Université d'Aix-Marseille 2014-2015

Algèbre Linéaire 1

L1 MI - DS 2 - MARS 2015

Documents et calculatrices non autorisés – Durée : 2h

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel.

i) Donner la définition d'une famille finie libre de vecteurs de E.

ii) Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs de E.

iii) Montrer qu'une famille finie de vecteurs de E contenant le vecteur nul n'est pas libre.

iv) Soit $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que la sous-famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre également.

Exercice 2

i) Soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \text{ et } x + 2z - t = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

ii) Donner la dimension et une base de F.

iii) Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs suivante :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

iv) Donner une base de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

v) A-t-on $F \oplus \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$?

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère les polynômes :

$$P_0 = X^2 - 2, \quad P_1 = (X-1)(X+1), \quad P_2 = (X-2)(X+1), \quad P_3 = (X-1)(X+2).$$

i) Rappeler la définition de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la dimension de cet espace ?

ii) Montrer que P_0 est combinaison linéaire de P_2 et P_3.

iii) Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Est-ce une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 4

i) Rappeler la définition d'une matrice inversible.

ii) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Soit E un espace vectoriel réel. Pour un vecteur $x \in E$, on notera par $(x)_B$ ses coordonnées dans une base B de E.

iii) Soit $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les vecteurs suivants :

$$f_1 = -e_1 + 2e_2 - e_3, \quad f_2 = e_1 - e_2, \quad f_3 = -2e_1 + e_2 + 2e_3.$$

Montrer que $B_2 = (f_1, f_2, f_3)$ est aussi une base de E.

iv) Soient $u, v \in E$ deux vecteurs dont les coordonnées en base B_1 et B_2 respectivement sont données par

$$(u)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } (v)_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les coordonnées de u dans la base B_2 et les coordonnées de v dans la base B_1.

v) Soit $w \in E$. Montrer que si les coordonnées du vecteur w en base B_2 sont $(w)_{B_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors ses coordonnées en base B_1 sont données par $(w)_{B_1} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, où M est la matrice de la question (ii).

vi) Proposer (sans démonstration) la formule analogue, qui permet le passage dans le sens inverse, c'est-à-dire de l'écriture en base B_1 vers celle en base B_2.