Aix-Marseille Université 2012-2013

Licence MI

ALGÈBRE LINÉAIRE – PLANCHE D'EXERCICES 3

Exercice 1 * Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - y = 0\}$$

Même question pour les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}, \quad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 4z = 0\}$$

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\right\}, \quad D = \left\{\left(x,y,z\right) \in \mathbb{R}^3 / \ x \le y \le z\right\}.$$

Exercice 2 * Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$E_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = z\}$; $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$;
$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \ge 0\}$; $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$;
$E_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(1) = 0\}$; $E_6 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 1\}$;
$E_7 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P' = 3\}$; $E_8 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ est croissante}\}$.

Exercice 3 * Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que $V \cap W$ est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$? Est-ce que $V \cup W$ est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 4 * Considérons u_1,..., $u_k \in \mathbb{R}^n$ avec $u_1 = 0$. Est-ce que ces vecteurs sont linéairement indépendants ?

Exercice 5 Est-ce que ces vecteurs sont linéairement indépendants ? Vous pouvez faire d'abord un dessin pour vous faire une idée.

i) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ii) $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$.

iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

iv) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

v) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

vi) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

vii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 $*$ Décrire géométriquement (droite, plan ou $\mathbb{R}^3$ tout entier) l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs suivants :

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $v_1 = (1,2,1,2,1)$, $v_2 = (2,1,2,1,2)$, $v_3 = (1,0,1,1,0)$ et $v_4 = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
3. $v_1 = (2,1,3,-1,4,-1)$, $v_2 = (-1,1,-2,2,-3,3)$ et $v_3 = (1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 8 * Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.

1. Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 9 [Familles de fonctions] Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dire parmi les familles suivantes celles qui sont libres et celles qui sont liées. Ici les vecteurs (au sens éléments d'un espace vectoriel) sont donc des fonctions...

1. $\{f, g, h\}$, avec $f(x) = 2$, $g(x) = 4\sin^2(x)$, $h(x) = \cos^2(x)$
2. $\{f, g, h\}$, avec $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$,$h(x) = \sin(2x)$.
3. $\{f, g\}$, avec $f(x) = x$, $g(x) = \cos(x)$.
4. $\{f, g, h, k\}$, avec $f(x) = (1+x)^2$, $g(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = 3$ et $k(x) = x$.
5. $\{f, g, h\}$, avec $f(x) = \cos(2x)$, $g(x) = \sin^2(x)$; $h(x) = \cos^2(x)$.
6. $\{f, g, h\}$, avec $f(x) = 0$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$.

Exercice 10 * Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs :

$$\{(2,3,-1);(1,-1,2)\} \text{ et } \{(3,2,1);(1,4,-3)\}.$$

Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 11 Vérifier que la famille

$$\{(1,1,0);(0,1,1);(1,0,1)\}$$

engendre $\mathbb{R}^3$ tout entier. Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 12 Vérifier que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$, et en déterminer des bases.

$$\begin{aligned}
F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + z = 0\} \\
G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + z = 0 \text{ et } x = y\} \\
H &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - 2y + z - t = 0\} \\
K &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - 2y + z = 0\}
\end{aligned}$$

Exercice 13 Donner une description géométrique de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (raisonner selon la dimension de ceux-ci). Justifier votre réponse.

Exercice 14 Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\{e_1, e_2, e_3\}$, les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices de E ? :

$$\begin{array}{ll}
\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1\} & \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\} \\
\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_1\} & \{e_1 + 2e_2, e_2 + 2e_3, e_3 + 2e_1\} \\
\{e_1 + e_2, e_2 - 2e_3\} & \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + e_2 - e_3\}
\end{array}$$

Exercice 15 Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Le cas échéant calculer leurs dimensions.

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x+y-z = x+y+z = 0\}$, $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 - z^2 = 0\}$,
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; e^x e^y = 0\}$, $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z(x^2+y^2) = 0\}$.

Exercice 16 * Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 17 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants constituent-ils une base ? (On pourra utiliser la méthode de l'échelonnement)

1. $x_1 = (1,-1,0)$, $x_2 = (1,0,1)$, $x_3 = (1,2,3)$.
2. $x_1 = (1,0,-1)$, $x_2 = (0,1,0)$, $x_3 = (1,1,0)$.
3. $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (2,3,1)$, $x_3 = (0,0,0)$.
4. $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (1,1,0)$, $x_3 = (1,1,1)$.
5. $x_1 = (1,1,-1)$, $x_2 = (1,-1,1)$, $x_3 = (-1,1,1)$.

Exercice 18 Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^4$.

$$V_1 = (0,1,1,1),\; V_2 = (1,0,1,1),\; V_3 = (1,1,0,1),\; V_4 = (1,1,1,0).$$

Dans cette base, calculer les composantes des vecteurs $U = (1,1,1,1)$ et $V = (1,0,0,0)$.

Exercice 19 Soit la famille

$$\{X^3, X^2(X-1), X(X-1)^2, (X-1)^3\} \in \mathbb{R}[X]$$

Montrer qu'elle engendre $\mathbb{R}_3[X]$, le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à trois. Est-ce une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 20 *
Quel est le rang des systèmes de vecteurs suivants ? (On pourra utiliser la méthode de l'échelonnement).

1. $V_1 = (1,0,1)$, $V_2 = (1,1,0)$, $V_3 = (0,1,1)$.
2. $V_1 = (1,0,0,1)$, $V_2 = (1,1,0,0)$, $V_3 = (0,1,1,0)$, $V_4 = (0,0,1,1)$.

Exercice 21 * Les vecteurs suivants sont-ils linéairement dépendants ? Calculer le rang de cette famille.
$V_1 = (1,0,0,2,5)$, $V_2 = (0,1,0,3,4)$, $V_3 = (0,0,1,4,7)$, $V_4 = (2,-3,4,11,12)$.

Exercice 22 Calculer le rang des deux familles de vecteurs ci-dessous.

1. $V_1 = (1,1,0,1)$, $V_2 = (-1,1,1,0)$, $V_3 = (0,-1,1,1)$, $V_4 = (1,1,1,0)$.
2. $V_1^{'} = (1,-1,0,1)$, $V_2^{'} = (1,1,-1,1)$, $V_3^{'} = (0,1,1,1)$, $V_4^{'} = (1,0,1,0)$.

Exercice 23
On considère, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la famille de vecteurs suivants :

$$(1,1,\alpha),\; (1,\alpha,1),\; (\alpha,1,1).$$

Déterminer en fonction de α le rang de cette famille de vecteurs.

Exercice 24 Montrer que tout sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ peut être représenté comme l'image d'une application linéaire (Indication : choisir une famille génératrice de V et considérer la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de cette famille).

Exercice 25 Trouver des vecteurs qui engendrent le noyau de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26 Pour chacune des matrices suivantes décrivez géométriqument l'image de l'application linéaire associée (en tant que droite, plan, etc. dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 27 * Trouver le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants parmi les vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 28

On considère, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la famille de vecteurs suivants :

$$(1,1,\alpha),\ (1,\alpha,1),\ (\alpha,1,1).$$

Déterminer en fonction de α le rang de cette famille de vecteurs.

Exercice 29 * Déterminer la dimension des sous espaces vectoriels engendrés par chacune des 2 familles de vecteurs ci-dessous. Donnez en une base et exprimer les coordonnées de chacun des vecteurs de la famille dans la base trouvée.

1. la famille $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ avec :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad V_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix},$$

2. la famille $\{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ avec :

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix},$$

Exercice 30 *

1. Montrer que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   est une base de l'espace des matrices carrées rééelles d'ordre 2.
   En déduire la dimension de cet espace.
2. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n.
3. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n diagonales.
4. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n symétriques.
5. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures.

Exercice 31 *

Donner une matrice A dont l'image est engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 32

1. Construire une matrice dont le noyau est l'ensemble des multiples du vecteur de composantes $(1, 2, 3)$.

2. Construire une matrice dont le noyau contient le vecteur de composantes $(1, 2, 0)$ et l'image les vecteurs de composantes $(1, 0, 1)$ et $(0, 0, 1)$

Exercice 33 * Soit les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Quelles sont les colonnes pivotales et les colonnes non pivotales ?

2. Déterminer le noyau de A en donnant les équations qui le définissent.

3. Donner une base du noyau et déterminer sa dimension.

4. Quel est l'image de la matrice A ?

5. Soit $b \in \mathbb{R}^4$. Résoudre le système linéaire $Ax = b$.

Exercice 34

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

1. Echelonner la matrice augmentée $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ pour la transformer en $\begin{bmatrix} U & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ où U est échelonnée.

2. Trouver les conditions sur b_1, b_2 et b_3 pour que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ait une solution.

3. Décrire $\mathrm{I}mA$ (plan ? droite ? tout l'espace ?)

4. Décrire $\mathrm{Ker}A$. Trouver une base du noyau.

5. Trouver une solution particulière au système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = (4, 3, 5)$.

6. Trouver la forme totalement échelonnée $\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$.

Exercice 35 [Résolution de systèmes homogènes] Résoudre les système linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 4x & - & y & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & - & w & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & - & w & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & & & + & w & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & + & w & = & 0 \\ & & -y & & & - & w & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & - & b & + & 3c & + & d & - & e & = & 0 \\ 2a & - & b & + & c & + & d & + & e & = & 0 \end{array}\right.$$

Puis recommencer mais cette fois avec un vecteur second membre non nul égal respectivement à :

$$(1,3), \qquad (1,3,7), \qquad (1,2,3,4), \qquad (1,3).$$

Exercice 36 On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. Vect$\{v_1, v_2\}$ et Vect$\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour Vect$\{v_1, v_3, v_4\}$ et Vect$\{v_2, v_5\}$.

Exercice 37 * Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Comparer $F \cap (G + (F \cap H))$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 38 Déterminer si les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants sont supplémentaires, en somme directe :
– $V_1 = \{(x,y,z)$ tels que $x + 2y + z = 0,\ x - z = 0\}$ et $V_2 = \mathrm{V}ect\{(1,a,b)\}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
– $V_1 = \mathrm{V}ect\{(1,2,-1),(1,0,1)\}$ et $V_2 = \mathrm{V}ect\{(0,1,2)\}$.
– $V_1 = \{(x,y,z)$ tels que $x + 2y + z = 0\}$ et $V_2 = \mathrm{V}ect\{(1,0,-1)\}$.
– $V_1 = \{(x,y,z)$ tels que $x + 2y + z = 0\}$ et $V_2 = \mathrm{V}ect\{(1,2,1)\}$.

Exercice 39 Soient x, y, u, v des éléments de $\mathbb{R}^4$. On note M et N les sous espaces vectoriels engendrés respectivement par $\{x, y\}$ et $\{u, v\}$. Dans quels cas a-t-on $M \oplus N = \mathbb{R}^4$?

1. $x = (1,1,0,0)$, $y = (1,0,1,0)$, $u = (0,1,0,1)$, $v = (0,0,1,1)$.
2. $x = (-1,1,1,0)$, $y = (0,1,-1,1)$, $u = (1,0,0,0)$, $v = (0,0,0,1)$.
3. $x = (1,0,0,1)$, $y = (0,1,1,0)$, $u = (1,0,1,0)$, $v = (0,1,0,1)$.

Exercice 40 * Montrer que $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x - y = z\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera une base. Même question avec $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ y = z$ et $x = 0\}$. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Exercice 41

Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ et $(4,2,0)$. Quelle est la dimension de F ? Faire un dessin.

Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.