Université d'Aix-Marseille 2014-2015

Algèbre Linéaire 1

L1 MI - DS 2 - MARS 2015

Documents et calculatrices non autorisés – Durée : 2h

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel.

i) Donner la définition d'une famille finie libre de vecteurs de E.

Réponse. Une famille $\mathcal{F} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre si toute combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{F}$ est triviale, ce que l'on exprime mathématiquement ainsi : si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \vec{0}$ alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

ii) Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs de E.

Réponse. Le rang d'une famille de vecteurs de E est la dimension du sous-espace engendré par la famille : $\mathrm{rang}(u_1, \ldots, u_n) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n))$. Une méthode pour calculer le rang d'une famille de vecteurs est d'échelonner la matrice de ces vecteurs, le rang est alors le nombre de lignes non nulles (ou de colonnes pivotales) de la forme échelonnée obtenue.

iii) Montrer qu'une famille finie de vecteurs de E contenant le vecteur nul n'est pas libre.

Réponse. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E et supposons que $u_1 = \vec{0}$. On considère les scalaires : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ils ne sont pas tous nuls puisque $\lambda_1 = 1$, pourtant on a $\lambda_1 u_0 + \lambda_2 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 1.\vec{0} + 0.u_1 + \cdots + 0.u_n = \vec{0}$. C'est une combinaison linéaire nulle mais non triviale de la famille, celle-ci n'est donc pas libre.

iv) Soit $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que la sous-famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre également.

Réponse. Considèrons une combinaison linéaire nulle de u_1, u_2 et u_3, c'est à dire des scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \vec{0}$; il nous faut montrer que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Posons $\lambda_4 = 0$; on a alors $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = \vec{0} + 0.u_4 = \vec{0}$. Comme la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est supposée libre, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$; en particulier on a bien montré que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est donc libre.

Exercice 2

i) Soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \text{ et } x + 2z - t = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Réponse. Par souci de place on note les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ en ligne.
Soit $u = (x, y, z, t)$ et $u' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de F. On a donc $x + y + z = x' + y' + z' = 0$ et $x + 2z - t = x' + 2z' - t' = 0$. Par définition de la somme sur $\mathbb{R}^4$ on a $u + v = (x + x', y + y', z + z')$; comme $(x + x') + (y + y') + (z + z') = x + y + z + x' + y' + z' = 0$ et $(x + x') + 2(z + z') - (t + t') = x + 2z - t + x' + 2z' - t' = 0$ on voit que $u + v \in F$. D'autre part si λ est un scalaire alors $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ et comme $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = 0$ et $\lambda x + 2\lambda z - \lambda t = \lambda(x + 2z - t) = 0$ on voit que $\lambda u \in F$. L'ensemble F est donc stable par addition et multiplication externe ; comme il est non vide ($\vec{0} = (0, 0, 0, 0) \in F$) c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

ii) Donner la dimension et une base de F.

Réponse. Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de F. On a donc $x + y + z = 0$ et $x + 2z - t = 0$ donc $y = -x - z$ et $t = x + 2z$. Par conséquent $u = (x, -x - z, z, x + 2z)$ ce que l'on peut aussi écrire $u = x.(1, -1, 0, 1) + z.(0, -1, 1, 2)$.
Notons $f_1 = (1, -1, 0, 1)$ et $f_2 = (0, -1, 1, 2)$; on vient de voir que la famille $\{f_1, f_2\}$ est génératrice de F puisque tout vecteur $u \in F$ s'écrit $x.f_1 + z.f_2$ pour des scalaires x et z appropriés. Reste à voir que $\{f_1, f_2\}$ est libre ce qui est immédiat car ils sont clairement non proportionnels (une famille de 2 vecteurs est libre ssi les deux vecteurs ne sont pas proportionnels).
Le sous-espace F est donc de dimension 2 et une base de F est $\{f_1, f_2\} = \{(1, -1, 0, 1), (0, -1, 1, 2)\}$.

iii) Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs suivante :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse. Première méthode : on remarque que $u_4 = u_1 - u_3$; donc $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ (théorème vu en cours : si un vecteur u d'une famille $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \setminus u$ engendrent le même sous espace où $\mathcal{F} \setminus u$ désigne la famille $\mathcal{F}$ de laquelle on a ôté le vecteur u). On remarque également que $u_2 = 5.u_1 - 3.u_3$, donc $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$. Mais comme u_1 et u_3 sont clairement non proportionnels, ils forment une famille libre qui est donc une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_3)$; comme $\mathrm{Vect}(u_1, u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ on en déduit que cet espace est de dimension 2 : le rang des 4 vecteurs est 2.
Deuxième méthode : on écrit la matrice des vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait que le rang des 4 vecteurs est le rang de la matrice qui s'obtient par échelonnement ; un rapide calcul ($L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_2 + L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2.L_1$) donne la forme échelonnée suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est donc de rang 2.

iv) Donner une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
Réponse. On déjà répondu à cette question si on a utilisé la première méthode à la question précédente. Sinon, comme on sait maintenant que le rang de la famille est 2, c'est à dire que l'espace $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est de dimension 2, il nous suffit de trouver une famille libre de 2 vecteurs dans cet espace pour être assuré que ça soit une base ; on prend par exemple u_1 et u_2, qui sont clairement non proportionnels, donc forment une famille libre.

v) A-t-on $F \oplus \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$?
Réponse. On peut facilement vérifier que les coordonnées de u_4 satisfont les deux équations $x + y + z = 0$ et $x + 2z - t = 0$. Par conséquent $u_4 \in F$ et l'intersection entre F et $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ n'est pas réduite au vecteur nul. Autrement dit F et $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ne sont pas supplémentaires et on n'a pas $\mathbb{R}^4 = F \oplus \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
Si on a pas vu que $u_4 \in F$ il faut calculer explicitement l'intersection entre F et $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Un vecteur $u = (x, y, z, t)$ est dans cette intersection s'il satisfait d'une part : $x + y + z = 0$ et $x + 2z - t = 0$ ($u \in F$), d'autre part qu'il existe deux scalaires λ et μ tels que $u = \lambda u_1 + \mu u_2$ puisqu'on a vu à la question précédente que $\{u_1, u_2\}$ était une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z - t = 0 \\ x = \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + 4\mu \\ z = -\lambda + \mu \\ t = \lambda + 5\mu \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ t = -3\mu \\ \lambda = -2\mu \end{cases}$$

qui a une infinité de solutions (dont u_4 si on prend $\mu = -1/3$). L'intersection n'est donc pas réduite au seul vecteur nul et les deux espaces ne sont donc pas supplémentaires.

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère les polynômes :

$$P_0 = X^2 - 2, \quad P_1 = (X-1)(X+1), \quad P_2 = (X-2)(X+1), \quad P_3 = (X-1)(X+2).$$

i) Rappeler la définition de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la dimension de cet espace ?

Réponse. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est la famille $\{X^2, X, 1\}$; cette base a 3 éléments, on en déduit que $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3.

ii) Montrer que P_0 est combinaison linéaire de P_2 et P_3.

Réponse. En développant on trouve $P_2 = X^2 - X - 2$ et $P_3 = X^2 + X - 2$. On voit que $P_2 + P_3 = 2X^2 - 4 = 2P_0$ donc que $P_0 = 1/2P_2 + 1/2P_3$.

Si on ne le voit pas il faut trouver λ et μ tels que $P_0 = \lambda P_2 + \mu P_3$, c'est à dire tels que $X^2 - 2 = \lambda(X^2 - X - 2) + \mu(X^2 + X - 2) = (\lambda + \mu)X^2 + (-\lambda + \mu)X + (-2\lambda - 2\mu)$. Par définition deux polynômes sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients, on doit donc résoudre le sytème :

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 0 = -\lambda + \mu \\ -2 = -2\lambda - 2\mu \end{cases}$$

qui a pour solution : $\lambda = 1/2$, $\mu = 1/2$.

iii) Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Est-ce une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Réponse. Soit λ, μ et γ des scalaires tels que $\lambda P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3 = 0$; par définition de famille libre, on doit montrer que $\lambda = \mu = \gamma = 0$.

On a $lambda P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3 = \lambda(X^2 - 1) + \mu(X^2 - X - 2) + \gamma(X^2 + X - 2) = (\lambda + \mu + \gamma)X^2 + (-\mu + \gamma)X + (-\lambda - 2\mu - 2\gamma) = 0$ ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = 0 \\ -\mu + \gamma = 0 \\ -\lambda - 2\mu - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution : $\lambda = \mu = \gamma = 0$ et donc on a bien montré que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est libre.

Comme c'est une famille libre de 3 éléments de l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4

i) Rappeler la définition d'une matrice inversible.

Réponse. Une matrice A est inversible si A est carrée à n lignes et n colonnes et s'il existe une matrice carrée B de mêmes dimensions telle que $AB = BA = I_n$ (I_n est la matrice identité de dimension $n \times n$).

ii) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Réponse. On répond aux deux questions à la fois en calculant l'inverse de M par échelonnement :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3]{L_1 \leftarrow -L_1 - 2L_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La troisième ligne du calcul ci-dessus produit dans la partie gauche de la matrice (les 3 colonnes avant la barre verticale) une forme échelonnée de M dont aucune ligne n'est nulle : on en déduit que M est inversible. La dernière ligne fournit dans la partie droite de la matrice (les 3 colonnes après la barre verticale) la matrice inverse :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement (il faut le faire) que le produit $M.M^{-1}$ donne la matrice identité.

Soit E un espace vectoriel réel. Pour un vecteur $x \in E$, on notera par $(x)_B$ ses coordonnées dans une base B de E.

iii) Soit $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les vecteurs suivants :

$$f_1 = -e_1 + 2e_2 - e_3, \quad f_2 = e_1 - e_2, \quad f_3 = -2e_1 + e_2 + 2e_3.$$

Montrer que $B_2 = (f_1, f_2, f_3)$ est aussi une base de E.

Réponse. Comme B_1 est une base à 3 éléments de E on en déduit que E est de dimension 3. Comme B_2 a 3 éléments également il suffit de démontrer soit que B_2 est libre, soit que B_2 est génératrice, pour en déduire que c'est une base de E. On va montrer que B_2 est libre.

Soit donc trois scalaires λ, μ et γ tels que $\lambda f_1 + \mu f_2 + \gamma f_3 = \vec{0}$. On veut montrer que $\lambda = \mu = \gamma = 0$. On a : $\lambda f_1 + \mu f_2 + \gamma f_3 = \lambda(-e_1 + 2e_2 - e_3) + \mu(e_1 - e_2) + \gamma(-2e_1 + e_2 + 2e_3) = (-\lambda + \mu - 2\gamma)e_1 + (2\lambda - \mu + \gamma)e_2 + (-\lambda + 2\gamma)e_3$. Comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base, du fait que cette combinaison linéaire est nulle on déduit que ses 3 coefficients sont nuls. On a donc le système :

$$\begin{cases} -\lambda + \mu - 2\gamma = 0 \\ 2\lambda - \mu + \gamma = 0 \\ -\lambda + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

On vérifie facilement que ce système a une unique solution : $\lambda = \mu = \gamma = 0$ ce qui montre que B_2 est libre, donc une base de E.

On peut remarquer que ce système s'écrit sous forme matricielle $M.X = 0$ où M est la matrice de la question précédente, X est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ et 0 est le vecteur colonne de $\mathbb{R}^3$ contenant trois 0. Comme on a vu que M est inversible, en multipliant à gauche les deux membres de l'équation par M^{-1} on retrouve le fait que ce système a pour unique solution $X = 0$, c'est à dire $\lambda = \mu = \gamma = 0$.

iv) Soient $u, v \in E$ deux vecteurs dont les coordonnées en base B_1 et B_2 respectivement sont données par

$$(u)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } (v)_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les coordonnées de u dans la base B_2 et les coordonnées de v dans la base B_1.

Réponse. Par définition de coordonnées dans une base on a $u = e_1 + e_2 - e_3$; il s'agit maintenant d'écrire u comme combinaison linéaire de f_1, f_2 et f_3, c'est à dire trouver des scalaires x, y et z tels que $u = xf_1 + yf_2 + zf_3$. Si de tels scalaires existent, comme B_2 est une base, ce sont les coordonnées cherchées c'est à dire que l'on aura : $(u)_{B_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On a déjà fait le calcul de $xf_1 + yf_2 + zf_3$ dans la première question (x, y et z s'appelaient λ, μ et γ) et on sait donc que $xf_1 + yf_2 + zf_3 = (-x + y - 2z)e_1 + (2x - y + z)e_2 + (-x + 2z)e_3$. On doit donc résoudre l'équation :

$$(-x + y - 2z)e_1 + (2x - y + z)e_2 + (-x + 2z)e_3 = e_1 + e_2 - e_3$$

Compte tenu du fait que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base cette équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x + 2z = -1 \end{cases}$$

On peut résoudre le système par les méthodes habituelles ce qui nous donnera les coordonnées $(u)_{B_2}$. On peut aussi remarquer que ce système s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On reconnait la matrice M dont on a calculé l'inverse à la 2ème question. On trouve la solution en multipliant à gauche les deux membres de l'équation pas M^{-1} ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En résumé on a trouvé :

$$(u)_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer les coordonnées de v dans la base B_1, comme on connait ses coordonnées dans B_2, on sait que l'on a : $v = 2f_1 - f_2 + 2f_3$. Donc $v = 2(-e_1 + 2e_2 - e_3) - (e_1 - e_2) + 2(-2e_1 + e_2 + 2e_3) = -7e_1 + 7e_2 + 2e_3$; les coordonnées de v dans B_1 sont donc :

$$(v)_{B_1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

v) Soit $w \in E$. Montrer que si les coordonnées du vecteur w en base B_2 sont $(w)_{B_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors ses coordonnées en base B_1 sont données par $(w)_{B_1} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, où M est la matrice de la question (ii).

Réponse. Si $(w)_{B_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors on a $w = af_1 + bf_2 + cf_3 = a(-e_1 + 2e_2 - e_3) + b(e_1 - e_2) + c(-2e_1 + e_2 + 2e_3) = (-a + b - 2c)e_1 + (2a - b + c)e_2 + (-a + 2c)e_3$. Les coordonnées de w dans la base B_1 sont donc :

$$(w)_{B_1} = \begin{pmatrix} -a + b - 2c \\ 2a - b + c \\ -a + 2c \end{pmatrix}$$

Il suffit de calculer le produit matriciel $M.(w)_{B_2}$ pour vérifier que c'est la même chose :

$$M.(w)_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b-2c \\ 2a-b+c \\ -a+2c \end{pmatrix}$$

vi) Proposer (sans démonstration) la formule analogue, qui permet le passage dans le sens inverse, c'est-à-dire de l'écriture en base B_1 vers celle en base B_2.

Réponse. On vient de voir que $(w)_{B_1} = M.(w)_{B_2}$; en multipliant à gauche chaque membre de l'équation par M^{-1} on obtient donc :

$$(w)_{B_2} = M^{-1}.(w)_{B_1}$$