Mathématiques
Vecteurs et Géométrie

Année de Mise à niveau Scientifique

23 octobre 2018

1 Calculs de base sur les vecteurs

Exercice 1

1. Dessiner un vecteur $\vec{u}$ quelconque, et les vecteurs $2\vec{u}$, $4\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$ et $-\frac{3}{2}\vec{u}$
2. Faire la somme de ces 4 vecteurs graphiquement puis vérifier le calcul

Exercice 2

1. Dessiner deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la longueur de $\vec{u}$ étant le double de celle de $\vec{v}$, et qui font un angle compris entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$.
2. Dessiner les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}+2\vec{v}$, $\vec{u}-4\vec{v}$, $-3\vec{u}+\vec{v}$
3. Dessiner le vecteur somme des 4 vecteurs précédents

Exercice 3

ABC est un triangle.

1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Que peut-on dire du quadrilatère $ADBC$?
2. Construire le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un rectangle de centre I et M un point quelconque. Construire le point N tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC}$. Quelle est la nature du quadrilatère $AINM$?

Exercice 5

On considère un objet soumis à trois forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ (Figure 1).

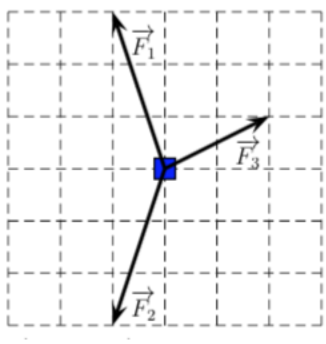

Figure 1 –

L'objet est-il en équilibre ou va-t-il se déplacer ? Dans quelle direction ?

Exercice 6
Soit A, B et C trois points. Placer les points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = 0,5\overrightarrow{AD} - 0,8\overrightarrow{BC}$.

Exercice 7
ABC est un triangle. Placer les points E, F, G et H tels que :

1. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$
4. $\overrightarrow{AH} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Exercice 8
$[AB]$ est un segment de longueur 8 cm. On cherche le point M tel que : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

1. Démontrer, en utilisant la relation de Chasles, que l'égalité ci-dessus s'écrit : $4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
2. En déduire l'expression de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M.

Exercice 9
ABC est un triangle, D et E sont les points tels que : $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$. Faire une figure, puis démontrer que C est le milieu du segment $[AD]$.

Exercice 10
$ABDC$ est un quadrilatère tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. Soit E le symétrique de A par rapport à C. Démontrer que E est le symétrique de B par rapport à D.

Exercice 11
Dans un repère orthonormal, représenter les vecteurs $\vec{u}(1;-2)$ et $\vec{v}(3;4)$:

1. avec pour origine le point O
2. avec pour origine le point $A(2;3)$

Exercice 12
Dans un repère, on donne les points : $A(1;2)$, $B(-1;3)$ et $C(4;6)$. Calculer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ et les longueurs AB, BC et AC.

Exercice 13
Dans un repère, on donne $\vec{u}(2;3)$, $A(-1;4)$ et $B(3;-2)$. Calculer les coordonnées des points C et D qui vérifient $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BD}$

Exercice 14
Dans un repère, on considère les points : $E(-1;-2)$, $F(3;-4)$ et $G(4;7)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$.
2. En déduire les coordonnées du point H tel que $EFHG$ soit un parallélogramme.

Exercice 15
Dans un repère, on considère les points : $A(-2;1)$; $B(3;4)$ et $C(-5;2)$. Calculer les coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Exercice 16
Dans un repère, on donne les points $A(-2;2)$, $B(1;-3)$, $C(9;-1)$ et $D(6;4)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. Quel est la nature du quadrilatère $ABCD$?
3. Quelles sont les coordonnées des milieux I et J de $[AC]$ et $[BD]$?

Exercice 17
Soit, dans un repère orthonormé, les points : $A(-5;1)$, $B(-1;3)$, $C(5;1)$ et $D(1;-1)$.

1. Placer les points A, B, C et D.

2. Démontrer des deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 18
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère le point $A(2;3)$. Déterminer les coordonnées du point B situé sur l'axe des abscisses et tel que $AB = 5$.

Exercice 19
Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont colinéaires.

1. $\vec{u}(2;-3)$ et $\vec{v}(-1;\frac{3}{2})$.
2. $\vec{u}(\frac{1}{2};\frac{1}{3})$ et $\vec{v}(\frac{4}{5};\frac{3}{3})$.
3. $\vec{u}(\sqrt{2};\sqrt{3})$ et $\vec{v}(-2;-\sqrt{6})$.

Exercice 20
Dans chaque cas, déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1. $\vec{u}(2;6)$ et $\vec{v}(m;3)$.
2. $\vec{u}(-m;4m-3)$ et $\vec{v}(1;-3)$.
3. $\vec{u}(27;2m)$ et $\vec{v}(2m;3)$.

Exercice 21
Trouver le réel y tel que les trois points $A(2;-3)$, $B(1;7)$ et $C(-1;y)$ soient alignés.

Exercice 22
Dans un repère, on donne les points $A(-2;1)$, $B(3;3)$, $C(1;\frac{11}{15})$ et $D(\frac{45}{2};\frac{54}{5})$.

1. Démontrer que les points A, B et D sont alignés.
2. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 23
Dans un repère, on donne les points : $M(0;-3)$, $N(2;3)$, $P(-9;0)$ et $Q(-1;-1)$.

1. Calculer les coordonnées des points A et B tels que :
   (a) $\overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$
   (b) $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MQ}$
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$.
3. Démontrer que les points P, A et B sont alignés.

Exercice 24
Dans un repère, on donne les points : $A(1;-1)$, $B(-1;-2)$ et $C(-2;2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point G vérifiant : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D vérifiant : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
3. Faire une figure. Que peut-on conjecturer pour les points B, G et D ? Démontrer cette conjecture.

Exercice 25
$ABCD$ est un rectangle.

1. Faire une figure et placer les points I, J, K et L tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}; \qquad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}; \qquad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}; \qquad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

2. Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$, exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.
4. Démontrer que le centre du rectangle est le milieu du segment $[IK]$.

Exercice 26
$ABCD$ est un rectangle. Soit I le milieu de $[AD]$ et les points J et K tels que $\overrightarrow{DJ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DC}$ et

$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Déterminer le point L de (BC) tel que $(IJ)//(KL)$.

Exercice 27
ABC est un triangle et N et P tels que : $\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure et placer N et P.
2. On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB} : \overrightarrow{AC})$. Déterminer les coordonnées des points N et P.
3. Démontrer que A, N et P sont alignés.

Exercice 28
On se donne trois points non alignés O, A et B, et on construit les points A' et B' définis par $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$. À quel théorème le résultat fait-il penser ?

Exercice 29
On se donne un triangle ABC, un point quelconque O, et soit A' le milieu de $[BC]$. On appelle G le point situé entre A et A', aux 2/3 du segment, du côté de A'. Calculer $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'}$, et en déduire que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$. Montrer que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, et en déduire que G se trouve aux 2/3 de chaque médiane du triangle.

Exercice 30
On se donne quatre points quelconques A, B, C et D de l'espace, I le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BD]$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ est indépendant du point M choisi dans l'espace, et donner sa valeur en fonction des points I et J. A quelle condition sur $ABCD$ ce vecteur constant est-il le vecteur nul ?

Exercice 31
Un mobile O est soumis à une force horizontale $\vec{F_1}$ d'intensité F et une force $\vec{F_2}$ inclinée à 60 degrés par rapport à $\vec{F_1}$, et d'intensité $2F$. Trouver l'intensité de la résultante à laquelle est soumis le mobile, et son inclinaison θ par rapport à l'horizontale.

2 Produit scalaire

Exercice 32

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer l'égalité :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2$$

2. En déduire que dans un parallélogramme la somme des carrés des quatre cotés est égale à la somme des carrés des deux diagonales.
3. Soit ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$. Démontrer que (Théorème de la médiane) :

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 2\overrightarrow{AA'}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$$

Exercice 33
Soit un triangle ABC avec $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $\widehat{ABC} = 60$ degrés. Calculer la longueur du côté BC.

Exercice 34
Soit I le milieu d'un segment $[AB]$, et M un point quelconque. Montrer que :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI}$$

Exercice 35
On considère le vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. Calculer :

1. $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
2. $(\vec{u} + 2\vec{v})^2$
3. $(-3\vec{u} + \vec{v})^2$
4. $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2$

3 Droites

Exercice 36
Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes :

$$d_1 : y = 2x + 1, \qquad d_2 : y = 5x - 3, \qquad d_3 : y = -2x - 7, \qquad d_4 : y = 7x, \qquad d_5 : y = -5$$

Exercice 37
Représenter dans un repère les droites suivantes :

$$d_1 : y = -3x + 5 \qquad d_2 : y = 4x - 2 \qquad d_3 : y = 5$$

Exercice 38
Soit d la droite d'équation $y = 9x - 11$. Les points $A(12; 97)$ et $B(-6; 65)$ appartiennent-il à la droite d ? Justifier.

Exercice 39
Soient d et d' les droites d'équation respective $y = -3$ et $x = 3$. Parmi les points $A(3; -3)$, $B(3; 3)$, $C(-3; 3)$ et $D(-3; -3)$ lesquels appartiennent à la droite d ? à la droite d' ?

Exercice 40
Dans chaque cas, dire si les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

1. $d_1 : y = 3x + 5$ et $d_2 : y = 3x - 2$
2. $d_1 : y = -3x + 7$ et $d_2 : y = 3x + 8$
3. $d_1 : y = 4x + 1$ et $d_2 : y = 4x$
4. $d_1 : y = 5$ et $d_2 : y = 5x$

Exercice 41
Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse.

1. La droite d'équation $y = 2$ est parallèle à l'axe des ordonnées.
2. La droite d'équation $y = x$ est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ sont parallèles.
4. Les droites d'équation $y = 3$ et $x = 2$ sont sécantes.

Exercice 42

1. Donner l'équation de la droite d_1 passant par le point $A(0; 2)$ et parallèle à la droite d_2 d'équation $y = -2x + 5$.
2. Donner l'équation de la droite d_3 passant par le point $A(0; -1)$ et parallèle à l'axe des abscisses.
3. Donner l'équation de la droite d_4 passant par le point $A(3; 2)$ et parallèle à l'axe des ordonnées.

Exercice 43
On se donne deux droites D et D' concourantes en un point O. Sur D on place deux points A et B, le point O étant extérieur au segment $[AB]$. On fait de même avec A' et B' sur la droite D'. Montrer que les droites (AA') et (BB') sont parallèles si et seulement si $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$. On choisira un repère très simple, bien adapté aux données. Quel théorème vient-on de démontrer en quatre lignes ?

4 Trigonométrie

Exercice 44
Rappeler les valeurs des cosinus, sinus et tangentes des angles remarquables 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et placer les points correspondant à ces angles sur le cercle trigonométrique.

Exercice 45
On considère les angles $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, $(\pi - \alpha)$, $(\pi + \alpha)$, $\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ et $(2\pi - \alpha)$, α étant un réel quelconque. Faire un schéma sur le cercle trigonométrique montrant ces angles et donner

leur cosinus, sinus, tangentes et cotangentes en fonction de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ et $\cot\alpha$.

Exercice 46
On considère un réel α tel que $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$ et $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.
Calculer les valeurs exactes de :

$$\cos\alpha; \qquad \sin 2\alpha; \qquad \cos 2\alpha; \qquad \sin 3\alpha; \qquad \cos 3\alpha$$

Exercice 47
Soit a donné. Résoudre l'équation $\cos x = \cos a$: on utilisera l'intersection du cercle trigonométrique et d'une certaine droite pour visualiser la situation. Résoudre ensuite l'équation $\cos 3x = 1/2$

Exercice 48
Soient a et b deux réels quelconques. Montrer qu'il existe un unique $\rho > 0$ et un unique θ modulo 2π tels que $a = \rho\cos\theta$, $b = \rho\sin\theta$. Donner une forme plus condensée de $a\cos t + b\sin t$ où t est quelconque.

Exercice 49
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\sin x = 0, \quad \cos x = 0, \quad \sin x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = \frac{1}{2}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin x = 1, \quad \cos x = 1, \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x = -\frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad \sin x = -1, \quad \cos x = -1.$$

Exercice 50
Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes :
1. $A = \cos(\pi - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) + \sin x + \sin(\pi + x)$;
2. $B = \cos(\frac{5\pi}{2} - x) + \sin(\frac{5\pi}{2} + x)$.

Exercice 51
Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2},$$
$$\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin^2 x = a \quad \text{(respectivement pour } a = 0,\ a = 1 \text{ et } a = 2).$$

Exercice 52
Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\cos(\sin(x)) = 1, \qquad \cos(\sin(x)) = 0, \qquad \sin(\cos(x)) = 0, \qquad \sin(\cos(x)) = 1$$
$$\cos(\sin(x)) = -1, \qquad \sin(\cos(x)) = 2$$

Exercice 53 (Utilisation des relations trigonométriques)
1. Rappeler les formules pour $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ puis utiliser celles-ci pour exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. En remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
3. En remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{24}$ calculer $\cos\dfrac{\pi}{24}$ et $\sin\dfrac{\pi}{24}$.
4. Soit un réel α tel que $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. On suppose que $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$. Calculer $\cos\alpha$, $\cos(2\alpha)$, $\sin(2\alpha)$, $\sin(4\alpha)$, $\sin(3\alpha)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$\cos x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{3}, \qquad \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Indication : transformer la première équation en divisant ses deux membres par 2 et la deuxième équation en multipliant ses deux membres par $\sqrt{2}$ pour utiliser des relations trigonométriques.

6. Discuter selon les valeurs du nombre réel c, l'existence de solutions de l'équation :

$$\cos x + \sin x = c$$

Pour le réflexion et l'approndissement :

— Peut-on donner une expression générale des solutions quand elles existent en fonction de c ?

— Généraliser à des équations de la forme :

$$\sin(\alpha)\cos(x) + \cos(\alpha)\sin(x) = \sin(\beta)$$

où α et β sont des réels quelconques.

5 Coordonnées polaires

EXERCICE 54

Placer les points suivants définis par leurs coordonnées polaires.

$$A(1;0); \qquad B\left(1;\frac{\pi}{2}\right); \qquad C(1;\pi); \qquad D\left(1;\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$E\left(2;\frac{5\pi}{6}\right); \qquad F\left(2;\frac{7\pi}{6}\right); \qquad G\left(3;-\frac{3\pi}{4}\right); \qquad H\left(3;-\frac{\pi}{4}\right)$$

EXERCICE 55

Indiquer les coordonnées polaires (r,θ) avec $\theta \in [0,2\pi]$, de chacun des points repérés sur la figure 2.

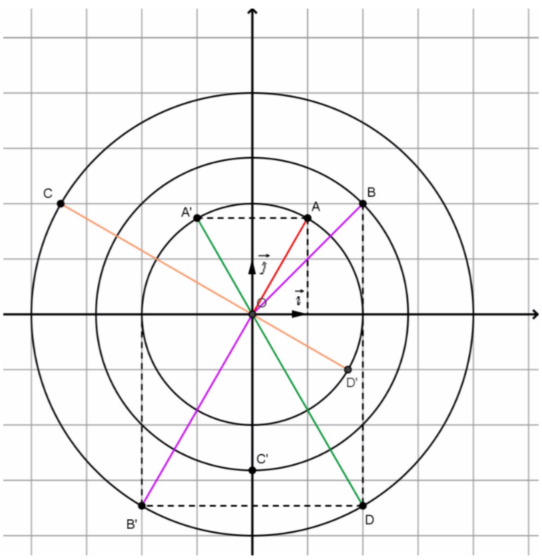

FIGURE 2 –

EXERCICE 56

Chacun des points suivants est défini par ses coordonnées cartésiennes (x,y). Trouver ses coordonnées polaires (r,θ), $\theta \in [-\pi,\pi]$.

$$A(-1,1), \qquad B(\sqrt{3},1); \qquad C(-1,\sqrt{3}), \qquad D(0,-4)$$

$$E(3,0); \qquad F(-2,2); \qquad G\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3}{2}\right), \qquad H\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exercice 57
Chacun des points suivants est défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y). Trouver ses coordonnées polaires (r, θ), $\theta \in [-\pi, \pi]$.

$$A(\sqrt{2}, -\sqrt{6}), \qquad B(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), \qquad C\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right), \qquad D(-3, 0), \qquad E\left(0, -\frac{3}{4}\right),$$
$$F\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad G\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \qquad H(-2\sqrt{3}, 2), \qquad I\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right).$$

Exercice 58
Trouver les coordonnées cartésiennes (x, y) des points suivants définis par leurs coordonnées polaires.

$$A(1, 0), \qquad B\left(2, \frac{\pi}{2}\right), \qquad C(3, \pi), \qquad D\left(4, \frac{3\pi}{2}\right), \qquad E\left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right),$$
$$F\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \qquad G\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), \qquad H\left(3, \frac{\pi}{4}\right), \qquad I\left(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right), \qquad J\left(\frac{3}{4}, 20\pi\right),$$
$$K\left(2, \frac{\pi}{3}\right), \qquad L\left(4, \frac{5\pi}{6}\right), \qquad M\left(\frac{1}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right), \qquad N(3, 5\pi), \qquad P\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$$

6 Problèmes

Exercice 59
On veut faire passer par une porte, dont on ne connaît ni la hauteur ni la largeur, une perche dont on ne connaît pas la longueur. Transversalement, il s'en faut de 40 cm pour que la perche ne puisse sortir par la porte, longitudialement il s'en faut 20 cm, et, en oblique, elle sort juste (Figure 3). Quelles sont les dimensions de la porte et de la perche ? *Commentaires : Le problème*

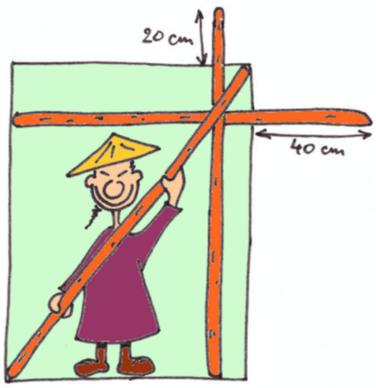

Figure 3 –

est extrait de l'ouvrage chinois "Les Neuf Chapitres sur l'art du calcul" datant du IIe siècle avant J.C. La modélisation se fait en utilisant le théorème de Pythagore et mène à résoudre une équation du second degré

Exercice 60
En Mésopotamie, au VIe siècle avant J.C., les arpenteurs babyloniens utilisent la méthode suivante pour obtenir un carré dont la surface est égale à la moitié de celle d'un carré donné (Figure 4). On considère un carré $ABCD$. Le cercle de centre A passant par B coupe la diagonale $[AC]$ en E. Les arpenteurs babyloniens affirment que l'on peut construire un carré de diagonale $[AE]$ dont l'aire est égale à la moitié de l'aire du carré $ABCD$.

1. **Construction :** Réaliser une figure et vérifier la méthode babylonienne après avoir effectué

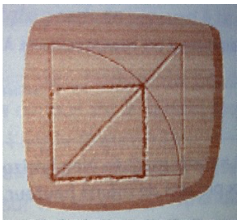

FIGURE 4 – Tablette d'argile

quelques mesures.

2. **Démonstration :** On considère le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.
   (a) Dans ce repère, donner l'aire du carré $ABCD$.
   (b) Dans le cercle trigonométrique, calculer la longueur des côtés du quadrilatère de diagonale $[AE]$.
   (c) En déduire qu'il s'agit d'un carré et calculer son aire. Conclure.

EXERCICE 61
Pour quelle valeur de x (x est réel) le produit scalaire des 2 vecteurs $\vec{a}(1;-1)$ et $\vec{b}(2x;10)$ est égale à 10 ?

EXERCICE 62
Calculer le produit scalaire de $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ quand $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 2$ et l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égale à 60 degrés.