

Mathématiques Devoir Surveillé 2

Durée 1h30 - Calculatrices et documents interdits

7 décembre 2018

EXERCICE 1

Dans cet exercice, (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) est un repère orthonormé.

- Rappeler la définition d'un repère orthonormé.
- Soient B, C, D les points tels que $\vec{OB} = 3\vec{OI}$, $\vec{OD} = 3\vec{OJ}$, et $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$. Soient également O', B', C', D' les points tels que $\vec{OB'} = \frac{2}{3}\vec{OB}$, $\vec{BC'} = \frac{2}{3}\vec{BC}$, $\vec{CD'} = \frac{2}{3}\vec{CD}$, $\vec{DO'} = \frac{2}{3}\vec{DO}$. Placer les points $O, I, J, B, C, D, O', B', C', D'$ sur une figure.
- Quelques calculs vectoriels
 - Montrer que les vecteurs $\vec{O'B'}$ et $\vec{D'C'}$ sont égaux. Que peut-on en déduire quant à la nature du quadrilatère $O'B'C'D'$?
 - On note E le milieu de $[OC]$. Montrer que $\vec{EO'} + \vec{EC'} = \vec{0}$. Qu'en déduire sur le milieu du segment $[O'C']$?
- Coordonnées
 - Indiquer les coordonnées des points B, C, D, O', B', C', D' .
 - Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{O'B'}$ et $\vec{D'C'}$. Ces résultats sont-ils compatibles avec ceux de la question 3(a) ?
 - Calculer les distances $O'B'$ et $O'D'$.
 - Calculer les coordonnées des milieux des segments $[OC]$ et $[O'C']$. Ces résultats sont-ils compatibles avec ceux de la question 3(b) ?
- Produits scalaires
 - Calculer le produit scalaire $\vec{O'B'} \cdot \vec{O'D'}$. Qu'en déduire sur les droites $(O'B')$ et $(O'D')$?
 - En utilisant le produit scalaire, calculer $O'B'^2$ et $O'D'^2$. Ces résultats sont-ils compatibles avec ceux de la question 4(c) ?
- Au vu de tous les résultats précédents, quelle est la nature du quadrilatère $O'B'C'D'$?

EXERCICE 2

- Rappeler les valeurs des cosinus, sinus et tangentes des angles remarquables $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et placer les points correspondant à ces angles sur le cercle trigonométrique.

2. Le but des questions qui suivent est de retrouver par le calcul la valeur de $\cos(\frac{\pi}{3})$.

(a) Rappeler les formules permettant d'exprimer $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$.

(b) Utiliser ces formules pour exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos a$. En déduire une expression de $\cos(\frac{2\pi}{3})$ en fonction de $\cos(\frac{\pi}{3})$.

(c) En utilisant $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donner une autre expression de $\cos(\frac{2\pi}{3})$ en fonction de $\cos(\frac{\pi}{3})$.

(d) Combiner les résultats des deux questions précédentes pour montrer

$$2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0$$

(e) Soit x un nombre réel. Montrer que $(2x - 1)(x + 1) = 2x^2 + x - 1$, et utiliser ce résultat pour résoudre l'équation $2x^2 + x - 1 = 0$.

(f) Déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{3})$.