Aix–Marseille Université	2014-2015

Algèbre Linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES N°1

1 Rappels - Géométrie affine et systèmes linéaires

Exercice 1 $*$ Justifier si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Soient $\boldsymbol{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, alors $\alpha = 0$ ou $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.
3. Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, alors $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.
4. Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe deux réels non nuls α et β tels que $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Alors l'ensemble des combinaisons linéaires de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est une droite.
5. Il existe 2 vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$ tels que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.
6. Il existe 2 vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.

Exercice 2 Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. On note E l'ensemble de leurs combinaisons linéaires. Discuter en fonction de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ si les situations suivantes peuvent avoir lieu ?

1. E est réduit au vecteur nul,
2. E est une droite,
3. E est un plan,
4. E est l'espace tout entier.

Exercice 3 $*$ Décrire géométriquement (droite, plan ou $\mathbb{R}^3$ tout entier) l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs suivants :

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Trouver deux vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ qui sont orthogonaux à $\boldsymbol{u} = (1, 1, 0)$ et orthogonaux entre eux.

Exercice 5 $*$ Déterminer les solutions des systèmes suivants. Représenter graphiquement les solutions.

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x + 5y = 17 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 3 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}.$$

Exercice 6 * Soient a, α et β des réels. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} ax + y = \alpha \\ x + ay = \beta \end{cases}.$$

Donner les valeurs de a, α et β pour lesquelles le système admet :

1. une solution unique,
2. une infinité de solutions,
3. pas de solution.

Exercice 7 Des amis vont au bar. Ils consomment 8 cafés et 4 jus d'orange et payent 28 euros. Puis ils recommandent 7 cafés et 5 jus d'orange. Cette fois ci ils payent 29 euros. Quel est le prix du jus d'orange et du café ?

Exercice 8 Un cadet de Gascogne dit à ses amis : "J'ai dépensé 4 écus de plus que le quart de ce que j'avais en entrant dans la taverne et il me reste 2 écus de plus que le quart de ce que j'avais en entrant dans la taverne". Combien avait-il en entrant dans la taverne ?

Exercice 9 Un groupe de 24 personnes, composé d'élèves mineurs, d'élèves majeurs et de professeurs, vont au cinéma. Le billet coûte 4 euros pour un élève majeur, 3 euros pour un élève mineur et 9 euros pour un professeur. Le groupe dépense au total 102 euros. Sachant que lors d'une sortie il y a un professeur pour 5 élèves, combien y a-t-il d'élèves mineurs, d'élèves majeurs et de professeurs ?

Exercice 10 Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - y'(t) - y(t) = \cos(t).$$

Cette équation peut décrire un oscillateur forcé amorti comme vous l'avez vu en mécanique. Ce type d'équation admet une solution particulière de la forme : $y(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$.
Trouver a et b et esquisser le graphe de la solution.

Exercice 11 * Lors de votre dernier voyage en Suisse vous avez pris le bateau pour faire un aller-retour entre Rheinfall et Rheinau. L'aller a pris 20 minutes et le retour 40 minutes. La distance entre Rheinfall et Rheinau est de 8 kilomètres. À quelle vitesse navigue le bateau (par rapport à l'eau) et à quelle vitesse s'écoule la rivière ? Nous supposerons que ces deux vitesses sont constantes durant le temps du trajet.

Exercice 12 Sur une île déserte vivent une bande de loups, une bande de serpents et une bande de chèvres. Chaque nuit, chaque loup égorge une chèvre, chaque serpent mord un loup (et la blessure est mortelle) et chaque chèvre piétine (à mort) un serpent. On suppose qu'il n'y a pas d'autres pertes de vie (par vieillesse par exemple), ni gains (par naissances...). On note ℓ^*, s^* et c^* le nombre respectif de loups, serpents et chèvres le 21 janvier 2015 au soir, et ℓ, s et c le nombre respectif de loups, serpents et chèvres le 22 janvier 2015 au matin. Exprimer ℓ, s et c en fonction de ℓ^*, s^* et c^* dans le cas où toutes les morts sont simultanées puis dans le cas où chaque loup égorge une chèvre, puis chaque chèvre qui reste piétine (à mort) un serpent et enfin chaque serpent qui reste mord un loup (et la blessure est mortelle).

Exercice 13 * L'économiste américain Wassily Leontief (1905-1999), prix Nobel d'économie en 1973, s'est intéressé au problème suivant : quelle doit être la production de chaque secteur d'une économie de sorte que la demande totale soit satisfaite ? Nous considérons ici un exemple très simple d'une économie avec deux secteurs A et B. Supposons que la demande des consommateurs pour ces produits soit respectivement de 1000 et 780 millions d'euros par année. Quelle production a et b (en millions d'euros par an) doivent fournir les deux secteurs pour satisfaire la demande ? Vous pouvez être tentés de dire 1000 et 780 respectivement, mais les choses ne sont pas aussi simples que cela. Nous devons aussi prendre en compte la demande d'un secteur à l'autre. Supposons que le secteur A produise de l'électricité. Bien sûr la production d'à peu près n'importe quel bien requiert de l'électricité. Supposons que le secteur B nécessite 10 centimes d'euros d'électricité par euro que B produit, et que l'industrie A a besoin de 20 centimes d'euros de biens de B par euros de production. Déterminer les productions a et b qui permettent de satisfaire à la fois la demande des consommateurs et la demande interindustrielle.

Exercice 14 Trouver les polynômes de degré 2 (i.e. un polynôme de la forme $f(t) = at^2 + bt + c$) dont le graphe passe par les points (1,-1), (2,3) et (3,13). Dessiner les graphes de ces polynômes.

Exercice 15 Trouver un système d'équations linéaires en x, y et z dont les solutions sont

$$x = 6 + 5t,\ y = 4 + 3t,\ z = 2 + t,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

2 Calcul matriciel

Exercice 16 * Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Calculer $5(A + 2B) + 4(2A - B)$.

ii) Trouver toutes les matrices X telles que $3(A + X) + 5(3X + B) = A - B$.

Exercice 17 Soient A une matrice 3×7, B une matrice 7×3, C une matrice 7×1, et D une matrice 3×1, dont tous les coefficients sont égaux à 1 (on les appelle matrices d'Attila...). Parmi les opérations suivantes, dire lesquelles sont autorisées, et dans ce cas, calculer la matrice résultante.

$$AB, \quad BA, \quad ABD, \quad DBA, \quad A(B + C).$$

Exercice 18 * Calculer, lorsqu'ils sont définis, les produits de matrices indiqués. Donner ensuite les transposées des produits.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 * Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

Des 25 possibilités AA, AB, AC, ..., ED, EE hypothétiques, déterminer et calculer les produits qui sont définis.

Exercice 20 Déterminer toutes les matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 Résoudre les équations matricielles suivantes. On commencera par déterminer la taille de la matrice cherchée X.

$$i)\ X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad ii)\ X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad iii)\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$iv)\ X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X, \quad v)\ X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad vi)\ X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad vii)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = I_2.$$

Exercice 22 * Dans le centre de Genève certains parcmètres acceptent les pièces de 2 et 5 francs.

i) Un officier chargé du stationnement récupère 51 pièces pour une valeur totale de 144 francs. Combien de pièces de chaque sorte y a-t-il ?

ii) Déterminer la matrice A qui, si on la multiplie par le vecteur $\begin{pmatrix} \text{nombre de pièces de 2 francs} \\ \text{nombre de pièces de 5 francs} \end{pmatrix}$ donne le vecteur $\begin{pmatrix} \text{valeur totale des pièces} \\ \text{nombre total de pièces} \end{pmatrix}$.

iii) Est-ce que la matrice A précédente est inversible ? Si oui trouver son inverse. Utiliser le résultat obtenu pour justifier votre réponse en i).

Exercice 23 Un joaillier utilisait pour ses bijoux un alliage de platine et un alliage d'argent ; les densités de ces alliages étaient exactement 20 et 10 grammes par cm^3 respectivement.
Le roi Héron de Syracuse commanda à ce joaillier une couronne d'une masse totale de 5 kg, en demandant que l'alliage de platine constitue au moins 90% de la masse totale. Le joaillier lui procura une très belle pièce, mais Archimède, l'ami du roi, doutait de sa pureté. Alors qu'il prenait son bain, il découvrit une méthode pour vérifier la composition de la couronne (c'est alors qu'il s'écria "Eurêka !" et se rua tout nu au palais du roi). En plongeant la couronne dans l'eau il constata que son volume était de 370 cm^3. De quelle quantité (en masse) de chaque alliage était constituée la couronne ? Le joaillier était-il un escroc ?
Etant donné un bijou produit par ce joaillier, déterminer la matrice qui, si on la multiplie par le vecteur $\begin{pmatrix} \text{masse de l'alliage de platine} \\ \text{masse de l'alliage d'argent} \end{pmatrix}$ donne le vecteur $\begin{pmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{pmatrix}$.
Cette matrice est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse. À l'aide de ce résultat vérifier votre première réponse.

Exercice 24 [Un modèle de prédation à deux niveaux]

Dans la chaîne alimentaire, sur une période, le lion consomme 4 gazelles, 5 gnous et 2 antilopes. Le guépard, plus agile, consomme 7 gazelles et 1 antilope. Pour ne pas se laisser abattre, les gazelles, gnous et antilopes consomment quelques végétaux : arbres, pelouses, herbes hautes et racines. Une gazelle consomme $100g$ de feuilles d'arbres, $300g$ de pelouse, $150g$ d'herbes hautes et $50g$ de racines. Un gnou consomme $500g$ de feuilles d'arbres, $100g$ de pelouse, $750g$ d'herbes hautes et pas de racines. Une antilope consomme $200g$ de feuilles d'arbres, $400g$ de pelouse, $250g$ d'herbes hautes et $150g$ de racines. Malheureusement la pollution a affecté les arbres et la pelouse. La concentration de pesticide est de $c_1 = 30$ par gramme de feuille d'arbre et de $c_2 = 50$ par gramme de pelouse. Bien heureusement les racines et les herbes hautes sont préservées. Calculer la masse totale de pesticide ingérée par le lion et le guépard en effectuant le produit de trois matrices que l'on explicitera.

Exercice 25 Considérons quatre personnes P_1, P_2, P_3, P_4 qui sont intéressées par l'achat de cinq biens B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vendus dans trois magasins M_1, M_2, M_3. Soient

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 10 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

deux matrices, où chaque coefficient x_{ij} désigne la quantité du bien B_j que veut acheter la personne P_i et chaque coefficient y_{jk} désigne le prix du bien B_j dans le magasin M_k, avec $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 5$ et $1 \leq k \leq 3$.

Calculer le produit XY et du résultat obtenu déduire :

i) la somme que P_3 devrait payer en effectuant tous ses achats dans le magasin M_2 ;

ii) la somme totale que toutes les personnes devraient payer ensemble en faisant la totalité de leurs achats dans M_1 ;

iii) le magasin où P_4 paierait le moins pour la totalité de ses achats ;

iv) le magasin où P_2 paierait le plus.

Exercice 26 Soient A et B des matrices $n \times n$ dont les coefficients sont des nombres réels positifs ou nuls. On suppose que les coefficients de A sont inférieurs ou égaux à un nombre réel s, et que la somme des coefficients de chaque colonne de B est inférieure ou égale à un nombre réel r. Montrer que tous les coefficients de la matrice AB sont inférieurs ou égaux à sr.

Exercice 27 Quelles sont parmi les matrices suivantes celles qui sont égales à $(A - B)^2$, quelque soient les matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$?

$$A^2 - B^2, \quad (B - A)^2, \quad A - 2AB + B^2, \quad (A - B)A - (A - B)B, \quad A^2 - AB - BA + B^2.$$

Exercice 28 * Soient A et B des matrices $n \times n$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies indépendamment du choix de A et B ?

i) $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$.

ii) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

iii) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

Supposons de plus que A et B sont inversibles. Même question pour les relations suivantes :

iv) A^2 est inversible et $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

v) $A+B$ est inversible et $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

vi) $ABB^{-1}A^{-1} = I_n$.

vii) $ABA^{-1} = B$.

viii) $(ABA^{-1})^3 = AB^3A^{-1}$.

ix) $(I_n + A)(I_n + A^{-1}) = 2I_n + A + A^{-1}$.

x) $A^{-1}B$ est inversible et $(A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$.

Exercice 29 Trouver et démontrer par récurrence les formules explicites pour les puissances A^m, $m \geq 1$, où

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 30 * Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et posons $N = M - I_3$.

i) Calculer N^2, N^3 et en déduire N^k pour tout $k \geq 1$.

ii) Développer et simplifier l'expression $(N + I_3)^k$.

iii) En déduire la forme de M^k pour tout $k \geq 1$.

Exercice 31 On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente [1] d'ordre q si $A^{q-1} \neq 0$ et $A^q = 0$. Donner un exemple de matrices carrées 2×2 et 3×3 nilpotentes d'ordre 2. Donner ensuite un exemple de matrice carrée nilpotente d'ordre 3.

Exercice 32 * Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On suppose que cette matrice est inversible. Calculer la matrice A^{-1} en fonction de $a, b, c,$ et d par identification. Exprimer la condition sur $a, b, c,$ et d pour que la matrice soit inversible.

Exercice 33 *

i) Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I_2 - A$. En déduire que A est inversible et trouver A^{-1}.

1. nilpotente : du latin *nihil* : rien et *potere* pouvoir

ii) Soit
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que $B^3 - B - 4I_3 = 0$. En déduire que B est inversible et trouver B^{-1}.

Exercice 34 * Supposons que $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^k = 0$ pour un certain $k \geq 1$. Montrer que la matrice $(I_n - A)$ est inversible et que
$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

Exercice 35 Dans la situation décrite dans l'exercice 12, si on suppose que le 22 janvier 2015 au matin, il ne reste que 2 loups, 4 serpents et une chèvre, quel était le nombre de loups, serpents et chèvres le 21 janvier au soir ?

Exercice 36 Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul on a $AX \neq 0$.

Exercice 37 Justifier si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (dans cet exercice, A et B sont 2 matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$) :
1) Si $AX = BX$ pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors $A = B$.
2) La matrice Id_n est inversible mais la matrice 0_n ne l'est pas.
3) Si A et B sont inversibles, alors $A + B$ est inversible. Et réciproquement.

Exercice 38 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1) On suppose qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = 0$. Montrer que A n'est pas inversible.
2) On suppose qu'il existe un vecteur colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui n'est pas combinaison linéaire des colonnes de A. Montrer que A n'est pas inversible (on pourra raisonner par l'absurde et écrire $Y = A(A^{-1}Y)$).

Exercice 39 Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^n$. Les vecteurs X et Y peuvent être considérés comme des matrices à une colonne : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculez $X^t\, Y$. Que reconnaissez-vous ? Calculez ensuite XY^t.

Exercice 40 Soient A et B deux matrices symétriques. Les matrices A^2, AB, $A^2 - B^2$, $(A+B)(A-B)$, BAB et $BABA$ sont elles symétriques ? (si oui, justifier, sinon, donner un contre-exemple).

Exercice 41 Soit A une matrice $n \times p$.

1. Quelles sont les tailles respectives de AA^t et A^tA ?

2. Montrer que les coefficients diagonaux de AA^t et A^tA sont forcément positifs ou nuls.

3. Soit B une matrice $p \times p$ symétrique. Montrer que la matrice ABA^t est symétrique.

Exercice 42 Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques. Montrer que le produit AB est symétrique si et seulement si les matrices commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$.

Exercice 43 Montrer que toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3 Algorithme de Gauss

Exercice 44 * Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants. Vérifier si la solution obtenue est correcte.

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+3y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4x+3y=2 \\ 7x+5y=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+4y=3 \\ 3x+6y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 4x+6y=0 \end{cases}.$$

Exercice 45 * Déterminer les solutions des systèmes suivants. Décrire votre solution en termes d'intersections de plans. Il n'est pas nécessaire de faire un dessin.

$$\begin{cases} x+4y+z=0 \\ 4x+13y+7z=0 \\ 7x+22y+13z=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=0 \\ 6x+y+4z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+4y+z=0 \\ 4x+13y+7z=0 \\ 7x+22y+13z=0 \end{cases}.$$

Exercice 46 * Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3y+4z=3 \\ x+4y+5z=4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 7x+2y-3z=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ -x+4y+2z=2 \\ 7x-6y-8z=-4 \end{cases}.$$

Exercice 47 * Ayant à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{cases} 2x+7y+z=1 \\ 2x+3y-5z=4 \\ -4x+3y+z=5 \end{cases}$$

un étudiant démarre ainsi :

$$\begin{array}{lllll} \text{j'élimine} & x & \text{en} & \text{retranchant} & e_2 \text{ de } e_1 : \quad 4y+6z=-3 \\ \quad ” & y & ” & \quad ” & e_3 \text{ de } e_2 : \quad 6x-6z=-1 \\ \quad ” & z & ” & \quad ” & e_1 \text{ de } e_3 : \quad -6x-4y=4 \end{array}$$

Le système ainsi obtenu est-il équivalent au système initial ? Résoudre le système par la méthode de Gauss.

Exercice 48 Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-z=-12 \\ 3x-5y+13z=18 \\ x-2y+5z=k \end{cases},$$

où k est un nombre arbitraire.
Pour quelles valeurs de k le système a-t-il au moins une solution ? Pour chacune de ces valeurs de k, déterminer le nombre de solutions du système. Déterminer toutes les solutions pour chaque valeur de k.

Exercice 49 Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1,p)$, $(2,q)$, $(3,r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

Exercice 50 Résoudre les systèmes linéaires suivants selon la valeur du paramètre a :

$$(i)\ \begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+y+az=2 \\ x+ay+z=3 \end{cases},\qquad (ii)\ \begin{cases} ax+y+2z=1 \\ ax+ay+3z=1 \\ ax+ay+az=1 \end{cases},\qquad (iii)\ \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases},$$

$$(iv)\ \begin{cases} (a-2)x+(2a-1)y=2-a \\ 2x+(3+a)y=2a \end{cases},\quad (v)\ \begin{cases} x+ay-z=1 \\ 2x-y+az=0 \\ x+10y-6z=a \end{cases},\quad (vi)\ \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-3y+z=1 \\ 8x-5y+z=a \\ x+y-z=0 \end{cases}.$$

Exercice 51 Résoudre en utilisant l'échelonnement les systèmes suivants :

$$(i)\ \begin{cases} x+y+z=\ 2 \\ 5x+4y+3z=\ 2 \\ 6x+3y+2z=\ -4 \end{cases},\qquad (ii)\ \begin{cases} x+2y-2z=\ 1 \\ -x+3y=\ 0 \\ -2y+z=\ -3 \end{cases},\qquad (iii)\ \begin{cases} x+2y-2z+4t=\ 2 \\ y+3z-4t=\ -2 \\ z-2t=\ 0 \\ x+y-z+2t=\ 2 \end{cases},$$

$$(iv)\ \begin{cases} x-y+z-t+w=0 \\ x+y+2z-t=0 \\ 2x-2y+3z-t+2w=0 \\ 4x-2y+6z-3t+3w=0 \end{cases},\qquad (v)\ \begin{cases} x+2y-2z+4t+u=\ 0 \\ y+3z-4t+2u=\ 0 \\ x+z-2t+3u=\ 0 \\ x+y+4z-6t+5u=\ 0 \\ 3y+2t=\ 0 \end{cases}.$$

Exercice 52 * Échelonner les matrices suivantes, trouver leur rang et dire si elles sont inversibles. Le cas échéant calculer leurs inverses par échelonnement total :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 53 * Pour quelles valeurs du paramètre t, la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1+t & -1 & 2 \\ 2 & -t & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 54 * Trouver le rang des matrices suivantes.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (iii)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 55 Trouver le rang des matrices suivantes en fonction de la valeur du paramètre p.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 1 & p & -1 & 2 \\ 2 & -1 & p & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$