Aix–Marseille Université 2014-2015

Algèbre Linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES N°2

1 Espaces vectoriels

Exercice 1 * Parmi les ensembles suivants, reconnaître les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}; \quad B = \{(x,y \in \mathbb{R}^2 : 3x - y = 0\}; \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\};$$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}; \qquad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 4z = 0\};$$

$$F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\big\}; \quad G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \leq y \leq z\big\};$$

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}; \qquad K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}.$$

Exercice 2 * Les ensembles suivants, sont-ils des sous-espaces vectoriels des espaces ambiants, munis des lois usuelles ?

$$E_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\}; \qquad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\};$$

$$E_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}; \qquad E_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\};$$

$$E_5 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P = 0 \text{ ou } P' = 3\}; \qquad E_6 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est croissante}\};$$

$$E_7 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est surjective}\} \cup \{f = 0\}; \quad E_8 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(\mathbb{R}) \text{ est un ensemble fini}\};$$

$$E_9 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid 0 \in f(\mathbb{R})\}; \qquad E_{10} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid 2f(a) = f(b)\}.$$

Exercice 3 * Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que $V \cap W$ et $V \cup W$ sont toujours des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 4 On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Sur cet ensemble, on considère l'addition $\boxplus : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ et la multiplication par un scalaire $\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définies par les formules suivantes :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad x \boxplus y = xy \quad \text{et} \quad \lambda \boxdot x = x^\lambda.$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \boxplus, \boxdot)$ est un espace vectoriel réel.

Exercice 5 Soit

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que X n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $\boxplus : X \times X \to X$ l'addition définie par le produit classique des matrices : $A \boxplus B = AB$ pour tout $A, B \in X$. Montrer que cette opération est bien définie, commutative, associative, trouver l'élément neutre de cette addition ainsi que l'opposé d'un élément $A \in X$.

3. Définir une opération de multiplication par un scalaire $\boxdot : \mathbb{R} \times X \to X$, de façon à ce que $(X, \boxplus, \boxdot)$ soit un espace vectoriel réel.

2 Familles libres

Bien que la notation standard soit en colonnes, nous allons donner les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en lignes pour gagner de place sur la planche.

Exercice 6 * Est-ce que les vecteurs suivants forment une famille libre dans l'espace $\mathbb{R}^n$ correspondant ?

1. $(2,1),(6,3) \in \mathbb{R}^2$; 2. $(7,11),(11,7) \in \mathbb{R}^2$; 3. $(1,1),(3,-5),(-6,5) \in \mathbb{R}^2$;

4. $(1,0,0),(1,2,0),(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$; 5. $(1,1,1),(3,2,1),(6,5,4) \in \mathbb{R}^3$; 6. $(1,1,1),(1,2,3),(1,3,6) \in \mathbb{R}^3$;

7. $(1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,4,7,10) \in \mathbb{R}^4$; 8. $(1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2),(1,0,1,1,0),(0,1,0,0,1) \in \mathbb{R}^5$.

Exercice 7 * Considérons $u_1,\ldots,u_k \in \mathbb{R}^n$ avec $u_1 = 0$. Est-ce que ces vecteurs forment une famille libre ?

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel réel. Démontrer que :

1. Deux vecteurs $u, w \in E$ sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires.

2. Les vecteurs non nuls $u_1,\ldots,u_n \in E$ sont linéairement indépendants si et seulement si $u_{i+1} \notin \text{Vect}\{u_1,\ldots,u_i\}$, pour tout $i = 1,\ldots n-1$.

Exercice 9 * Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.

1. Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.

2. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?

Exercice 10 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer parmi les familles suivantes celles qui sont libres et celles qui sont liées.

1. $\{2, 4\sin^2 x, \cos^2 x\}$;
2. $\{x, e^x\}$;
3. $\{\sin x, \cos x\}$;
4. $\{(1+x)^2, x^2+2x, 3, x\}$;
5. $\{\cos(2x), \sin^2 x, \cos^2 x\}$;
6. $\{0, x, x^2\}$;
7. $\{1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}\}$;
8. $\{1, \sin x, \sin(2x)\}$ et puis $\{1, \sin x, \sin(2x), \ldots, \sin(nx)\}$.

Exercice 11 * Soient $E = \text{Vect}\{(2,3,-1),(1,-1,2)\}$ et $F = \text{Vect}\{(3,2,1),(1,4,-3)\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$.

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel réel. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse :

1. Une famille $\{v_1,\ldots,v_n\}$ dans E est libre si et seulement si la famille $\{\sum_{j=1}^{i} v_j : i = 1,\ldots n\}$ est libre.

2. Si $v_1, v_2, v_3, v_4 \in E$ et $\sum_{j=1}^{4} v_i = 0$, alors $\text{Vect}\{v_1,v_2,v_3\} = \text{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}$.

3. Si $v, u, w \in E$ et $w \notin \text{Vect}\{v,u\}$, alors $\text{Vect}\{v,u\} \cap \text{Vect}\{v,w\} = \text{Vect}\{v\}$.

Exercice 13 Soient e_1, e_2, e_3 des vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel réel X. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ les vecteurs $e_1 + ae_2$, $e_2 + ae_3$, $e_1 + ae_3$ sont linéairement indépendants ?

Exercice 14 Soit E l'espace vectoriel réel des suites de nombres réels, muni des lois usuelles suivantes :

$$\forall (x_n), (y_n) \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), \qquad \lambda \cdot (x_n) = (\lambda x_n).$$

Considérons le sous-ensemble $F \subset E$ des suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Monter que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de F.

3. Montrer que tout élément de F est déterminée par ses deux premiers termes. En déduire que

$$F = Vect\{(a_n), (b_n)\},$$

c'est-à-dire que F est un plan vectoriel de E.

4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n) \in F$ vérifiant $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

3 Bases et dimension

Exercice 15 * Vérifier que la famille $(\ (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\ )$ engendre $\mathbb{R}^3$ tout entier. Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 16 * Montrer que les vecteurs suivants :

$$v_1 = (0,1,1,1),\ v_2 = (1,0,1,1),\ v_3 = (1,1,0,1),\ v_4 = (1,1,1,0),$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$. Dans cette base, calculer les coordonnées des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 ainsi que celles de $u = (1,1,1,1)$ et $w = (1,0,0,0)$.

Exercice 17 * Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants constituent-ils une base ?

1. $x_1 = (1,-1,0), \qquad x_2 = (1,0,1), \qquad x_3 = (1,2,3).$
2. $x_1 = (1,0,-1), \qquad x_2 = (0,1,0), \qquad x_3 = (1,1,0).$
3. $x_1 = (1,2,3), \qquad x_2 = (2,3,1), \qquad x_3 = (0,0,0).$
4. $x_1 = (1,0,0), \qquad x_2 = (1,1,0), \qquad x_3 = (1,1,1).$
5. $x_1 = (1,1,-1), \qquad x_2 = (1,-1,1), \qquad x_3 = (-1,1,1).$

Exercice 18 * Vérifier que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$, en déterminer des bases et en déduire leurs dimensions.

$$\begin{aligned}
F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ x - 2y + z = 0\} \\
G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ x - 2y + z = 0 \text{ et } \ x = y\} \\
H &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid\ x - 2y + z - t = 0\} \\
K &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid\ x - 2y + z = 0 \text{ et } x + y + z + t = 0\}
\end{aligned}$$

Exercice 19 Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Le cas échéant calculer leurs dimensions.

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x+y-z = x+y+z = 0\}, \quad E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x^2 - z^2 = 0\},$$
$$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ e^x e^y = 0\}, \quad E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ z(x^2+y^2) = 0\}.$$

Exercice 20 Donner une description géométrique de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ puis de $\mathbb{R}^3$ (raisonner selon la dimension de ceux-ci).

Exercice 21 * Considérons l'ensemble

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base et en déduire sa dimension.

Exercice 22 Montrer que l'ensemble $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \ | \ p'(1) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$. Trouver une base de S et en déduire sa dimension.

Exercice 23 Soit la famille de polynômes $(x^3, x^2(x-1), x(x-1)^2, (x-1)^3)$. Montrer qu'elle engendre $\mathbb{R}_3[x]$. Justifier que c'est une base de $\mathbb{R}_3[x]$. Trouver les coordonnées du vecteur $p(x) = 2x^3 + x + 2$ dans cette base.

Exercice 24 Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n. Montrer que P et ses n dérivées forment une base de l'espace $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 25 Considérons la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$v_1 = (1, -1, 0, 2), \quad v_2 = (1, 0, 1, 2), \quad v_3 = (1, 3, 5, 7), \quad v_4 = (0, 2, 3, \alpha),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de α la famille forme une base de $\mathbb{R}^4$?

2. Dans le cas où la famille est liée, déterminer toutes les relations linéaires liant ces vecteurs. Quelle est la dimension de l'espace engendré ?

3. Soit $v = (-2, k, 1, 3)$. Pour quelles valeurs de k a-t-on $v \in Vect\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$? Dans ce cas, déterminer les composantes du vecteur v dans une base de $Vect\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Exercice 26 *

1. Montrer que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

   est une base de l'espace des matrices carrées rééelles d'ordre 2. En déduire la dimension de cet espace.

2. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n.

3. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n diagonales.

4. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n symétriques.

5. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures.

Exercice 27 * Dans un espace vectoriel réel E de base (e_1, e_2, e_3), les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ?

$$\begin{array}{ll} 1.\ \{e_1+e_2, e_2+e_3, e_3+e_1\}, & 2.\ \{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3\}, \\ 3.\ \{e_1-e_2, e_2-e_3, e_3-e_1\}, & 4.\ \{e_1+2e_2, e_2+2e_3, e_3+2e_1\}, \\ 5.\ \{e_1+e_2, e_2-2e_3\}, & 6.\ \{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, 2e_1+e_2-e_3\}. \end{array}$$

Exercice 28 Soit E un espace vectoriel réel et $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une famille libre de E.

1. Déterminer la dimension et une base du sous espace vectoriel
$$F = \text{Vect}\{e_1+e_4, 2e_1+3e_3+2e_4, e_3, -e_1-5e_3-e_4\}.$$
2. Déterminer, en fonction de $h \in \mathbb{R}$, la dimension et une base (quand elle existe) de
$$G = F \cap \text{Vect}\{e_1+he_2, he_1+he_4\}.$$

Exercice 29 *

Quel est le rang des familles de vecteurs suivantes ? (On pourra utiliser la méthode de l'échelonnement).

1. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,1,1)$.
2. $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (0,1,1,0)$, $v_4 = (0,0,1,1)$.
3. $v_1 = (1,1,0,1)$, $v_2 = (-1,1,1,0)$, $v_3 = (0,-1,1,1)$, $v_4 = (1,1,1,0)$.
4. $v_1 = (1,-1,0,1)$, $v_2 = (1,1,-1,1)$, $v_3 = (0,1,1,1)$, $v_4 = (1,0,1,0)$.
5. $v_1 = (1,0,0,2,5)$, $v_2 = (0,1,0,3,4)$, $v_3 = (0,0,1,4,7)$, $v_4 = (2,-3,4,11,12)$.

Exercice 30 * Déterminer les relations linéaires liant les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1,-1,0,0), \quad u_2 = (1,0,-1,0), \quad u_3 = (1,0,0,-1),$$
$$u_4 = (0,1,-1,0), \quad u_5 = (0,1,0,-1), \quad u_6 = (0,0,1,-1).$$

Trouver le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants parmi ces vecteurs.

Exercice 31 Répondre aux questions de l'exercice précédent dans le cas des vecteurs $p_1(x) = x^3+4x^2-2x+3$, $p_2(x) = 2x^3+10x^2-3x+7$ et $p_3(x) = 2x^3+4x^2-6x+4$ dans $R_3[x]$.

Exercice 32 * Déterminer la dimension des sous espaces vectoriels engendrés par chacune des 2 familles de vecteurs ci-dessous. Donnez en une base et exprimer les coordonnées de chacun des vecteurs de la famille dans la base trouvée.

1. $v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (2,3,4,5), \quad v_3 = (3,4,5,6), \quad v_4 = (4,5,6,7), \quad v_5 = (5,6,7,8).$
2. $w_1 = (1,3,0,-1), \quad w_2 = (1,2,3,0), \quad w_3 = (0,-1,0,4), \quad w_4 = (1,0,0,-13).$

Exercice 33

On considère, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la famille de vecteurs suivants :

$$(1,1,\alpha),\ (1,\alpha,1),\ (\alpha,1,1).$$

Déterminer en fonction de α le rang de cette famille de vecteurs.

4 Somme directe, sous-espaces supplémentaires

Exercice 34 * Montrer que $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera une base. Même question avec $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z \text{ et } x = 0\}$. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Exercice 35 * Soient x, y, u, v des éléments de $\mathbb{R}^4$. On note M et N les sous espaces vectoriels engendrés respectivement par $\{x, y\}$ et $\{u, v\}$. Quels sont les cas où $M \oplus N = \mathbb{R}^4$?

1. $x = (1, 1, 0, 0)$, $y = (1, 0, 1, 0)$, $u = (0, 1, 0, 1)$, $v = (0, 0, 1, 1)$.
2. $x = (-1, 1, 1, 0)$, $y = (0, 1, -1, 1)$, $u = (1, 0, 0, 0)$, $v = (0, 0, 0, 1)$.
3. $x = (1, 0, 0, 1)$, $y = (0, 1, 1, 0)$, $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, 0, 1)$.

Exercice 36 On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. Vect$\{v_1, v_2\}$ et Vect$\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour Vect$\{v_1, v_3, v_4\}$ et Vect$\{v_2, v_5\}$.

Exercice 37 Déterminer si les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants sont supplémentaires ou en somme directe :

1. $V_1 = \mathrm{V}ect\{(1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$ et $V_2 = \mathrm{V}ect\{(0, 1, 2)\}$.
2. $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$ et $V_2 = \mathrm{V}ect\{(1, 0, -1)\}$.
3. $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$ et $V_2 = \mathrm{V}ect\{(1, 2, 1)\}$.
4. $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0,\ x - z = 0\}$ et $V_2 = \mathrm{V}ect\{(1, a, b)\}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 38 * Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ et $(4, 2, 0)$. Quelle est la dimension de F ? Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 39 * Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Comparer $F \cap (G + (F \cap H))$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.