Université d'Aix-Marseille	**Licence de Mathématiques**
	2014-2015

Algèbre linéaire 1

Partiel 1 – 20 février 2015

Calculette, portable et documents non autorisés — Durée : 2 heures

Exercice 1

1. Donner la définition de matrice *inversible*.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. On appelle B l'*inverse de* A et on la note A^{-1}

2. Parmi les matrices suivantes, dire lesquelles sont totalement échelonnées, échelonnées mais non totalement, non échelonnées. Justifier vos réponses.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice D est totalement échelonnée, la matrice B est échelonnée mais pas totalement et les matrices A et C ne sont pas échelonnées.

Exercice 2

Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 3 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

En retranchant la première ligne des deux autres puis deux fois la deuxième de la troisième, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y + z = 2 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

qui n'admet pas de solution.

Exercice 3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I_2$, où I_2 dénote la matrice identité d'ordre 2. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1}.

On vérifie aisement que $A^2 = A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. De cette égalité on tire $A(A - I_2)/2 = I_2$ ce qui montre que A est inversible d'inverse $A^{-1} = (A - I_2)/2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a $A^n = a_n A + b_n I_2$.

Pour $n = 1$ on a $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ et on a bien $A = 1A + 0I_2$. Supposons que l'égalité $A^n = a_n A + b_n I_2$ est vraie. On a alors $A^{n+1} = A^n A = (a_n A + b_n I_2)A = a_n A^2 + b_n A = a_n(A + 2I_2) + b_n A = A(a_n + b_n) + 2a_n I_2$. On calcule ensuite $a_n + b_n = \frac{2^n-(-1)^n}{3} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3} = \frac{2\times 2^n+(-1)^n}{3} = a_{n+1}$ et $2a_n = b_{n+1}$ (on remarquera que $(-1)^n = -(-1)^{n+1}$). L'égalité est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, considérons la matrice $B_t = A - tI_2$. Déterminer toutes les valeurs $t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice B_t n'est pas inversible.

Une matrice 2×2 n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul. Le déterminant de $B_t = \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$ est égal à $-t(1-t) - 2 = t^2 - t - 2$ et s'annule en $t = 2$ et $t = -1$, qui sont les seules valeurs pour lesquelles B_t n'est pas inversible.

EXERCICE 4

On considère la matrice suivante, qui dépend d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 3 \\ 2 & 1-t & 2t-1 & -6 \\ -4 & 2t-2 & 2t+2 & t+7 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de la matrice A_t.

En faisant les opérations élémentaires suivantes sur les lignes de la matrice A_t : $[L_1, L_2, L_3 - L_1, L_4 + 2L_1]$, $[L_1, L_2, L_3 + L_2, L_4 - 2L_2]$, $[L_1, L_2, L_3, L_4 - L_3]$ on obtient la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2t & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}.$$

On voit que si $t \neq 0, -1$ la matrice est échelonnée et est de rang 4. Si $t = -1$ la matrice est encore échelonnée mais son rang est 3. Finalment, si $t = 0$ la matrice n'est pas échelonnée mais elle admet un deuxième pivot sur la deuxième ligne (et dernière colonne) et elle est donc de rang 2.

2. Justifier le fait que la matrice A_1, obtenue pour $t = 1$, est inversible et calculer son inverse par échelonnement total.

Comme on l'a vu au point précédent, la matrice A_1 est de rang maximal et est donc inversible.
Pour échelonner totalement la matrice A_1 il suffit de faire les opération élémentaires suivantes sur les lignes : $[L_1, L_2, L_3 - L_1, L_4 + 2L_1]$, $[L_1, L_2, L_3 + L_2, L_4 - 2L_2]$, $[L_1, L_2, L_3, L_4 - L_3]$, $[L_1, L_2, L_3/2, L_4/2]$, $[L_1 + L_4, L_2 - 3L_4, L_3 + L_4, L_4]$, $[L_1 - L_2 + L_3, L_2, L_3, L_4]$, $[L_1/2, L_2, L_3, L_4]$. Les mêmes opérations faites sur la matrice I_4 donnent l'inverse de A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 & 5/4 \\ -9/2 & 11/2 & 3/2 & -3/2 \\ 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 5

Pour livrer des lots de marchandise à ses acheteurs, une usine doit faire appel à deux convoyeurs. Le premier convoyeur récupère le lot sur le lieu de production et le transporte jusqu'à un entrepôt où le deuxième convoyeur prend le relai et transporte le bien jusqu'au client. Le service du premier convoyeur coûte 1 euro et 50 centimes du kilomètre pour la totalité du lot et le transport est effectué à une vitesse de 100 Km/h en moyenne. Le service du deuxième convoyeur coûte 1 euro et 25 centimes du kilomètre et le transport est effectué à une vitesse de 50 Km/h en moyenne.

1. Déterminer la matrice A qui, si on la multiplie à droite par le vecteur

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \text{distance parcourue par le premier convoyeur} \\ \text{distance parcourue par le deuxième convoyeur} \end{pmatrix}$$

donne le vecteur

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \text{distance totale parcourue par le lot} \\ \text{coût total pour l'usine} \\ \text{temps total du parcours} \end{pmatrix}$$

(on considèrera comme négligeable le temps nécessaire à transférer la marchandise du premier convoyeur au deuxième).

> La matrice A est la matrice 3×2 suivante :
>
> $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 5/4 \\ 1/100 & 1/50 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer $\boldsymbol{w}$ lorsque $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix}$ (les distances sont en Km).

> On a
>
> $$\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1000 \\ 9 \end{pmatrix}$$
>
> .

3. Déterminer les distances parcourues par les deux convoyeurs lorsque la livraison a coûté 1275 euros et a pris 12 h. À quelle distance du lieu de production l'acheteur se trouve-t-il dans ce cas ?

> Si on note x la distance parcourue par le premier convoyeur et y la distance parcourue par le deuxième, x et y doivent satisfaire le système suivant :
>
> $$\begin{cases} 1.5x + 1.25y = 1275 \\ x/100 + y/50 = 12 \end{cases}$$
>
> La solution du système est $x = 600$ Km et $y = 300$ Km d'où on déduit la distance entre le lieu de production et l'acheteur : $x + y = 900$ Km.