Université d'Aix-Marseille	**Licence de Mathématiques**
Semestre 2	**2013-2014**

Algèbre linéaire

Partiel 1 – 21 février 2014

Calculette, portable et documents non autorisés — Durée : 2 heures

Exercice 1

Dire, en justifiant vos réponses, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si A^2 est définie alors A est nécessairement une matrice carrée.
2. Une matrice carrée avec une ligne de zéros n'est pas inversible.
3. Si A est inversible alors A^{-1} et A^2 sont inversibles.
4. La matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice suivante est inversible

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer l'inverse de la matrice A_1 (c'est-à-dire en prenant $m = 1$ dans la matrice A_m).

3. Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ x + 2y + mz &= 2 \\ 2x + my + 2z &= 3 \end{cases}$$

Trouver les valeurs de m pour que le système :
3.1. n'ait pas de solutions ;
3.2. ait une infinité de solutions ;
3.3. ait une unique solution.

4. Résoudre le système dans le cas où $m = 1$ puis dans le cas où $m = 3$.

T.S.V.P.

5. Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}$$

5.1. Appliquer la définition d'une famille libre à la famille (u, v, w).
5.2. Traduire sous forme d'un système linéaire puis sous forme matricielle la définition de la question précédente.
5.3. Pour quelles valeurs de m les vecteurs u, v et w forment-ils une famille libre ?

Exercice 3

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et soit $B = A - I_3$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

1. Calculer B, B^2, B^3 ; en déduire la valeur de B^n pour tout entier n.

2. Développer $(B+I_3)^n$ par la formule du binôme (on justifiera son utilisation) et simplifier.

3. En déduire l'expression de A^n pour tout entier n.

Exercice 4

Justifier si oui ou non l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, muni de ses lois usuelles dans chacun des cas suivants :

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y - 2z = 0\}$ et $E = \mathbb{R}^3$,

2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, `\ yz = 0\}$ et $E = \mathbb{R}^3$,

3. $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, $f'(1) = 0\}$ et $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ c'est à dire l'ensemble des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.