Aix-Marseille Université 2012-2013

LMAT04

ALGÈBRE LINÉAIRE – PLANCHE D'EXERCICES 5

Exercice 1 Sans calcul, montrer que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est divisible par 2 et calculer le plus rapidement possible ce déterminant.

Exercice 2 Sans calcul, montrer que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 14 \\ 5 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Exercice 3 Calculer les déterminants suivants $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 4 Expliquez pourquoi $\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = (3-a)a^2$.

Exercice 5 La famille $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ est-elle libre ?

Exercice 6 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Déterminer si les applications linéaires suivantes sont bijectives (donner d'abord leur matrice). Trouver leur inverse quand il existe.

i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1,x_2) = (3x_1+5x_2, 5x_1+8x_2)$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1,x_2) = (x_1+2x_2, 4x_1+8x_2)$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1,x_2,x_3) = (x_2,x_3,x_1)$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3, x_1+2x_2+3x_3, x_1+4x_2+9x_3).$$

v) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+3x_2+3x_3, x_1+4x_2+8x_3, 2x_1+7x_2+12x_3).$$

vi) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x_1,x_2,x_3x_{,4}) = (22x_1-16x_2+8x_3+5x_4, 13x_1-3x_2+9x_3+4x_4, 8x_1-2x_2+7x_3+3x_4, 3x_1-2x_2+2x_3+x_4).$$

Exercice 8 Pour quelles valeurs de k la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 Pour quelles valeurs des constantes a et b la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 Pour quelles valeurs des constantes a, b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & c & a \\ -c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 Considérons l'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A^{-1} = A$?

Exercice 12 * Soit A une matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

i) Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice A est-elle inversible ?
ii) À quelle condition sur ses coefficients diagonaux une matrice diagonale (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

Exercice 13 * Soit A une matrice triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

i) Pour quelles valeurs de a, b, c, d, e et f la matrice A est-elle inversible ?
ii) À quelle condition une matrice triangulaire supérieure (de taille arbitraire) est-elle inversible ?
iii) Si une matrice triangulaire supérieure est inversible, est-il vrai que son inverse est encore triangulaire supérieure ?
iv) À quelle condition une matrice triangulaire inférieure est-elle inversible ?

Exercice 14 Si A est une matrice inversible et c un scalaire non nul, est-ce que la matrice cA est inversible ? Si oui, quelle relation y a-t-il entre A^{-1} et $(cA)^{-1}$?

Exercice 15 Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 2 & 3 & 13 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 * Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

Exercice 17 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice.

Exercice 18 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$$

Exercice 19 Calculer le déterminant de la matrice tridiagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 20 Pour tout $n \geq 1$ entier et pour tous z_1,..., $z_n \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notons M_n la matrice suivante :

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

i) Calculer, $\det(M_1)$, $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$.

ii) Soit X une indéterminée. Pour tout $n \geq 1$ entier notons $P_n(X)$ le polynôme suivant :

$$P_n(X) := \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $P_n(z_n) = \det(M_n)$.
Montrer que $P(z_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Quel est le degré de $P_n(X)$? En déduire qu'il existe une constante c_n telle que $P_n(X) = c_n \prod_{i=1}^{n-1}(X - z_i)$.

iii) En remarquant que c_n est le coefficient de X^{n-1} dans l'écriture de $P_n(X)$, déterminer c_n.

iv) En déduire la valeur de $\det(M_n)$. À quelle condition $\det(M_n) = 0$?

v) Soient a_1,..., $a_n \in \mathbb{K}$ et supposons que z_1,..., z_n soient distincts deux à deux. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(Z) \in \mathbb{K}[Z]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $Q(z_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$.