Université d'Aix-Marseille **Licence de Mathématiques**
2014-2015

Algèbre linéaire 1

Partiel 1 – 20 février 2015

Calculette, portable et documents non autorisés — Durée : 2 heures

Exercice 1

1. Donner la définition de matrice *inversible*.

2. Parmi les matrices suivantes, dire lesquelles sont totalement échelonnées, échelonnées mais non totalement, non échelonnées. Justifier vos réponses.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 3 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

Exercice 3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I_2$, où I_2 dénote la matrice identité d'ordre 2. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1}.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a $A^n = a_n A + b_n I_2$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, considérons la matrice $B_t = A - tI_2$. Déterminer toutes les valeurs $t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice B_t n'est pas inversible.

T.S.V.P.

Exercice 4

On considère la matrice suivante, qui dépend d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 3 \\ 2 & 1-t & 2t-1 & -6 \\ -4 & 2t-2 & 2t+2 & t+7 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de la matrice A_t.

2. Justifier le fait que la matrice A_1, obtenue pour $t = 1$, est inversible et calculer son inverse par échelonnement total.

Exercice 5

Pour livrer des lots de marchandise à ses acheteurs, une usine doit faire appel à deux convoyeurs. Le premier convoyeur récupère le lot sur le lieu de production et le transporte jusqu'à un entrepôt où le deuxième convoyeur prend le relai et transporte le bien jusqu'au client. Le service du premier convoyeur coûte 1 euro et 50 centimes du kilomètre pour la totalité du lot et le transport est effectué à une vitesse de 100 Km/h en moyenne. Le service du deuxième convoyeur coûte 1 euro et 25 centimes du kilomètre et le transport est effectué à une vitesse de 50 Km/h en moyenne.

1. Déterminer la matrice A qui, si on la multiplie à droite par le vecteur

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \text{distance parcourue par le premier convoyeur} \\ \text{distance parcourue par le deuxième convoyeur} \end{pmatrix}$$

donne le vecteur

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \text{distance totale parcourue par le lot} \\ \text{coût total pour l'usine} \\ \text{temps total du parcours} \end{pmatrix}$$

(on considèrera comme négligeable le temps nécessaire à transférer la marchandise du premier convoyeur au deuxième).

2. Déterminer $\boldsymbol{w}$ lorsque $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix}$ (les distances sont en Km).

3. Déterminer les distances parcourues par les deux convoyeurs lorsque la livraison a coûté 1275 euros et a pris 12 h. À quelle distance du lieu de production l'acheteur se trouve-t-il dans ce cas ?