Université d'Aix-Marseille — **Licence de Mathématiques**

Semestre 2 — 2013 – 2014

Algèbre linéaire

Correction du Partiel 1 – 21 février 2014

Exercice 1

Dire, en justifiant vos réponses, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si A^2 est définie alors A est nécessairement une matrice carrée.
   VRAI Si A^2 est définie alors le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de A.
2. Une matrice carrée avec une ligne de zéros n'est pas inversible.
   VRAI[1] Supposons que la matrice carrée A est telle que sa ligne i est nulle alors quelque soit la matrice carrée B la ligne i de la matrice produit AB ($(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = 0 \ \ \forall j = 1..n$) sera nulle donc cette matrice produit ne pourra pas être égale à la matrice identité.
3. Si A est inversible alors A^{-1} et A^2 sont inversibles.
   VRAI
   — Si A est inversible alors par définition $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ donc A^{-1} est inversible et son inverse est A.
   — Si deux matrices sont inversibles leur produit l'est aussi donc A inversible implique que A^2 l'est aussi, et $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
4. La matrice inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   VRAI
$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2

1. Pour déterminer les valeurs de A_m pour lesquelles la matrice suivante est inversible
$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix},$$

1. On peut aussi répondre en disant que si une matrice carrée A , de taille n, a une ligne de zéros, cette ligne serait déplacée en bas de la matrice lors de l'échelonnement, et donc A ne pourrait avoir n pivots, et ne serait donc pas inversible.

nous allons l'échelonner :

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & m\\ 1 & m & 2\end{bmatrix} \xrightarrow[T_{3,1}(-2)]{T_{2,1}(-1)} \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & m+1\\ 0 & m-2 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{T_{3,2}(2-m)} \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & m+1\\ 0 & 0 & -m^2+m+6\end{bmatrix}.$$

La matrice A_m a donc au moins deux pivots respectivement égaux à 1, 1 ; et elle aura exactement trois pivots respectivement égaux à 1, 1 et $(3-m)(m+2)$ si $(3-m)(m+2) \neq 0$. On en déduit que la matrice A_m est inversible si $m \neq 3$ et si $m \neq -2$.

2. Effectuons un échelonnement total de la matrice A_1 en l'augmentant de la matrice identité :

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[T_{3,1}(-2)]{T_{2,1}(-1)} \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{T_{3,2}(1)} \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & -3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{T_{2,3}(-2)\\ T_{1,3}(1)}]{D_3(\frac{1}{6})} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1/2 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/6 & 1/6\end{bmatrix} \xrightarrow{T_{1,2}(-1)} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/6 & 1/6\end{bmatrix}.$$

On en déduit que l'inverse de la matrice A_1 est :

$$A_1^{-1} \begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 2/3 & -1/3\\ -1/2 & 1/6 & 1/6\end{bmatrix}.$$

3. Appliquons l'échelonnement que l'on a fait dans la première question au vecteur $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$.

On obtient le vecteur

$$c = T_{3,2}(2-m)T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-1)\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3-m\end{bmatrix}.$$

Le système initial est équivalent au système :

$$\begin{cases} x+y-z & = & 1\\ y+(m+1)z & = & 1\\ (3-m)(m+2)z & = & 3-m\end{cases}$$

Par conséquent on en déduit que si
3.1. $m=-2$ le système ne possède pas de solutions. En effet si $m=-2$ la dernière équation du système ci-dessus devient $0z=5$ et cette équation n'a pas de solutions.
3.2. $m=3$ le système possède une infinité de solutions. En effet si $m=3$ la dernière équation du système ci-dessus devient $0z=0$ et tout réel z vérifie cette équation. On peut donc choisir z et en déduire y et x en fonction de z.
3.3. $m \neq 3$ et si $m \neq -2$ le système possède une solution unique puisqu'alors la matrice A_m sera inversible.

4. Dans le cas où $m = 1$ la solution est égal au vecteur

$$A_1^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1/3\\1/3\end{bmatrix}.$$

Dans le cas où $m = 3$, on a une infinité de solutions paramètrées en z. Soient :

$$y = 1 - 4z, \quad x = 1 - y + z = 5z.$$

5. Soient les vecteurs

$$u = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix}1\\2\\m\end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix}-1\\m\\2\end{bmatrix}.$$

5.1. La famille (u, v, w) est libre si et seulement si :

$$xu + yv + zw = 0 \Longleftrightarrow x = y = z = 0.$$

5.2. La définition donnée ci-dessus s'écrit :

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\2\\m\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-1\\m\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Longleftrightarrow x = y = z = 0.$$

Soit encore

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ x + 2y + mz &= 0 \\ 2x + my + 2z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = z = 0.$$

Ou bien encore :

$$A_m\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Longleftrightarrow x = y = z = 0.$$

5.3. La famille est libre, c'est à dire la seule solution du système ci-dessus est le vecteur nul si la matrice A_m est inversible, c'est à dire, d'après les questions précédentes, si $m \neq 3$ et $m \neq -2$.

Exercice 3

1. On a $B = \begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\3&2&0\end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\4&0&0\end{bmatrix}$, et $B^3 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

Montrons par récurrence que $B^n = 0$ pour tout entier $n \geq 3$.
En effet cette proposition est vraie pour $n = 3$, supposons qu'elle est vraie pour n alors par définition des puissances des matrices on a $B^{n+1} = BB^n = B0 = 0$. Dons la proposition est vraie pour $n + 1$ et la démonstration par récurrence est terminée.

2. Puisque la matrice identité commute avec toutes les matrices elle commute avec la matrice B et on peut appliquer la formule du binôme pour calculer $(B+I_3)^n$ pour tout entier n On a :

$$(B+I_3)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B^i.$$

Or pour tout entier $n \geq 3$, $B^n = 0$, donc :

$$(B+I_3)^n = \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} B^i.$$

D'où $(B+I_3)^0 = I_3$, $\quad (B+I_3) = B + I_3 \quad , \quad (B+I_3)^2 = I_3 + 2B + B^2$ et pour $n \geq 3$

$$(B+I_3)^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.$$

3. D'après la définition on a $A = B + I_3$, donc $A^n = (B+I_3)^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$ pour tout entier n. Soit :

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ n+2n^2 & 2n & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4

1. L'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid y - 2z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car c'est un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine.
On peut aussi évidemment vérifier que F n'est pas vide et qu'il est stable par combinaison linéaire, soit :

— $F \neq \emptyset$ car le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ appartient à F.

— Soient $X = (x,y,z) \in F$ et $Y = (x',y',z') \in F$. Donc $y - 2z = 0$ et $y' - 2z' = 0$.
Montrons que $X+Y = (x+x', y+y', z+z') \in F$. Pour cela calculons $(y+y') - 2(z+z')$. On a :
$(y+y') - 2(z+z') = (y-2z) + (y'-2z') = 0 + 0 = 0$. On en déduit que le vecteur $X+Y$ appartient à F.

— Soient $X = (x,y,z) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $y - 2z = 0$.
Montrons que $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F$. Pour cela calculons calculons $(\lambda y) - 2(\lambda z)$. On a :
$(\lambda y) - 2(\lambda z) = \lambda(y - 2z) = \lambda 0 = 0$. On en déduit que le vecteur λX appartient à F.

2. L'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid yz = 0\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car les vecteurs $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ appartiennent à F or leur somme $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ n'appartient pas à F.

3. $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $\mid f'(1) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car

— F n'est pas vide car la fonction identiquement nulle appartient à F.
— Soient f et g deux éléments de F alors $f+g$ est dérivable et $(f+g)' = f' + g'$.
Par conséquent $(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 0 + 0 = 0$ donc $f+g$ appartient à F.
— Soient f un élément de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
Par conséquent $(\lambda f)'(1) = \lambda f'(1) = \lambda 0 = 0$ donc λf appartient à F.