Algèbre linéaire 1 : partiel n° 2

28 mars 2014, durée : 2h.

Aucun document autorisé. Calculatrices et téléphones portables interdits.
Le barème est indicatif. Une réponse non justifiée vaut 0.

On rappelle que si $u_1, \ldots, u_n$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel E, alors $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ désigne le sous-espace de E engendré par $u_1, \ldots, u_n$.

Exercice 1 [5pt]

Répondre en justifiant les réponses.

(1) Soient u, v, w trois vecteurs d'un espace vectoriel. Est-il toujours vrai que (u, v, w) est une base de $\mathrm{Vect}(u, v, w)$?
(Si oui, il faut le démontrer ; si non, il faut donner un contre-exemple).

(2) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 3 ?

(3) Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A)$?

(4) Soient E, F deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Si $\dim(E) = \dim(F) = 2$ alors l'intersection $E \cap F$ peut elle être égale à $\{0\}$?

Exercice 2 [5pt]

Dans $\mathbb{R}^4$, considérons les vecteurs

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

et le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$. On considère aussi l'ensemble de vecteurs

$$G = \{\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y + t = 0 \,\}.$$

1. Déterminer la dimension de F et en donner une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Donner une base de G et en déduire sa dimension.
4. Est-il vrai que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?

Exercice 3 [5pt]

Soit λ un nombre réel. Dans $\mathbb{R}^3$, on se donne trois vecteurs

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

1. Soit A_λ la matrice dont les vecteurs colonnes sont u, v, w. Pour quelles valeurs de λ la matrice A_λ est-elle inversible ?

2. Pour les valeurs de λ trouvées à la question précédente, la famille (u, v, w) est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

3. Dans le cas $\lambda = -1$, donner une base du sous-espace $\mathrm{Vect}(u, v, w)$ et en déduire sa dimension.

4. Donner une base du noyau de la matrice A_{-1} et en déduire la dimension du noyau.

Exercice 4 [5pt]

Soit E un espace vectoriel réel et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Définissons les vecteurs

$$f_1 = e_2, \quad f_2 = e_3 + e_2, \quad f_3 = e_1 + e_3.$$

1. Montrer que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.

2. Trouver les composantes (coordonnées) des vecteurs f_1, f_2, f_3 dans la base $\mathcal{F}$ et dans la base $\mathcal{E}$.

3. Trouver les composantes (coordonnées) des vecteurs e_1, e_2, e_3 dans la base $\mathcal{F}$.