Université d'Aix-Marseille 2014-2015

Algèbre Linéaire 1

DS 2 - CORRIGÉ

Barème sur 20 : Toutes les questions sont à **1pt** sauf 2.(iii), 3.(ii), 3.(iii) et 4.(ii) qui sont à **1,5**.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel.

i) Donner la définition d'une famille finie libre de vecteurs de E.

ii) Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs de E.

iii) Montrer qu'une famille finie de vecteurs de E contenant le vecteur nul n'est pas libre.

iv) Soit $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que la sous-famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre également.

Solution : (i) Soit $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que cette famille est libre si l'égalité

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = 0,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

(ii) Soit $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. Le rang de cette famille de vecteurs est égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs :

$$\text{rang}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)).$$

(iii) Soit $\{0, u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ une famille finie de vecteurs de E contenant le vecteur nul. La famille est libre si l'égalité

$$\lambda_0 0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = 0 \qquad (*)$$

implique $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. On voit que cela n'est pas le cas car nous pouvons poser par exemple $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ et $(*)$ est satisfaite.

(iv) Supposons que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ soit une famille libre. Si la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ était liée, l'égalité

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

serait satisfaite pour certains coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ non tous nuls. On aurait donc l'égalité

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + 0 u_4 = 0$$

satisfaite pour certains coefficients non tous nuls également. Ceci contredit le fait que la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est libre. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ ne peut pas être liée.

Exercice 2

i) Soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \text{ et } x + 2z - t = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

ii) Donner la dimension et une base de F.

iii) Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs suivante :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

iv) Donner une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

v) A-t-on $F \oplus \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$?

Solution : (i) Pour que F soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:
1. F doit être non vide,
2. pour tout $w, v \in F$ on doit avoir $w + v \in F$,
3. pour tout $w \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on doit avoir $\lambda w \in F$.

Vérifions ces trois propriétés.
1. Il est clair que le vecteur nul $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ appartient à F donc F est non vide.
2. Soit $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4$ et $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ deux éléments de F. Comme $w, v \in F$, on sait que

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 0 \\ w_1 + 2w_3 - w_4 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + 2v_3 - v_4 = 0. \end{cases} \tag{$**$}$$

Pour le vecteur $w + v = (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4)$ nous avons

$$(w_1 + v_1) + (w_2 + v_2) + (w_3 + v_3) = (w_1 + w_2 + w_3) + (v_1 + v_2 + v_3) \overset{(**)}{=\!=} 0 + 0 = 0$$

et

$$(w_1 + v_1) + 2(w_3 + v_3) - (w_4 + v_4) = (w_1 + 2w_3 - w_4) + (v_1 + 2v_3 - v_4) \overset{(**)}{=\!=} 0 + 0 = 0.$$

On a montré que $w + v \in F$.
3. Soit $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $w \in F$, ses coordonnées vérifient $(**)$.
Pour le vecteur $\lambda w = (\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda w_3, \lambda w_4)$ nous avons donc

$$\lambda w_1 + \lambda w_2 + \lambda w_3 = \lambda(w_1 + w_2 + w_3) \overset{(**)}{=\!=} \lambda \cdot 0 = 0$$

et

$$\lambda w_1 + 2\lambda w_3 - \lambda w_4 = \lambda(w_1 + 2w_3 - w_4) \overset{(**)}{=\!=} \lambda \cdot 0 = 0.$$

Nous avons montré que $\lambda w \in F$.
L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(ii) Un vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ appartient à F si ses coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z - t = 0 \end{cases} \quad \text{équivalent après l'échelonnement à} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z - t = 0. \end{cases}$$

Ce dernier système admet deux inconnues principales x, y et deux variables libres z, t. On exprime les inconnues principales en terme de variables libres : $y = z - t$ et $x = -2z + t$. On en déduit que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z + t \\ z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où $z, t \in \mathbb{R}$. En particulier, la famille

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et génératrice de F. On vérifie facilement qu'elle est aussi libre :

$$a\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{donne} \quad \left\{\begin{array}{r}-2a+b=0\\ a-b=0\\ a=0\\ b=0\end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad a=b=0.$$

On constate que $\mathcal{B}$ est une base de F et par conséquent $\dim(F)=2$.

(iii) Nous savons d'après le cours que le rang de la famille $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ est égal au rang de la matrice formée par les vecteurs $u_1,\ldots,u_4$ en tant que colonnes :

$$\operatorname{rang}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\2&4&2&0\\-1&1&-2&1\\1&5&0&1\end{pmatrix}.$$

Pour calculer le rang de la matrice, on l'échelonne.

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\2&4&2&0\\-1&1&-2&1\\1&5&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&6&-2&2\\0&0&0&0\\0&6&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&6&-2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

On trouve que le rang de cette matrice vaut 2 d'où

$$\operatorname{rang}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}=2.$$

(iv) A la question précédente, nous avons trouvé une matrice échelonnée dont les colonnes pivotales sont la première et la deuxième. Ceci implique que le premier et le deuxième vecteur de la famille en question forment une base de l'espace engendré. La famille

$$\mathcal{B}'=(u_1,u_2)=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\1\\5\end{pmatrix}\right)$$

est une base de $\operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

(v) Pour vérifier si $F\oplus\operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)=\mathbb{R}^4$, il suffit de vérifier si la réunion d'une base de F avec une base de $\operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ forme une base de $\mathbb{R}^4$. A la question (ii) nous avons trouvé une base $\mathcal{B}$ de F et à la question (iv) nous avons trouvé une base $\mathcal{B}'$ de $\operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$. On les réunit en une famille de quatre vecteurs :

$$\mathcal{F}=\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\1\\5\end{pmatrix}\right).$$

Vérifions si cette famille est libre :

$$a\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-1\\4\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{équivaut à} \quad \left\{\begin{array}{r}-2a+b+c-d=0\\ a-b+2c+4d=0\\ a-c+d=0\\ b+c+5d=0.\end{array}\right.$$

Après l'échelonnement, ce dernier système devient

$$\begin{cases} -2a + b + c - d = 0 \\ -b + 5c + 7d = 0 \\ 4c + 8d = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Nous avons trois inconnues principales a, b, c et une variable libre d. Le système admet une infinité de solutions, d'où la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$. Nous n'avons donc pas la relation $F \oplus \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$ (plus précisément ces deux sous-espaces ne sont pas en somme directe car leur intersection est une droite).

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère les polynômes :

$$P_0 = X^2 - 2, \quad P_1 = (X-1)(X+1), \quad P_2 = (X-2)(X+1), \quad P_3 = (X-1)(X+2).$$

i) Rappeler la définition de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la dimension de cet espace ?

ii) Montrer que P_0 est combinaison linéaire de P_2 et P_3.

iii) Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Est-ce une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Solution : (i) La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$ où 1 désigne le polynôme constant égal à 1. Comme cette base est composée de trois vecteurs, on en déduit que $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.

(ii) Le polynôme P_0 est combinaison linéaire de P_2 et P_3 s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P_0 = aP_2 + bP_3$. Nous avons

$$P_0 = X^2 - 2, \quad P_2 = (X-2)(X+1) = X^2 - X - 2, \quad P_3 = (X-1)(X+2) = X^2 + X - 2.$$

On peut remarquer que

$$P_2 + P_3 = X^2 - X - 2 + X2 + X - 2 = 2X^2 - 4 = 2P_0, \quad \text{d'où} \quad P_0 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3.$$

Sinon, on peut passer par le calcul suivant. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P_0 = aP_2 + bP_3$, c'est-à-dire

$$X^2 - 2 = a(X^2 - X - 2) + b(X^2 + X - 2) = (a+b)X^2 + (b-a)X - 2a - 2b.$$

Comme la famille $(1, X, X^2)$ est libre (c'est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$), on en déduit le système suivant

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 0 \\ -2a - 2b = -2 \end{cases} \quad \text{ce qui donne} \quad a = b = \frac{1}{2}.$$

Le polynôme P_0 est une combinaison linéaire de P_2 et P_3.

(iii) La famille (P_1, P_2, P_3) est libre si l'égalité

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$$

implique $a = b = c = 0$. Dans l'égalité ci-dessus, le côté droit désigne le polynôme constant nul. Nous partons donc de

$$a(X^2 - 1) + b(X^2 - X - 2) + c(X^2 + X - 2) = 0,$$

ce qui donne

$$(a + b + c)X^2 + (-b + c)X - a - 2b - 2c = 0.$$

Comme la famille $(1, X, X^2)$ est libre, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -b+c=0 \\ -a-2b-2c=0 \end{cases} \qquad \text{ce qui donne} \quad a=b=c=0.$$

On en déduit que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Comme cette famille libre est composée de trois vecteurs et comme l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4

i) Rappeler la définition d'une matrice inversible.

ii) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Soit E un espace vectoriel réel. Pour un vecteur $x \in E$, on notera par $(x)_B$ ses coordonnées dans une base B de E.

iii) Soit $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les vecteurs suivants :

$$f_1 = -e_1 + 2e_2 - e_3, \quad f_2 = e_1 - e_2, \quad f_3 = -2e_1 + e_2 + 2e_3.$$

Montrer que $B_2 = (f_1, f_2, f_3)$ est aussi une base de E.

iv) Soient $u, v \in E$ deux vecteurs dont les coordonnées en base B_1 et B_2 respectivement sont données par

$$(u)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } (v)_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les coordonnées de u dans la base B_2 et les coordonnées de v dans la base B_1.

v) Soit $w \in E$. Montrer que si les coordonnées du vecteur w en base B_2 sont $(w)_{B_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors ses coordonnées en base B_1 sont données par $(w)_{B_1} = M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, où M est la matrice de la question (ii).

vi) Proposer (sans démonstration) la formule analogue, qui permet le passage dans le sens inverse, c'est-à-dire de l'écriture en base B_1 vers celle en base B_2.

Solution : (i) Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

(ii) La matrice M est inversible si son rang est maximal, c'est -à-dire si $\text{rang}(M) = 3$. Nous allons le vérifier grâce à l'échelonnement. Dans l'espoir que M soit inversible, nous allons échelonner la matrice augmentée $(M|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ici on constate que la matrice M est de rang 3, alors inversible. On continue l'échelonnement total afin de trouver M^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A gauche on voit apparaître la matrice identité, ce qui implique que la matrice de droite est l'inverse de M :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E, on en déduite que E est un espace vectoriel de dimension 3. Nous allons montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. Partons de l'égalité $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ qui s'écrit

$$a(-e_1 + 2e_2 - e_3) + b(e_1 - e_2) + c(-2e_1 + e_2 + 2e_3) = 0,$$

ou encore

$$(-a + b - 2c)e_1 + (2a - b + c)e_2 + (-a + 2c)e_3 = 0.$$

Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E, elle est libre. On en déduit le système

$$\begin{cases} -a + b - 2c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ -a + 2c = 0, \end{cases} \quad \text{qui après l'échelonnement donne} \quad \begin{cases} -a + b - 2c = 0 \\ b - 3c0 \\ c = 0. \end{cases}$$

On obtient $a = b = c = 0$ ce qui implique que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. Comme c'est une famille libre composée de trois vecteurs dans un espace E de dimension 3, c'est une base de E.

(iv) D'après les coordonnées de u et v données, on a

$$u = e_1 + e_2 - e_3 \quad \text{et} \quad v = 2f_1 - f_2 + 2f_3.$$

Commençons par le vecteur v. Pour trouver ses coordonnées en base $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$, il faut représenter v comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Nous avons

$$v = 2f_1 - f_2 + 2f_3 = 2(-e_1 + 2e_2 - e_3) - (e_1 - e_2) + 2(-2e_1 + e_2 + 2e_3) = -7e_1 + 7e_2 + 2e_3.$$

Nous avons trouvé

$$(v)_{B_1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De même, pour trouver les cordonnées du vecteur u en base $B_2 = (f_1, f_2, f_3)$, on cherche à représenter u sous la forme $u = af_1 + bf_2 + cf_3$. Ceci nous amène à considérer l'équation suivante :

$$e_1 + e_2 - e_3 = a(-e_1 + 2e_2 - e_3) + b(e_1 - e_2) + c(-2e_1 + e_2 + 2e_3),$$

qui est équivalente à

$$e_1 + e_2 - e_3 = (-a + b - 2c)e_1 + (2a - b + c)e_2 + (-a + 2c)e_3.$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base, donc une famille libre, on obtient le système

$$\begin{cases} -a + b - 2c = 1 \\ 2a - b + c = 1 \\ -a + 2c = -1 \end{cases} \quad \text{qui admet pour solution} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 1. \end{cases}$$

Nous avons trouvé

$$(u)_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(v) Si $(w)_{B_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $w = af_1 + bf_2 + cf_3$, d'où

$$w = a(-e_1 + 2e_2 - e_3) + b(e_1 - e_2) + c(-2e_1 + e_2 + 2e_3) = (-a + b - 2c)e_1 + (2a - b + c)e_2 + (-a + 2c)e_3.$$

On a trouvé que

$$(w)_{B_1} = \begin{pmatrix} -a + b - 2c \\ 2a - b + c \\ -a + 2c \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + b - 2c \\ 2a - b + c \\ -a + 2c \end{pmatrix}.$$

Nous avons montré que $(w)_{B_2} = M(w)_{B_1}$.

(vi) A la question précédente nous avons montré que pour tout vecteur $w \in E$ nous avons

$$(w)_{B_2} = M(w)_{B_1}.$$

Comme la matrice M est inversible, on obtient aussi que

$$(w)_{B_1} = M^{-1}(w)_{B_2}.$$

Ceci est la formule cherchée (que l'on a même démontrée).