Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2013/2014

Site : ☐ Luminy ■ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet session de : ☐ 1er semestre - ☐ 2e semestre - ■ Session 2 Durée de l'épreuve : `2h00`

Examen de : ■L1/☐L2/☐L3 - ☐M1/☐ M2 - ☐LP - ☐DU Nom du diplôme : `Maths-Info`

Code Apogée du module : `ENSMI2U2` Libellé du module : `Algèbre linéaire 1`

Documents autorisés : ☐ OUI - ■ NON Calculatrices autorisées : ☐ OUI - ■ NON

Barème indicatif : exo 1 :4pts ; exo 2 : 5pts ; exo 3 :5pts ; exo 4 :5pts ; exo 5 :5pts

Exercice 1

Les énoncés suivants sont-ils Vrai ou Faux ? Donner une justification de votre réponse (une réponse correcte sans justification ne sera pas prise en compte).

(1) $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si les colonnes de A forment une famille libre, alors les lignes de A forment également une famille libre.

(3) L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - yz$ est linéaire.

(4) Une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ a au plus quatre éléments.

Exercice 2

Soit $A_n = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice carrée de dimension n dont les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Écrire les matrices A_n pour $n = 2$, 3 et 4.

(2) Calculer A_2^2, A_3^2, A_4^2.

(3) On note b_{ij} les coefficients de A_n^2. Donner la valeur de b_{ij} en fonction de i et j.

(4) La matrice A_n est elle inversible ?

Tournez la page SVP

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

et on note

$$E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4),$$

le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces quatre vecteurs.

(1) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est une famille liée ; en extraire une base de E. Quelle est la dimension de E ?

(2) Compléter la base de E trouvée à la question précédente en une base de $\mathbb{R}^4$. En déduire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4

On considère l'application linéaire $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$\phi(x, y, z, t) = (x + y + z + t, 2x - y + 3z, 2y - z + 2t).$$

(1) Calculer le noyau, $\mathrm{Ker}(\phi)$, de l'application ϕ et en donner une base. En déduire le rang de ϕ.

(2) Donner une base de $\mathrm{Im}(\phi)$.

(3) L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

(4) Écrire la matrice de l'application ϕ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes en X à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que E admet pour base la famille des monômes $(1, X, X^2)$, et qu'on l'appelle la *base canonique* de E.

Soit l'application linéaire v définie par

$$v\colon \begin{array}{ccc} E & \to & E, \\ P(X) & \mapsto & P(X+3). \end{array}$$

(1) Écrire la matrice de v dans la base canonique de E.

(2) Montrer que v est bijective (par exemple, en définissant son inverse).