# Mathématiques
# Devoir Surveillé 2

**Durée 1h30 - Calculatrices et documents interdits**

7 décembre 2018

### Exercice 1

Dans cet exercice, $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormé.

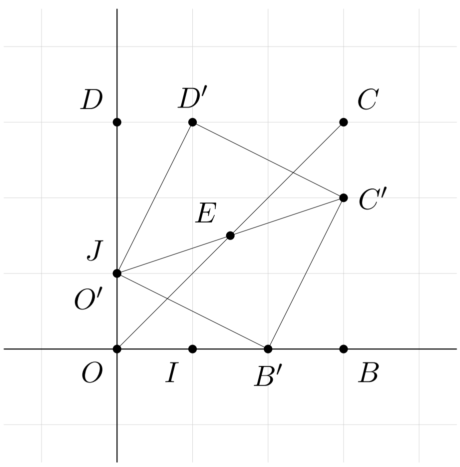
1. Rappeler la définition d'un repère orthonormé.

Réponse. Un repère orthonormé du plan est la donnée d'un point appelé *origine* du repère et noté le plus souvent $O$, et de deux vecteurs notés $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, orthogonaux entre eux et de norme 1 : $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.

À la place des deux vecteurs on peut se donner deux points $I$ et $J$ vérifiant que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont orthogonaux et de norme 1. On note alors $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.

2. Soient $B, C, D$ les points tels que $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OJ}$, et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. Soient également $O', B', C', D'$ les points tels que $\overrightarrow{OB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DO'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DO}$. Placer les points $O, I, J, B, C, D, O', B', C', D'$ sur une figure.

Réponse.




3. Quelques calculs vectoriels

(a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{O'B'}$ et $\overrightarrow{D'C'}$ sont égaux. Que peut-on en déduire quant à la nature du quadrilatère $O'B'C'D'$ ?

Réponse.

Rappel. Dans cette question on va utiliser la relation de Chasle dont on rappelle les 3 formes : si $M$, $P$ et $Q$ sont 3 points alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} \\ &= \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{QM} \\ &= \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MP}\end{aligned}$$

Remarquons d'abord que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}$. En effet :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OC} && \text{par hypothèse} \\ \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} && \text{par soustraction de } \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{DC} && \text{par la relation de Chasle}\end{aligned}$$

Par conséquent on a $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{D'C}$ car :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB'} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} && \text{par hypothèse} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \\ &= -\overrightarrow{CD'} && \text{par hypothèse} \\ &= \overrightarrow{D'C}\end{aligned}$$

On peut démontrer que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$ par un calcul similaire à celui de $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}$ ; on peut aussi déduire cela en considèrant que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}$, que l'on a déjà démontré, a pour conséquence que $(OBCD)$ est un parallèlogramme, donc que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$.

On en déduit que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{C'C}$ par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OO'} &= \overrightarrow{DO'} - \overrightarrow{DO} && \text{par la relation de Chasles} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DO} && \text{par hypothèse} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{DO} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} && \text{car } \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} \\ &= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC'} && \text{par hypothèse} \\ &= \overrightarrow{C'C}\end{aligned}$$

On a donc : $\begin{cases}\overrightarrow{OB'} &= \overrightarrow{D'C}, \\ \overrightarrow{OO'} &= \overrightarrow{C'C}.\end{cases}$

En soustrayant terme à terme ces deux équations on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OO'} &= \overrightarrow{D'C} - \overrightarrow{C'C} \\ \overrightarrow{O'B'} &= \overrightarrow{D'C'} && \text{par la relation de Chasle appliquée aux 2 membres de l'équation}\end{aligned}$$

De cette dernière égalité on déduit que $(O'B'C'D')$ est un parallèlogramme.

Remarque : on voit bien sur le dessin que $(O'B'C'D')$ est même un carré mais pour l'instant on ne l'a pas démontré, c'est un peu le propos de la suite de l'exercice.

(b) On note $E$ le milieu de $[OC]$. Montrer que $\overrightarrow{EO'} + \overrightarrow{EC'} = \vec{0}$. Qu'en déduire sur le milieu du segment $[O'C']$ ?

Réponse. Le fait que $E$ est le milieu de $[OC]$ se traduit par l'équation :

$$\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$$

Or on a vu à la question précédente que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{C'C}$ ce qui peut aussi s'écrire

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

En ajoutant terme à terme ces deux équations on trouve :

$$\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

et en appliquant deux fois la relation de Chasles on obtient finalement :

$$\overrightarrow{EO'} + \overrightarrow{EC'} = \vec{0}.$$

On en déduit que $E$ est également le milieu de $[O'C']$.

Remarque : on peut montrer de même que $E$ est le milieu de $[BD]$ et aussi de $[B'D']$.

4. Coordonnées

(a) Indiquer les coordonnées des points $B, C, D, O', B', C', D'$.

Réponse.

Rappel : un repère sert à associer à chaque point et à chaque vecteur du plan un couple de nombres réels (on dit aussi des *scalaires)* appelés les *coordonnées* du point ou du vecteur. Les coordonnées $(x, y)$ d'un vecteur $\vec{u}$ sont définies par l'équation :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

ce que l'on note aussi $\vec{u}(x, y)$.

Les coordonnées $(x_M, y_M)$ d'un point $M$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$, donc définies par l'équation :

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath}$$

ce que l'on note $M(x, y)$.

Par hypothèse $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath} = 1.\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OJ} = 0.\vec{\jmath} + 1.\vec{\jmath}$. Donc on a $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$.

On a $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OI} = 3\vec{\imath}$, donc $B(3, 0)$.

On a $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OJ} = 3\vec{\jmath}$, donc $D(0, 3)$.

On a $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, donc $C(3, 3)$.

On a $\overrightarrow{OB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}(3\vec{\imath}) = 2\vec{\imath}$, donc $B'(2, 0)$.

On a vu que $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(3\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$, donc $O'(0, 1)$.

On a $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC'} = 3\vec{\imath} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = 3\vec{\imath} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 3\vec{\imath} + \frac{2}{3}(3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 3\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, donc $C'(3, 2)$.

On a $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD'} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \frac{2}{3}(3\vec{\jmath} - (3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})) = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, donc $D'(1, 3)$.

(b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{O'B'}$ et $\overrightarrow{D'C'}$. Ces résultats sont-ils compatibles avec ceux de la question 3(a) ?

Réponse.

Rappel : si on a deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ alors $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

On a vu que $O'(0, 1)$ et $B'(2, 0)$ donc $\overrightarrow{O'B'}(2, -1)$.

Comme $D'(1, 3)$ et $C'(3, 2)$ on a $\overrightarrow{D'C'}(2, -1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{O'B'}$ et $\overrightarrow{D'C'}$ ont mêmes coordonnées, ils sont donc égaux, comme vu à la question (3)a.

(c) Calculer les distances $O'B'$ et $O'D'$.

RÉPONSE.

RAPPEL : la distance entre deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ ; la norme du vecteur $\vec{u}(x, y)$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui en combinant les deux donne :

$$M_1M_2 = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Par conséquent, comme $\overrightarrow{O'B'}(2, -1)$ :

$$\begin{aligned} O'B' &= \|\overrightarrow{O'B'}\| \\ &= \sqrt{2^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Comme $O'(0, 1)$ et $D'(1, 3)$ :

$$\begin{aligned} O'D' &= \|O'D'\| \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

REMARQUE : on a déjà vu que $(O'B'C'D')$ est un parallèlogramme ; maintenant on sait que ses deux côtés $[O'B']$ et $[O'D'$, qui sont adjacents, sont de longueurs égales, on en déduit que $(O'B'C'D')$ est un losange.

(d) Calculer les coordonnées des milieux des segments $[OC]$ et $[O'C']$. Ces résultats sont-ils compatibles avec ceux de la question 3(b) ?

RÉPONSE.

RAPPEL : si $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ sont deux points, leur milieu a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Comme $O(0, 0)$ et $C(3, 3)$ leur milieu $E$ a pour coordonnées $\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Comme $O'(0, 1)$ et $C'(3, 2)$ leur milieu a pour coordonnées $\left(\frac{0+3}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Les deux points ont les mêmes coordonnées, ils sont donc égaux ; on retrouve ainsi le résultat de la question (3)b : $E$ est le milieu de $[O'C']$.

5. Produits scalaires

(a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{O'B'} \cdot \overrightarrow{O'D'}$. Qu'en déduire sur les droites $(O'B')$ et $(O'D')$ ?

RÉPONSE.

RAPPEL : si $\vec{u}_1(x_1, y_1)$ et $\vec{u}_2(x_2, y_2)$ sont deux vecteurs alors leur produit scalaire est :

$$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$$

Comme $\overrightarrow{O'B'}(2, -1)$ et $\overrightarrow{O'D'}(1, 2)$ on a :

$$\overrightarrow{O'B'} \cdot \overrightarrow{O'D'} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$$

Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{O'B'}$ et $\overrightarrow{O'D'}$ sont orthogonaux, d'où l'on déduit que les droites $(O'B')$ et $(O'D')$ sont perpendiculaires.

(b) En utilisant le produit scalaire, calculer $O'B'^2$ et $O'D'^2$. Ces résultats sont-ils compatibles avec ceux de la question 4(c) ?

RÉPONSE.

RAPPEL : Si $\vec{u}$ est un vecteur alors $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u}$.

Comme $\overrightarrow{O'B'}(2,-1)$ on a :

$$\begin{aligned} O'B'^2 &= \|\overrightarrow{O'B'}\|^2 && \text{par définition de la distance entre deux points} \\ &= \overrightarrow{O'B'} \cdot \overrightarrow{O'B'} \\ &= 2 \times 2 + (-1) \times (-1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{O'D'}(1,2)$ on a :

$$\begin{aligned} O'D'^2 &= \|\overrightarrow{O'D'}\|^2 \\ &= \overrightarrow{O'D'} \cdot \overrightarrow{O'D'} \\ &= 1 \times 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

On retrouve les calculs de la question (4)c où l'on avait vu que $O'B' = O'D' = \sqrt{5}$.

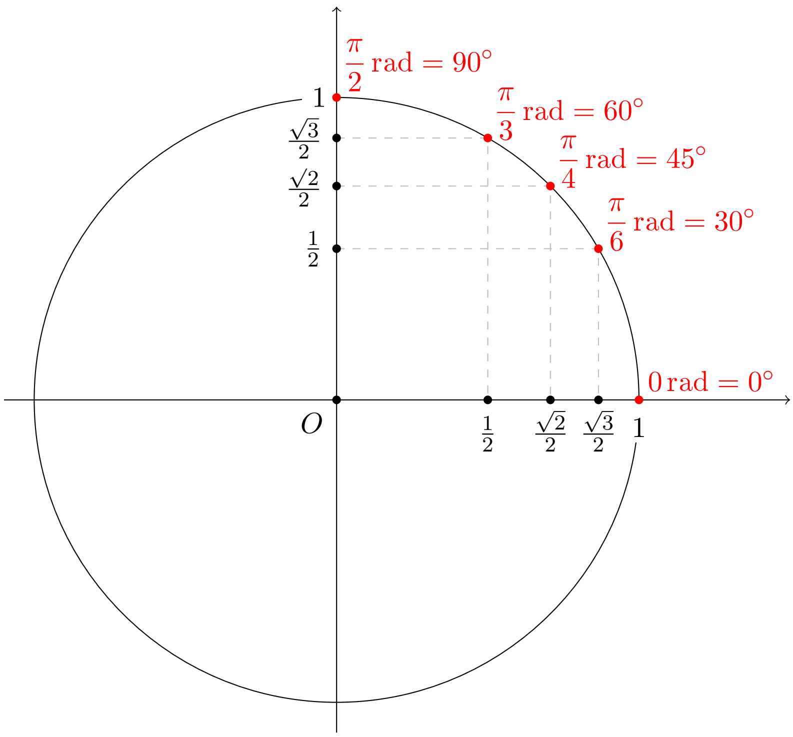
6. Au vu de tous les résultats précédents, quelle est la nature du quadrilatère $O'B'C'D'$ ?

RÉPONSE. On a vu par deux calculs différents que $\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{D'C'}$ ce qui montre que $(O'B'C'D')$ est un parallèlogramme. Ensuite on a vu, également par deux calculs différents que $O'B' = O'D'$, donc que deux côtés adjacents sont de même longueur, d'où l'on a déduit que $(O'B'C'D')$ est un losange. Enfin la dernière question a montré que les côtés $[O'B']$ et $[O'D']$ sont également perpendiculaires. On en déduit (enfin !) que $(O'B'C'D')$ est un carré.

## EXERCICE 2

1. Rappeler les valeurs des cosinus, sinus et tangentes des angles remarquables 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et placer les points correspondant à ces angles sur le cercle trigonométrique.

RÉPONSE.



RAPPEL : par définition $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (si bien que $\tan x$ n'est définie que si $\cos x \neq 0$).

$$\begin{array}{lll}
\cos(0) = 1, & \sin(0) = 0, & \tan(0) = 0, \\
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, & \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \\
\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, & \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{undéfinie.}
\end{array}$$

2. Le but des questions qui suivent est de retrouver par le calcul la valeur de $\cos(\frac{\pi}{3})$.

(a) Rappeler les formules permettant d'exprimer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a, \cos b, \sin a$ et $\sin b$.

RÉPONSE.

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\
\sin(a+b) &= \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b).
\end{aligned}$$

(b) Utiliser ces formules pour exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos a$. En déduire une expression de $\cos(\frac{2\pi}{3})$ en fonction de $\cos(\frac{\pi}{3})$.

RÉPONSE.

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos(a+a) \\
&= \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) \\
&= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\
&= \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) && \text{car } \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1, \text{ donc } \sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) \\
&= 2\cos^2(a) - 1
\end{aligned}$$

Si on applique cette formule avec $a = \frac{\pi}{3}$ on obtient :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1$$

REMARQUE : en remplaçant $\cos^2(a)$ par $1 - \sin^2(a)$ on obtient également : $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$.

(c) En utilisant $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donner une autre expression de $\cos(\frac{2\pi}{3})$ en fonction de $\cos(\frac{\pi}{3})$.

RÉPONSE. On applique la formule de $\cos(a+b)$ avec $a = \pi$ et $b = -\frac{\pi}{3}$ :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \cos(\pi)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin(\pi)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
&= -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) && \text{car } \cos(\pi) = -1 \text{ et } \sin(\pi) = 0 \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) && \text{car } \cos(-a) = \cos a \text{ pour tout angle } a
\end{aligned}$$

(d) Combiner les résultats des deux questions précédentes pour montrer

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$$

RÉPONSE. On a montré les deux égalités suivantes : $\begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$

On en déduit :

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{donc} \quad 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0 \qquad \text{en ajoutant } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ aux deux membres de l'équation}$$

(e) Soit $x$ un nombre réel. Montrer que $(2x-1)(x+1) = 2x^2 + x - 1$, et utiliser ce résultat pour résoudre l'équation $2x^2 + x - 1 = 0$.

RÉPONSE. On développe le membre gauche :

$$\begin{aligned} (2x-1)(x+1) &= 2x(x+1) - (x+1) \\ &= 2x^2 + 2x - x - 1 \\ &= 2x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 1 = 0 &\text{ ssi } (2x-1)(x+1) = 0 \\ &\text{ ssi } 2x - 1 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \quad \text{car un produit est nul ssi l'un de ses facteurs est nul} \\ &\text{ ssi } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

REMARQUE : on peut aussi, mais ça n'est pas très efficace, résoudre cette équation du second degré par la méthode usuelle (avec $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$) : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$, et on retrouve les 2 mêmes solutions : $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 2} = -1$.

(f) Déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{3})$.

RÉPONSE. On a vu que $2\cos^2(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{3}) - 1 = 0$, c'est-à-dire que $\cos(\frac{\pi}{3})$ est l'une des solutions de l'équation $2x^2 + x - 1 = 0$. Comme $\cos(\frac{\pi}{3})$ est positif (car tous les angles compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ ont un cosinus positif) on ne peut avoir $\cos(\frac{\pi}{3}) = -1$ et on retrouve donc la valeur connue :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$