LMAT04 – Algèbre Linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES N°1

Exercice 1 Des amis vont au bar. Ils consomment 8 cafés et 4 jus d'orange et payent 28 euros. Puis ils recommandent 7 cafés et 5 jus d'orange. Cette fois ci ils payent 29 euros. Quel est le prix du jus d'orange et du café ?

Exercice 2 Un cadet de Gascogne dit à ses amis :"J'ai dépensé 4 écus de plus que le quart de ce que j'avais en entrant dans la taverne et il me reste 2 écus de plus que le quart de ce que j'avais en entrant dans la taverne" Combien avait-il en entrant dans la taverne ?

Exercice 3 Un groupe de 24 personnes, composé d'élèves mineurs, d'élèves majeurs et de professeurs, vont au cinéma. Le billet coute 4 euros pour un élève majeur, 3 euros pour un élève mineur et 9 euros pour un professeur. Le groupe dépense au total 102 euros. Sachant que lors d'une sortie il y a un professeur pour 5 élèves, combien y a-t-il d'élèves mineurs, d'élèves majeurs et de professeurs ?

Exercice 4 $*$ Justifier si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. Soient $\boldsymbol{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, alors $\alpha = 0$ ou $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.
3. Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, alors $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.
4. Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe deux réels non nuls α et β tels que $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Alors l'ensemble des combinaisons linéaires de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est une droite.
5. Il existe 2 vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.
6. Il existe 2 vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.

Exercice 5 $*$ Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. On note E l'ensemble de leurs combinaisons linéaires. Discuter en fonction de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ si les situations suivantes peuvent avoir lieu ?

1. E est réduit au vecteur nul,
2. E est une droite,
3. E est un plan,
4. E est l'espace tout entier.

Exercice 6 $*$ Décrire géométriquement (droite, plan ou $\mathbb{R}^3$ tout entier) l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs suivants :

$$(a) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (c) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 7 Trouver deux vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ qui sont orthogonaux à $\boldsymbol{u} = (1,1,0)$ et orthogonaux entre eux.

Exercice 8 * Déterminer les solutions des systèmes suivants. Représenter graphiquement les solutions.

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ 3x+5y=17 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3y+4z=3 \\ x+4y+5z=4 \end{cases}$$

Exercice 9 * Ayant à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{cases} 2x+7y+z=1 \\ 2x+3y-5z=4 \\ -4x+3y+z=5 \end{cases}$$

un étudiant démarre ainsi :

j'élimine	x	en	retranchant	e_2 de e_1 :	$4y+6z=-3$
"	y	"	"	e_3 de e_2 :	$6x-6z=-1$
"	z	"	"	e_1 de e_3 :	$-6x-4y=4$

Le système ainsi obtenu est-il équivalent au système initial ? Résoudre le système par la méthode de Gauss.

Exercice 10 Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - y'(t) - y(t) = \cos(t).$$

Cette équation peut décrire un oscillateur forcé amorti comme vous l'avez vu en mécanique. Ce type d'équation admet une solution particulière de la forme : $y(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$.
Trouver a et b et esquisser le graphe de la solution.

Exercice 11 Lors de votre dernier voyage en Suisse vous avez pris le bateau pour faire un aller-retour entre Rheinfall et Rheinau. L'aller a pris 20 minutes et le retour 40 minutes. La distance entre Rheinfall et Rheinau est de 8 kilomètres. À quelle vitesse navigue le bateau (par rapport à l'eau) et à quelle vitesse s'écoule la rivière ? Nous supposerons que ces deux vitesses sont constantes durant le temps du trajet.

Exercice 12 $*$ Sur une île déserte vivent une bande de loups, une bande de serpents et une bande de chèvres. Chaque nuit, chaque loup égorge une chèvre, chaque serpent mord un loup (et la blessure est mortelle) et chaque chèvre piétine (à mort) un serpent. On suppose qu'il n'y a pas d'autres pertes de vie (par vieillesse par exemple), ni gains (par naissances...). On note ℓ^*, s^* et c^* le nombre respectif de loups, serpents et chèvres le 21 janvier 2013 au soir, et ℓ, s et c le nombre respectif de loups, serpents et chèvres le 22 janvier 2013 au matin. Exprimer ℓ, s et c en fonction de ℓ^*, s^* et c^* dans le cas où toutes les morts sont simultanées puis dans le cas où chaque loup égorge une chèvre, puis chaque chèvre qui reste piétine (à mort) un serpent et enfin chaque serpent qui reste mord un loup (et la blessure est mortelle).

N.B. Pour une suite à ce petit modèle, voir la planche suivante.

Exercice 13 L'économiste américain Wassily Leontief (1905-1999), prix Nobel d'économie en 1973, s'est intéressé au problème suivant : quelle doit être la production de chaque secteur d'une économie de sorte que la demande totale soit satisfaite ? Nous considérons ici un exemple très simple d'une économie avec deux secteurs A et B. Supposons que la demande des consommateurs pour ces produits soit respectivement de 1000 et 780 millions d'euros par année. Quelle production a et b (en millions d'euros par an) doivent fournir les deux secteurs pour satisfaire la demande ? Vous pouvez être tentés de dire 1000 et 780 respectivement, mais les choses ne sont pas aussi simples que cela. Nous devons aussi prendre en compte la demande d'un secteur à l'autre. Supposons que le secteur A produise de l'électricité. Bien sûr la production d'à peu près n'importe quel bien requiert de l'électricité. Supposons que le secteur B nécessite 10 centimes d'euros d'électricité par euro que B produit, et que l'industrie A a besoin de 20 centimes d'euros de biens de B par euros de production. Déterminez les productions a et b qui permettent de satisfaire à la fois la demande des consommateur et la demande interindustrielle.

Exercice 14 Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-z=-12 \\ 3x-5y+13z=18 \\ x-2y+5z=k \end{cases},$$

où k est un nombre arbitraire.
Pour quelles valeurs de k le système a-t-il au moins une solution ? Pour chacune de ces valeurs de k, déterminer le nombre de solutions du système. Déterminer toutes les solutions pour chaque valeur de k.

Exercice 15 * Trouver les polynômes de degré 2 (i.e. un polynôme de la forme $f(t)=at^2+bt+c$) dont le graphe passe par les points (1,-1), (2,3) et (3,13). Dessiner les graphes de ces polynômes.

Exercice 16 Trouver un système d'équations linéaires en x, y et z dont les solutions sont

$$x=6+5t,\ y=4+3t,\ z=2+t,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

Exercice 17 * Soient a, α et β des réels. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} ax+y=\alpha \\ x+ay=\beta \end{cases}$$

Donner les valeurs de a, α et β pour lesquelles le système admet :

1. une solution unique,
2. une infinité de solutions,
3. pas de solution.

Exercice 18 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} ax+y+2z=1 \\ ax+ay+3z=1 \\ ax+ay+az=1 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a l'élimination de Gauss va-t-elle échouer ?

Exercice 19 Résoudre le système linéaire qui suit (selon la valeur de a) :

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+y+az=2 \\ x+ay+z=3 \end{cases}$$