 5.1.

Passons au lemme: on le prouve par récurrence sur la forme canonique T.

- $T \equiv \lambda x U$; alors on a le résultat par récurrence sur U.

- $T \equiv (\lambda x U)V$ et $x \in U$; alors $T_B \equiv U[x := V]$. Il y a quatre formes possibles pour T' :

  1. $T' \equiv T_B$; il n'y a rien à dire.

2. $T' \equiv (\lambda x U')V$ et $x \in U'$; alors $T' \rightarrow_B U'[x := V]$. Mais $T_B \rightarrow_\beta U'[x := V]$ soit $n = p = 1$.
3. $T' \equiv (\lambda x U')V$ et $x \notin U'$; si il existe q tel que $T' \xrightarrow{q}\!\!\!\!\rightarrow_B (\lambda x U')V_0$ où V_0 est en forme normale alors $T' \xrightarrow{q+1}\!\!\!\!\rightarrow_B U'$. Notons k le nombre d'occurences de x dans U ; k est donc supérieur ou égal à 1. On a, en réduisant les k sous-termes V de T_B en V_0, $T_B \xrightarrow{kq}\!\!\!\!\rightarrow_\beta U[x := V_0]$ soit $T_B \xrightarrow{kq+1}\!\!\!\!\rightarrow_\beta U'$ d'où le résultat avec $n = kq + 1$ et $p = q + 1$. Si q n'existe pas, i.e., $\|T'\|_B = \infty$ alors on a une réduction infinie de V, donc un eréduction infinie de T_B, soit le cas ii) du lemme.
4. $T' \equiv (\lambda x U)V'$; comme $x \in U$, $T' \rightarrow_B U[x := V']$. Mais $T_B \xrightarrow{k}\!\!\!\!\rightarrow_\beta U[x := V']$ d'où le résultat avec $n = k$ et $p = 1$.

– $T \equiv (\lambda x U)V$, $x \notin U$ et V n'est pas normal ; alors $T_B \equiv (\lambda x U)V_B$ où V_B est le réduit à une étape par réduction perpétuelle de V. Notons que, puisque T est en forme canonique, V l'est aussi. Si $T' \equiv (\lambda x U')V$, alors comme $x \notin U'$, $T' \rightarrow_B (\lambda x U')V_B$. Mais $T_B \rightarrow_\beta (\lambda x U')V_B$ soit $n = p = 1$. Si $T' \equiv (\lambda x U)V'$ alors, par récurrence sur V, on a : soit $\|V'\|_B = \infty$ et $\|V_B\| = \infty$, auquel cas il en est de même de T' et T_B ; ou bien il existe n, p et W tels que $n \geq p$ et $V_B \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_\beta W$ et $V' \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_B W$. Mais alors $T' \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_B (\lambda x U)W$ et $T_B \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_\beta (\lambda x U)W$.

– $T \equiv (\lambda x U)V$, $x \notin U$ et V est normal ; alors $T_B \equiv U$. Si $T' \equiv (\lambda x U')V$, alors $T' \rightarrow_B U'$ et $T_B \rightarrow_\beta U'$ soit $n = p = 1$; sinon, si $T' \equiv U$, alors $T' \equiv T_B$; le dernier cas est $T' \equiv (\lambda x U)V'$: alors $T' \rightarrow_\beta U \equiv T_B$, soit $n = 1$ et $p = 0$.

– $T \equiv (x)V^1 \ldots V^q$; alors $T_B \equiv (x)V^1 \ldots V^j_B \ldots V^q$ où V^j est le premier argument de x non normal. Notons que tous les V^i sont en forme canonique. Si $T' \equiv (x)V^1 \ldots V'^j \ldots V^q$ alors par récurrence sur V^j on obtient le résultat. Sinon $T' \equiv (x)V^1 \ldots V^j \ldots V'_k \ldots V^q$ et $T' \rightarrow_B S \equiv (x)V^1 \ldots V^j_B \ldots V'_k \ldots V^q$, et $T_B \rightarrow_\beta S$ soit $n = p = 1$. ◇

Remarque. Il est intéressant de noter la construction de la preuve. On prouve le lemme par récurrence sur les formes canoniques ce qui simplifie l'étude par cas. Pour s'en convaincre, considérons le cas où $T \equiv (U)V$, U ne commencant pas par lambda. Si T est une forme canonique, c'est la dernière étape de la preuve, mais si ce n'est pas le cas, l'hypothèse de récurrence devient inutilisable : supposons que $T_B \equiv (U_B)V$, et $T' \equiv (U')V$. Par hypothèse de récurrence sur U on sait qu'il existe n, p et U'' tels que $U_B \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_\beta U''$ et $U' \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_B U''$. On en déduit bien que $T_B \xrightarrow{n}\!\!\!\!\rightarrow_\beta S \equiv (U'')V$ mais pas que $T' \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow_B S$ car il se peut que : $U' \xrightarrow{p_1}\!\!\!\!\rightarrow_B \lambda x U_1 \xrightarrow{p_2}\!\!\!\!\rightarrow_B U'' \equiv \lambda x U_2$ avec $p_1, p_2 \neq 0$, et $p = p_1 + p_2$. Supposons que p_1 soit minimal pour cette propriété, alors $T' \xrightarrow{p_1}\!\!\!\!\rightarrow_B T_1 \equiv (\lambda x U_1)V$ et ne se réduit donc pas par la stratégie B en S. On peut résoudre ce problème en renforcant l'hypothèse de récurrence mais cela complique considérablement la preuve. Il est plus facile de passer par les formes canoniques.

Corollaire 6.3. *Pour tout terme T on a $\|T\| = \|T\|_B$.*

Preuve. Par définition de $\|T\|$ on a $\|T\| \geq \|T\|_B$, ce qui règle les cas où $\|T\|_B = \infty$. Pour l'autre inégalité, on raisonne par récurrence sur $\|T\|_B$. Soit T' un réduit à une étape de T. Par la proposition ci-dessus, $\|T\|_B > \|T'\|_B$. Par hypothèse de récurrence, $\|T'\| = \|T'\|_B$. Donc pour tout réduit à une étape T' de T, on a $\|T\|_B > \|T'\|$. Comme $\|T\| = \|T'\| + 1$ pour au moins un T', on obtient finalement $\|T\|_B \geq \|T\|$. ◇

Corollaire 6.4. *Si $T_1 =_\sigma T_2$ alors $\|T_1\| = \|T_2\|$.*

Preuve. C'est une conséquence de la proposition 5.1 et du corollaire 6.3. ◇

7 Conclusion

L'exposé ci-dessus suggère deux questions : existe-il un critère naturel classifiant les termes, permettant de distinguer deux termes σ-équivalents ? Existe-il une syntaxe réalisant la σ-équivalence ? En ce qui concerne la première question le papier montre que la plupart des critères basés sur l'opérationnalité des termes sont plus grossiers que $=_\sigma$.

Historiquement, la réponse à la seconde question est à l'origine de la σ-équivalence. On a déja vu dans l'introduction qu'il y a isomorphisme entre la σ-classe d'un terme et le réseau qui lui est associé par la traduction opérationnelle.

Citons enfin la construction de la preuve de la proposition 6.1 qui suggère une méthode générale de démonstration par récurrence sur les termes utilisant la σ-équivalence : faire par récurrence sur les formes canoniques ce qui peut comme on l'a vu simplifier la preuve, puis prouver l'invariance du résultat par σ-équivalence.

Références

[Bar78] H. Barendregt, *Lambda-calculus*, North Holland 1978.

[Dan90] V. Danos, *Une application de la logique linéaire à l'étude des processus de normalisation et principalement du lambda-calcul*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, Juin 90.

[Gir86] J.Y. Girard, *Linear Logic*, Theoretical Computer Science volume 50–1, 1987.

[Kri90] J.L. Krivine, *Lambda-calcul, types et modèles*, Masson, 1990.

[Reg92] L. Regnier, *Lambda-calcul et réseaux*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, Janvier 92.

[deV87] R. de Vrijer, *Exactly estimating functionnals and strong normalization*, Compte-rendus de l'Académie des Sciences de Hollande, Décembre 87.

[Vid89] D. Vidal, *Nouvelles notions de réduction en lambda-calcul*, Thèse de doctorat, Université de Nancy 1, Fevrier 89.