Mathématiques
Devoir Surveillé 1

Durée 1h30 - Calculatrices et documents interdits

26 octobre 2018

Exercice 1 ♣

Calculer les expressions suivantes (pour A,B,C et D, vous donnerez le résultat sous forme de fraction irréductible et une valeur décimale approchée avec un chiffre après la virgule, pour E et F vous utiliserez la notation scientifique) :

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\right) \qquad B = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{7}\right)$$

$$C = \left(\frac{5}{4}-\frac{3}{8}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right) \qquad D = \frac{\frac{5}{3}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}$$

$$E = 1,3\,10^3 \times 2\,10^{-2} \qquad F = \frac{45\times 10^2}{5\times 10^{-1}}$$

Réponse.

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\times 2}{3\times 2}+\frac{3\times 3}{3\times 2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10+9}{6}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{19}{6} = \frac{19}{12}$$

On peut aussi commencer par effectuer la multiplication par $\frac{1}{2}$ mais ça rend juste le calcul un tout petit peu plus compliqué :

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{1\times 5}{2\times 3}+\frac{1\times 3}{2\times 2} = \frac{5}{6}+\frac{3}{4} = \frac{5\times 2}{6\times 2}+\frac{3\times 3}{3\times 4} = \frac{10+9}{12} = \frac{19}{12}$$

Ici on a choisi le dénominateur commun le plus simple : 12 mais si on choisi $24 = 6\times 4$ alors le calcul devient :

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{1\times 5}{2\times 3}+\frac{1\times 3}{2\times 2} = \frac{5}{6}+\frac{3}{4} = \frac{5\times 4}{6\times 4}+\frac{6\times 3}{6\times 4} = \frac{20+18}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19\times 2}{12\times 2} = \frac{19}{12}$$

Il ne faut pas oublier de simplifier la fraction à la fin.

$$B = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{7}\right) = -\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{7} = -\frac{1\times 3}{3\times 2}-\frac{1\times 3}{3\times 7} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{7} = -\frac{1\times 7}{2\times 7}-\frac{2\times 1}{2\times 7} = \frac{-7-2}{14} = -\frac{9}{14}$$

Ici on a tout de suite effectué la multiplication par $\frac{1}{3}$ pour pouvoir simplifier les deux fractions par 3 avant de faire la somme.

On peut aussi faire le calcul ainsi :

$$B = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{3\times 7}{2\times 7}-\frac{2\times 3}{2\times 7}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{-21-6}{14}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{27}{14}\right) = -\frac{1\times 27}{3\times 14} = -\frac{9}{14}$$

Remarquer qu'il ne faut surtout pas calculer 3×14 puisque l'on va ensuite simplifier la fraction par 3.

$$C = \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8}\right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{10}{8} - \frac{3}{8}\right) \times \left(\frac{5}{15} + \frac{9}{15}\right) = \frac{7}{8} \times \frac{14}{15} = \frac{7 \times 14}{8 \times 15} = \frac{7 \times 7}{4 \times 15} = \frac{49}{60}$$

Remarquer que l'on a simplifié (par 2) avant d'effectuer les multiplications au numérateur et au dénominateur.
On peut également commencer par développer le produit et ensuite calculer la somme résultante, c'est un peu plus compliqué mais ça marche.

$$D = \frac{\frac{5}{3} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{5 \times 2}{3 \times 2} - \frac{3 \times 3}{3 \times 2}}{\frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{3 \times 3}{3 \times 2}} = \frac{\frac{10-9}{6}}{\frac{2+9}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{6}} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{11} = \frac{1}{11}$$

$$E = 1,3\,10^3 \times 2\,10^{-2} = 1,3 \times 2 \times 10^3 \times 10^{-2} = 2,6 \times 10^{3-2} = 2,6 \times 10^1 = 26$$

$$F = \frac{45 \times 10^2}{5 \times 10^{-1}} = \frac{45}{5} \times \frac{10^2}{10^{-1}} = 9 \times 10^2 \times 10^1 = 9 \times 10^3 = 9000$$

Exercice 2 ♣

Simplifier les expressions suivantes :

$$G = \sqrt{18} - \sqrt{27}$$
$$H = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{6} - \sqrt{8}}$$
$$I = \frac{2^{-2} \times 3^3 \times 7^{-3}}{(4^3 \times 3^{-2} \times 5^3)^{-2}}$$

Réponse.

$G = \sqrt{18} - \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} - \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = 3(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

$$H = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{6} - \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8^2}(\sqrt{6} + \sqrt{8})}{(\sqrt{6} - \sqrt{8})(\sqrt{6} + \sqrt{8})} = \frac{8(\sqrt{6} + \sqrt{4 \times 2})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{8})^2} = \frac{8(\sqrt{6} + \sqrt{4}\sqrt{2})}{6 - 8} = \frac{8(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})}{-2} = -4(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2^{-2} \times 3^3 \times 7^{-3}}{(4^3 \times 3^{-2} \times 5^3)^{-2}} = \frac{2^{-2} \times 3^3 \times 7^{-3}}{(4^3)^{-2} \times (3^{-2})^{-2} \times (5^3)^{-2}} = \frac{2^{-2} \times 3^3 \times 7^{-3}}{4^{3\times(-2)} \times 3^{(-2)\times(-2)} \times 5^{3\times(-2)}} = \frac{2^{-2} \times 3^3 \times 7^{-3}}{4^{-6} \times 3^4 \times 5^{-6}} \\ &= \frac{2^{-2} \times 3^3 \times 7^{-3}}{(2^2)^{-6} \times 3^4 \times 5^{-6}} = \frac{2^{-2} \times 3^3 \times 7^{-3}}{2^{-12} \times 3^4 \times 5^{-6}} = 2^{-2-(-12)} \times 3^{3-4} \times 5^{-(-6)} \times 7^{-3} = 2^{10} \times 3^{-1} \times 5^6 \times 7^{-3} \\ &= \frac{2^{10} \times 5^6}{3 \times 7^3} \end{aligned}$$

Exercice 3 ♣

1. Rappeler les développements de $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ et $(a+b)(a-b)$

Réponse.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2. Développer les expressions

$$A = (x+2y)^2\,;\ B = (x+2)(x-3)$$

Réponse.

$$A = (x+2y)^2 = x^2 + 2 \times x \times 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$
$$B = (x+2)(x-3) = x \times x - 3 \times x + 2 \times x + 2 \times (-3) = x^2 - x - 6$$

3. Résoudre les équations

$$x + 2 = \frac{2}{3}x - \frac{5}{2}$$
$$x^2 = 5$$
$$x^2 + 1 = 0$$

Réponse.

$$\begin{aligned}
x+2 &= \frac{2}{3}x - \frac{5}{2} \\
x - \frac{2}{3}x &= -\frac{5}{2} - 2 && \text{en ajoutant } -\tfrac{2}{3}x - 2 \text{ de chaque côté} \\
\frac{3-2}{3}x &= \frac{-5-4}{2} \\
\frac{x}{3} &= -\frac{9}{2} \\
x &= -\frac{27}{2} && \text{en multipliant par 3 les deux membres de l'équation}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 &= 5 \\
\sqrt{x^2} &= \sqrt{5} \\
|x| &= \sqrt{5} \\
-x = \sqrt{5} \text{ ou } x &= \sqrt{5} && \text{par définition de } |x| \\
x = -\sqrt{5} \text{ ou } x &= \sqrt{5}
\end{aligned}$$

On peut aussi procéder ainsi :

$$\begin{aligned}
x^2 &= 5 \\
x^2 - 5 &= 0 \\
x^2 - (\sqrt{5})^2 &= 0 \\
(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) &= 0 && \text{par l'identité remarquable } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\
x = -\sqrt{5} \text{ ou } x &= \sqrt{5}
\end{aligned}$$

On ne peut pas résoudre $x^2+1=0$; en effet $x^2 \geq 0$ pour tout réel x, donc $x^2+1 \geq 1$ et par conséquent on ne peut avoit $x^2+1=0$. Cette équation n'a aucune solution.
Une autre façon de voir est : si $x^2+1=0$ alors $x^2=-1$ mais le carré d'un nombre réel est toujours positif, donc ne peut être égal à -1.

4. Résoudre à l'aide d'un tableau de signe les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(x+2)(x-1) &< 0 \\
\frac{x-3}{x-1} &\geq 0
\end{aligned}$$

Réponse. On fait le tableau des signes de $(x+2)(x-1)$ qui est positif quand les deux facteurs sont de même signe, négatif sinon :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On voit sur le tableau que $(x+2)(x-1) < 0$ exactement quand $-2 < x < 1$; l'ensemble solution est donc $S =]-2, 1[$.

On fait le tableau des signes de $\frac{x-3}{x-1}$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x-3}{x-1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Le signe d'une fraction est comme le signe d'un produit : positif si le numérateur et le dénominateur sont de même signe, négatif sinon, mais il faut faire attention au dénominateur qui ne doit pas être nul, ce qui est le cas ici pour $x = 1$.

On a donc $\frac{x-3}{x-1} \geq 0$ ssi $x < 1$ (car $x = 1$ annule le dénominateur) ou $x \geq 3$; l'ensemble solution est donc : $S =]-\infty, 1[\cup [3, +\infty[$.

Exercice 4 ♣

Depuis l'ouverture de la rocade L2 à Marseille, certains automobilistes protestent contre la limitation à $v_{\text{reelle}} = 70$km/h. Sachant que la rocade fait $d = 10$km de long, calculer la perte de temps Δt(en minutes) par rapport à une limitation à $v_{\text{ideale}} = 90$km/h et dire si ces protestations sont justifiées. On donnera l'expression littérale de Δt avant tout calcul.

Réponse. On sait que la vitesse v est obtenue en divisant la distance d par le temps t : $v = \frac{d}{t}$. On en déduit que : $t = \frac{d}{v}$.

Par conséquent si v est la vitesse idéale on a : $t_{\text{ideale}} = \frac{d}{v_{\text{ideale}}}$ et si v est la vitesse réelle on a : $t_{\text{reelle}} = \frac{d}{v_{\text{reelle}}}$. La différence $\Delta t = t_{\text{reelle}} - t_{\text{ideale}}$ est donc $\Delta t = \frac{d}{v_{\text{reelle}}} - \frac{d}{v_{\text{ideale}}} = d\left(\frac{1}{v_{\text{reelle}}} - \frac{1}{v_{\text{ideale}}}\right)$ heures et comme 1 heure = 60 minutes, finalement on obtient :

$$\Delta t = d\left(\frac{1}{v_{\text{reelle}}} - \frac{1}{v_{\text{ideale}}}\right) 60 \text{ minutes}$$

Il ne reste plus qu'à évaluer Δt, sachant que $d = 10\,\text{km}$, $v_{\text{ideale}} = 90\,\text{km/h}$ et $v_{\text{reelle}} = 70\,\text{km/h}$, ce qui donne :

$$\Delta t = 10\left(\frac{1}{70} - \frac{1}{90}\right) \times 60 = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \times 60 = \left(\frac{9-7}{63}\right) \times 60 = 2 \times \frac{60}{63} = 2 \times \frac{20}{21} \text{ minutes}$$

ce qui fait un tout petit peu moins de 2 minutes (1 minute et 54 secondes).

Exercice 5

Développer les expressions suivantes

$$C = (x-1)(x^2+1) \qquad D = (x^3+x^2-2x+1)(x-3)$$
$$E = (x+3)^2 - (x-2)(x+4) \qquad F = (x+1)(x-2)(x+3)$$

Réponse.

$$\begin{aligned}
C &= (x-1)(x^2+1) = x \times (x^2+1) - (x^2+1) = x^3 + x - x^2 - 1 = x^3 - x^2 + x - 1 \\
D &= (x^3+x^2-2x+1)(x-3) = x(x^3+x^2-2x+1) - 3(x^3+x^2-2x+1) \\
&= x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 3 = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \\
E &= (x+3)^2 - (x-2)(x+4) = x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 4x - 2x - 8) = x^2 + 6x + 9 - x^2 - 2x + 8 = 4x + 17 \\
F &= (x+1)(x-2)(x+3) = (x+1)(x^2 + 3x - 2x - 6) = (x+1)(x^2 + x - 6) \\
&= x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6
\end{aligned}$$

Exercice 6

Résoudre l'équation

$$-2(x^2 - x + 3) = 4x^2 + 7x - 6$$

Réponse.

$$\begin{aligned}
-2(x^2 - x + 3) &= 4x^2 + 7x - 6 \\
-2x^2 + 2x - 6 &= 4x^2 + 7x - 6 \\
0 &= 2x^2 - 2x + 6 + 4x^2 + 7x - 6 \\
0 &= 6x^2 + 5x \\
0 &= x(6x+5) \\
x = 0 &\text{ ou } 6x + 5 = 0 \\
x = 0 &\text{ ou } x = -\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Remarque : lorsque l'on est au stade $6x^2+5x=0$ on peut aussi utiliser la méthode générale de résolution des équations du second degré ($ax^2+bx+c=0$), c'est juste plus compliqué mais ça marche aussi. Ici $a=6$, $b=5$ et $c=0$ donc $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times 6\times 0=25$; Δ étant positif on a deux solutions de la forme $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ce qui donne $x=\dfrac{-5-\sqrt{25}}{2\times 6}=\dfrac{-10}{12}=-\dfrac{5}{6}$ ou $x=\dfrac{-5+\sqrt{25}}{2\times 6}=0$.

Exercice 7

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, l'inéquation :

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x-2}\leq 0$$

Réponse. Le tableau de signe donne :

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{(x+1)(x+2)}{x-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

On voit donc que l'inéquation est satisfaite pour $x\leq -2$ et $-1\leq x<2$ (car pour $x=2$ le dénominateur s'annule) ; l'ensemble solution est $S=]-\infty,-2]\cup[-1,2[$.

Exercice 8

Résoudre l'équation $x^2-x-1=0$, on notera x_1 la racine positive et x_2 la racine négative, montrer qu'on a la relation :

$$\frac{1}{x_1}=-x_2$$

Réponse. On utilise la méthode de résolution des équations du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$; ici $a=1$, $b=-1$, $c=-1$ donc $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times 1\times(-1)=5$ est positif. Il y a donc deux solutions $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-1)-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Calculons :

$$\frac{1}{x_1}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}=\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5}=\frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-x_2$$