Aix-Marseille Université 2013-2014

LMAT04

ALGÈBRE LINÉAIRE – PLANCHE D'EXERCICES 4

Exercice 1
1. Déterminer parmi les applications suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, celles qui sont linéaires :

1. $p_1(x,y) = x,\ \ p_2(x,y) = y,$
2. $f_1(x,y) = xy,\ f_2(x,y) = x+y,\ \ f_3(x,y) = x+y+1,\ f_4(x,y) = x^2 - y^2,$
3. $f_5(x,y) = |x+y|,\ f_6(x,y) = \sin x,\ f_7(x,y) = x - 3y.$

2. Déterminer parmi les applications suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, celles qui sont linéaires :

$$g_1(x,y) = (y,x),\ \ g_2(x,y) = (x,y^2),\ \ g_3(x,y) = (1,x).$$

Exercice 2 Déterminer le noyau et l'image (base et dimension) de chacune des applications linéaires f suivantes :

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (3x+y, x-y)$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+2y, 2x+4y)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (z,y,0)$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y, x+2y)$.

Exercice 3 Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que, si $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ désignent les vecteurs de la base canonique, on ait :

$$f(\boldsymbol{e}_1) = (1,1), \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = (0,1), \qquad f(\boldsymbol{e}_3) = (-1,1).$$

Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$ (c.à.d qu'il existe un isomorphisme, i.e. une application linéaire bijective du supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathrm{Im}(f)$).

Quelle est l'image réciproque du vecteur $(1,0)$?
Quelle est l'image réciproque du sous espace vectoriel engendré par $(1,0)$?

Exercice 4 On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$ donnée par :

$$\begin{array}{lcl} f(1,0,0,0) & = & (-1,-1,-1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) & = & (1,0,0,-1,-1,0) \\ f(0,0,1,0) & = & (0,1,0,1,0,-1) \\ f(0,0,0,1) & = & (0,0,1,0,1,1) \end{array}$$

Déterminer l'image d'un vecteur (x_1,x_2,x_3,x_4) de $\mathbb{R}^4$. C'est à dire exprimer le vecteur $f((x_1,x_2,x_3,x_4)) \in \mathbb{R}^6$ en fonction de x_1, x_2, x_3 et x_4. Déterminer le rang de f.

Exercice 5 Donner une application linéaire dont le noyau est le plan d'équation $x+2y+3z=0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 Donner une application linéaire dont le noyau est la droite engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 7 Soit $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Décrivez géométriquement l'image et le noyau des matrices A, A^2 et A^3 .

Exercice 8 * Soit A une matrice carrée. Quelle relation y a-t-il entre $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^2)$? Sont-ils nécessairement égaux ? Mêmes questions pour $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A^2)$.

Plus généralement que peut-on dire de $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(A^2)$, $\mathrm{Ker}(A^3)$, $\mathrm{Ker}(A^4)$, etc.
Même question pour $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Im}(A^2)$, $\mathrm{Im}(A^3)$, $\mathrm{Im}(A^4)$, etc.

Exercice 9 Montrer qu'une matrice qui a deux colonnes égales n'est pas inversible (raisonner sur l'application linéaire associée).

Exercice 10 Les colonnes d'une matrice inversible sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 11 Considérons une matrice $n \times p$, A, et une matrice $p \times n$, B, telles que $AB = I_n$. On suppose que $n \neq p$. Les vecteurs colonnes de B sont-ils linéairement indépendants ? Et ceux de A ?

Exercice 12 Considérons une matrice A de taille $n \times p$ et une matrice B de taille $p \times m$. Supposons que les vecteurs colonnes de A soient linéairement indépendants, ainsi que les vecteurs colonnes de B. Les vecteurs colonnes de AB sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 13 * Considérons une matrice carrée (pourquoi carrée d'ailleurs ?) A avec $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A^3)$. Est-ce que $\mathrm{Ker}(A^3) = \mathrm{Ker}(A^4)$? Justifier.

Exercice 14 * Considérons une matrice $n \times p$, A, et une matrice $p \times m$, B, telles que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$. Quand est-ce que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$ (il n'y a aucune erreur dans la question) ? Dans tous les cas trouver $\mathrm{Ker}(AB)$.

Exercice 15 * Soient A une matrice 5×4 et B une matrice 4×5. En raisonnant géométriquement (utiliser le théorème du rang), montrer pourquoi AB n'est jamais inversible.

Exercice 16 Considérons la matrice $n \times n$, M_n, dont les coefficients sont les n^2 premiers entiers positifs écrits dans l'ordre croissant l'un à la suite de l'autre, colonne par colonne. Par exemple

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

i) Calculer le rang de M_4.
ii) Calculer le rang de M_n pour tout entier $n \geq 2$.
iii) Pour quels entiers n la matrice M_n est-elle inversible ?

Exercice 17 Existe-t-il une matrice A telle que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$?

Exercice 18 On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

1. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ canonique.

2. (a) Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ avec $\boldsymbol{e}'_1 = (0, 1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1, 0)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
   (c) Ecrire la matrice A' de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Vérifier que $A' = P^{-1}AP$.
3. Mêmes questions avec la famille de vecteurs $\mathcal{B}'' = (\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2)$ avec $\boldsymbol{e}''_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{e}''_2 = (1, -1)$

Exercice 19
1. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1).$$

1. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ canonique.
2. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ avec $\boldsymbol{e}'_1 = (2, 1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1, -1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ de l'application identité de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}')$ dans$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$.

4. En déduire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
5. Ecrire la matrice A' de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$ et vérifier que $A' = P^{-1}AP$.

Exercice 20 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\boldsymbol{u} = (1, -1, 0), \qquad \boldsymbol{v} = (1, 1, 1), \qquad \boldsymbol{w} = (0, 1, 1).$$

1. Montrer que les trois vecteurs $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette base notée $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
2. On considère l'application linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + 3y - 3z, x - y + z, x + y - z).$$

Déterminer la matrice de cette application dans la base canonique.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. Quel est sa dimension ?
5. En déduire le rang de f et donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 21 On considére une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(e_1) = V_1, \;\; f(e_2) = V_2 \;\; et \;\; f(e_3) = V_3,$$

où $e_1, \;\; e_2 \;\; et \;\; e_3$ sont les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et les vecteurs V_i sont définis par :

$$V_1 = (1, -1, 1), \qquad V_2 = (1, 1, -1), \qquad V_3 = (1, 0, 0).$$

1. Ecrire f en composantes (c'est à dire f(x,y,z)= ?).
2. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. Donner une base du noyau et de l'image et en déduire leur dimensions respectives.
4. L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
5. On considère maintenant les trois vecteurs suivants :

$$X_1 = (1, -1, 1), \qquad X_2 = (1, 1, -1), \qquad X_3 = (-1, 1, 1).$$

   (a) Montrer que les trois vecteurs $\{X_1, X_2, X_3\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette base notée $\mathcal{B}'$.
   (c) Calculer P^{-1} par échelonnement total.
   (d) En déduire la matrice A' qui représente l'application linéaire f dans cette nouvelle base.

Exercice 22 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\boldsymbol{a} = (1, 0, 1), \qquad \boldsymbol{b} = (1, -1, 1), \qquad \boldsymbol{c} = (1, 2, -1).$$

1. Soit f une application linéaire telle que :

$$f(\boldsymbol{a}) = (2, 3, -1), \;\; f(\boldsymbol{b}) = (3, 0, -2), \;\; f(\boldsymbol{c}) = (2, 7, -1).$$

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $f(x, y, z)$ en fonction de (x, y, z).
2. Même question pour l'application linéaire $\tilde{f}$ telle que :

$$\tilde{f}(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}, \qquad \tilde{f}(\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{c}, \qquad \tilde{f}(c) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.$$

3. Déterminer le noyau et l'image de ces deux applications linéaires ainsi que des bases de ces sous espaces.

Exercice 23
Dans $\mathbb{R}^3$ vérifier que les vecteurs suivants forment une base :

$$a = (4, 2, 0), \qquad b = (1, 2, -3), \qquad c = (0, 2, 5)$$

Trouver les images de la base canonique par l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(a) = 2, \qquad f(b) = -7, \qquad f(c) = -1,$$

Exercice 24
Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2. Dans cet espace on considère le vecteur (au sens élément de l'espace vectoriel, qui est donc ici une matrice) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
On va considérer l'endomorphisme T de E (application linéaire de E dans E) donné par la multiplication (à gauche) par P. C'est à dire $T(A) = PA$. (Vérifier que c'est bien une application linéaire).
On rappelle que la base canonique de E est l'ensemble des matrices :

$$\mathcal{B} = \left\{ M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Quelles sont les images des matrices M_i par l'application T ? En déduire alors la matrice de l'application T dans la base $\mathcal{B}$ (qui est donc une matrice 4×4 ; pourquoi ?)
Faire la même chose pour l'endomorphisme $\tilde{T}$ de E qui est la multiplication à *droite* par P.

Exercice 25 On considère les espaces vectoriels réels : $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$.
a) Soit $\Psi : E \to F$ définie par $\forall P \in E$, $\Psi(P) = P'$ (polynôme dérivé). Montrer que Ψ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.
b) Soit $\Phi : F \to E$ définie par $\forall P \in F,\ \Phi(P)(x) = \displaystyle\int_0^x P(t)dt$. Montrer que Φ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.
c) Calculer $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.

Exercice 26 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires telles que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 27 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 28 Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E. Supposons que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.

i) Montrer que si $x \in E$, $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
ii) Quand (x, y) est libre, comparer λ_x, λ_y et λ_{x+y}.
iii) Montrer que f est une homothétie.

Exercice 29 * Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. On note $H = \mathrm{Ker}(f)$.

i) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$.
ii) Soit $x_0 \in E \backslash H$ et posons $F = \mathrm{Vect}(x_0)$. Montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 30 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

i) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$ (Indication : écrire $x = x - y + y$ avec $y = g \circ f(x)$).
ii) Montrer que $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f)$.